

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт ядерных исследований Российской академии наук
(ИЯИ РАН)

На правах рукописи

Зенкевич Егор Андреевич

**Спектральная дуальность в калибровочных
теориях, конформных теориях поля и
интегрируемых системах**

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

*Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук*

Научный руководитель:

доктор физ.-мат. наук, академик РАН

В. А. Рубаков

Москва 2015

Оглавление

	Стр.
Введение	6
Глава 1. Функции Некрасова и квантовые спиновые цепочки	25
1.1 Решение уравнения Бакстера	28
1.1.1 Дифференциальный оператор	31
1.1.2 А-периоды до порядка $\Lambda^{2N_c - N_f}$	32
1.2 Функции Некрасова	32
1.3 Проверка до порядка \hbar^2	33
1.3.1 Нулевое число инстантонов	33
1.3.2 Одно-инстантонное приближение	35
1.4 Точная однопетлевая часть для случая $SU(2)$	37
1.4.1 Теория без материи	37
1.4.2 Один мультиплет	39
1.4.3 Два мультиплета	40
1.4.4 Три мультиплета	41
1.4.5 Четыре мультиплета	42
1.5 Заключение	42
Глава 2. Спектральная дуальность между $SL(2)$ цепочкой Гейзенберга и четырехточечной моделью Годена	43
2.1 Дуальность между цепочкой Гейзенберга и моделью Годена	43
2.2 Замечания	47

Глава 3. Спектральная дуальность между общими XXX спиновыми цепочками и системами Годена	51
3.1 Спектральные дуальности и интегрируемые системы	52
3.1.1 Спектральные кривые и пуассоновы структуры	52
3.1.2 Квантование	57
3.1.3 Биспектральная задача и p - q дуальность	59
3.1.4 Спектральная дуальность	61
3.2 Модель Годена	63
3.2.1 Нередуцированная модель Годена	63
3.2.2 Конкретизация модели	65
3.2.3 Гамильтонова редукция	70
3.2.4 Спектральная кривая	71
3.2.5 Простейший пример: \mathfrak{gl}_2 на $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, q, \infty\}$	74
3.2.6 Дуальность АНН	75
3.3 Цепочка Гейзенберга	76
3.3.1 $GL(2)$ XXX Heisenberg chain	76
3.3.2 Редуцированное фазовое пространство и спектральная кривая	79
3.3.3 Простейший пример: цепочка из двух узлов	80
3.3.4 Цепочки высшего ранга	82
3.4 Классическая дуальность	85
3.4.1 Дуальность для $GL(2)$ цепочки	85
3.4.2 Дуальность для цепочек высшего ранга	86
3.4.3 Отображение Пуассона	89
3.5 Квантовая дуальность	91
3.5.1 Простейший пример	91
3.5.2 Общий случай	93

3.6	Комментарии и обсуждение	97
-----	------------------------------------	----

Глава 4.	Спектральные дуальности в XXZ спиновых цепочках и пятимерные калибровочные теории	104
4.1	XXZ спиновая цепочка	105
4.2	Основное утверждение	106
4.3	Классический предел	107
4.4	Дуальность между XXX цепочками и системами Годена	109
4.5	Нормальное упорядочение универсальных разностных операторов	111
4.6	Тригонометрическая и редуцированная модель Годена	113
4.7	Заключение и дальнейшие перспективы	114

Глава 5.	Обобщенные полиномы Джекка и соотношения АГТ для группы $SU(3)$	117
5.1	Дифференциальный оператор	117
5.2	Факторизация интегралов Доценко–Фатеева	120
5.3	Заключение и перспективы	122

Глава 6.	Обобщенные полиномы Макдональда, спектральная дуальность для конформных блоков и АГТ соответствие в пяти измерениях	123
6.1	Обобщенные полиномы Макдональда	123
6.2	q -деформированные интегралы Доценко–Фатеева	128
6.3	Петлевые уравнения для q -деформированного бета-ансамбля	130
6.4	Спектральная дуальность для конформных блоков	134
6.5	Соответствие с теорией топологических струн	136
6.6	Заключение	138

Заключение	139
Приложение А. Функции Некрасова и петлевые уравнения для группы $SU(3)$	142
А.1 Функции Некрасова и соотношения АГТ для группы $SU(3)$	142
А.2 Условия W_3 и Вирасоро для \mathfrak{sl}_3 сельберговских средних	143
Приложение В. Полиномы Макдональда и гамильтонианы Рудженаарса и пятимерные функции Некрасова	144
В.1 Гамильтонианы Рудженаарса	144
В.1.1 Случай $t = q$. Операторы Казимира группы $GL(\infty)$.	146
В.2 Пятимерные функции Некрасова и соотношения АГТ	147
В.3 Гамильтониан Рудженаарса и петлевые уравнения	148
В.4 Полезные тождества	151

Введение

Одним из самых интересных продвижений в теоретической физике в последнее время стало открытие дуальностей в квантовой теории поля и теории струн. Дуальность — это нетривиальное соответствие между параметрами и наблюдаемыми в двух моделях, такое что результаты вычислений в обеих теориях дают одинаковый результат. Часто (хотя и не всегда) дуальности связывают режим сильной связи в одной теории с режимом слабой связи в другой. С одной стороны, это позволяет делать неожиданные предсказания относительно непертурбативных явлений в режиме сильной связи, которые невозможно было получить стандартными методами теории возмущений. Однако, это же свойство затрудняет теоретическую проверку такого рода дуальностей: чрезвычайно сложно произвести вычисления величин одновременно по обе стороны соответствия. Поэтому большинство дуальностей, делающих предсказания относительно режима сильной связи носят пока характер гипотез и строго не обоснованы.

В данной работе мы рассмотрим пример дуальности другого типа, в которой константы связи двух теорий не обязательно находятся в обратной зависимости друг от друга. Это дает возможность произвести вычисления на обеих сторонах соответствия, проверить и во многих случаях строго доказать связь между двумя системами. Мы будем работать с суперсимметричными калибровочными теориями и двумерными конформными теориями поля, поскольку они нетривиальны, но при этом для многих наблюдаемых известны точные ответы, содержащие как пертурбативные, так и непертурбативные вклады. Также, в нашем рассмот-

рении естественным образом возникнут интегрируемые системы, которые связаны с описанием некоторых наблюдаемых, как в калибровочных теориях, так и в двумерных конформных теориях поля.

$\mathcal{N} = 2$ суперсимметричные калибровочные теории. Классические интегрируемые системы Зайберга–Виттена

В калибровочных теориях поля в четырех измерениях с расширенной суперсимметрией в векторном супермультиплете присутствует комплексное скалярное поле в присоединенном представлении калибровочной группы. При низких энергиях это поле приобретает вакуумное среднее, и происходит спонтанное нарушение калибровочной симметрии до абелевой подгруппы. Вакуумные средние диагональных элементов скалярного поля при этом образуют плоские направления (модули) в классическом потенциале, и могут принимать любые комплексные значения. За счет суперсимметрии низкоэнергетическое эффективное действие для оставшихся степеней свободы скалярного поля задается единственной локально голоморфной функцией модулей $\mathcal{F}(a)$, называемой препотенциалом.

Препотенциал был вычислен *точно* (с учетом непертурбативных поправок) в работе Зайберга и Виттена [1, 2]. Процедура его определения следующая. Необходимо написать уравнение комплексной алгебраической кривой Зайберга–Виттена $P(y, z) = 0$ (где P — полином, коэффициенты которого определяются параметрами теории и модулями) и дифференциал Зайберга–Виттена на ней вида $dS = y dz$. Топологически комплексная кривая — это двумерная поверхность с некоторым количеством ручек. Необходимо выбрать базис одномерных циклов A_i и B_i на

поверхности так, чтобы пересечения были равны $A_i \cdot A_j = B_i \cdot B_j = 0$, $A_i \cdot B_j = \delta_{ij}$. Затем надо взять интеграл от дифференциала Зайберга–Виттена по периодам, тогда

$$a_i = \oint_{A_i} dS,$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{SW}}{\partial a_i} = \oint_{B_i} dS.$$

Аналогичная конструкция, включающая в себя комплексную кривую встречается в классических алгебраических интегрируемых системах. Интегрируемые механические системы имеют столько же интегралов движения, сколько и степеней свободы. Часто уравнения движения для интегрируемой модели можно записать в форме Лакса:

$$\frac{dL(z)}{dt} = [M, L(z)],$$

где $L(z)$ — матрица Лакса, зависящая от динамических переменных системы, а также от дополнительного *спектрального параметра* z . Очевидно, что собственные значения матрицы $L(z)$ дают интегралы движения. Таким образом можно записать производящую функцию для интегралов движения как характеристический полином матрицы $L(z)$, т.е. $P(y, z) = \det(y - L(z))$. Алгебраическая кривая $P(y, z) = 0$ в теории интегрируемых систем называется *спектральной кривой*.

Оказывается, что для широкого класса калибровочных теорий, кривые Зайберга–Виттена совпадают со спектральными кривыми для известных интегрируемых систем [3, 4]. Например, калибровочной теории с группой $SU(N)$ и дополнительными мультиплетами (т.н. гипермультиплетами) материи в фундаментальном представлении соответствует ин-

тегрируемая замкнутая XXX цепочка Гейзенберга с N узлами. Коэффициенты в уравнении кривой — это с одной стороны интегралы движения механической системы, а с другой — параметры и модули калибровочной теории.

Статсумма Некрасова и квантование интегрируемых систем

Препотенциал Зайберга–Виттена был изначально получен путем весьма не прямых рассуждений, использующих свойства аналитичности и предположения о структуре сингулярностей. Задача прямого вычисления эффективного действия была решена Некрасовым [5]. Для суперсимметричной регуляризации интегралов по пространствам модулей инстантонов, он ввел два параметра деформации ϵ_1 и ϵ_2 , соответствующие «подкрутке» в двух координатных плоскостях в четырехмерном пространстве. Деформированная статсумма Z_{Nek} представляет собой (помимо тривиальной однопетлевой пертурбативной части) ряд по количеству инстантонов, причем инстантоны «нумеруются» наборами диаграмм Юнга — последовательностей неубывающих натуральных чисел. В пределе $\epsilon_{1,2} \rightarrow 0$ асимптотика статсуммы воспроизводит препотенциал Зайберга–Виттена: $Z_{\text{Nek}} \rightarrow \exp\left(\frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \mathcal{F}_{\text{SW}}\right)$.

Существует гипотеза относительно поведения статсуммы Некрасова при стремлении только одного из параметров деформации ϵ_2 к нулю (предел Некрасова–Шаташвили) [6]. Считается, что при этом деформированный препотенциал \mathcal{F}_{NS} задается *квантованием* соответствующей классической интегрируемой системы Зайберга–Виттена. Квантование интегрируемой системы заключается в замене переменных в спектральной кривой $P(x, y) = 0$ на некоммутирующие операторы \hat{x} и \hat{y} . Полу-

ченный оператор — дифференциальный или разностной *оператор Бакстера* действует на волновую функцию $Q(x)$ в разделенных переменных $P(\hat{x}, \hat{y})Q(x) = 0$. Периоды *квантового* дифференциала $dS = d \ln Q(x)$ (или монодромии $Q(x)$) определяют деформированный препотенциал \mathcal{F}_{NS} .

Конкретное утверждение гипотезы, сформулированное в работе [7], заключается в том, что квантовая деформация периодов на спектральной кривой Зайберга-Виттена равна периодам, получаемым из препотенциала Некрасова с одним ненулевым ϵ -параметром. Гипотеза подвергалась усиленной проверке в случае $SU(N)$ калибровочной теории без материи в работах [8] и [9]. В Главе 1 мы рассмотрим теорию с дополнительными N_f мультиплетами в фундаментальном представлении. В работе [26] были получены некоторые результаты для $SU(2)$ теории с $N_f = 4$ мультиплетами, однако при этом авторы использовали уравнение Бакстера для системы Годена в качестве квантового аналога спектральной кривой. Мы используем уравнение Бакстера для другой системы, изначально связанной с калибровочной теорией — XXX спиновой цепочки — и показываем, что два подхода дают одинаковые квантовые периоды по крайней мере для низших порядков по \hbar . Мы также показываем, что гипотеза верна во всех порядках по \hbar для $N_c = 2$ теории с $N_f \leq 4$ мультиплетами. Эквивалентность двух подходов далеко не очевидна даже в классическом случае, однако оказывается, что квантовые периоды также совпадают. Это указывает на то, что должно существовать нетривиальное соответствие между системами Годена и XXX цепочками.

Дуальность АГТ и интегрируемые системы. Спектральная дуальность в классических и квантовых интегрируемых системах

Чтобы понять причину связи между системами Годена и ХХХ спиновыми цепочками, нужно рассмотреть дуальность Алдая–Гайотто–Тачикавы [10, 11]. Эта дуальность устанавливает соответствие между двумерными конформными теориями поля и четырехмерными калибровочными теориями с деформацией Некрасова. Статсумма калибровочной теории Z_{Nek} равна конформному блоку — голоморфной части коррелятора конформной теории поля, причем количество точек определяется составом материи калибровочной теории, а размерности операторов, расположенных в точка — массами и модулями. Положение точек определяется константой связи четырехмерной теории.

В Главах 2 и 3 мы изучим следствия АГТ соответствия на уровне интегрируемых систем¹. При стремлении одного из некрасовских параметров ϵ_2 к нулю центральный заряд алгебры Вирасоро конформной теории поля стремится к бесконечности и теория поля эффективно становится классической. При этом возникают дифференциальные уравнения на конформные блоки со вставкой одного оператора с вырожденной размерностью: $\hat{P}(z, \partial_z) \langle V_{\text{degen}}(z) \prod V_{\Delta}(q_i) \rangle = 0$, где \hat{P} — дифференциальный оператор. Оказывается, что такие уравнения совпадают с уравнениями Бакстера для интегрируемых систем типа Годена [37, 38].

Итак, по две стороны АГТ соотношения расположены *a priori* разные интегрируемые системы, которые должны совпадать, если гипотеза АГТ верна. В главе 2 мы рассмотрим простейший пример тако-

¹Смежные вопросы рассматривались в работах [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25] [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36].

го типа: эквивалентность четырехточечного конформного блока и пре-
 потенциала в $SU(N)$ суперсимметричной калибровочной теории с ну-
 левой β -функцией. Со стороны калибровочной теории (классическая)
 интегрируемая система — это цепочка Гейзенберга [39, 40, 41], которая
 описывается спектральной кривой $\Gamma^{\text{Heisen}}(w, x) : \det(w - T(x)) = 0$ с
 $GL(2)$ -значной N -точечной трансфер-матрицей $T(x)$ и дифференциа-
 лом Зайберга-Виттена (ЗВ-дифференциалом) $dS^{\text{Heisen}}(w, x) = x \frac{dw}{w}$. Со
 стороны конформной теории, соответствующая интегрируемая систе-
 ма является системой Годена, определяемой своей спектральной кривой
 $\Gamma^{\text{Gaudin}}(y, z) : \det(y - L(z)) = 0$ с \mathfrak{gl}_N -значной матрицей Лакса $L(z)$ и
 ЗВ-дифференциалом $dS^{\text{Gaudin}}(y, z) = y dz$.

В случае групп более высокого ранга $SU(N)$, которые со стороны
 калибровочной теории связаны с цепочкой Гейзенберга (на N узлах),
 необходимо учесть, что на стороне конформной теории возникает четы-
 рехточечный конформный блок W_N -алгебры [12, 13, 14], однако не про-
 извольный, а с двумя из четырех операторов, подчиняющимся специаль-
 ным условиям. Это означает, что имеется два произвольных оператора,
 параметризуемых $N - 1$ параметром каждый и два других оператора,
 параметризуемых лишь одним параметром каждый. В терминах инте-
 грируемых систем это означает, что в системе Годена две орбиты имеют
 максимальный ранг, а две — минимальный. Мы убедимся, что это дей-
 ствительно так.

В Главе 2 мы покажем, что замена переменных $z = w$, $\lambda = x/w$
 переводит спектральные кривые и ЗВ-дифференциалы двух систем друг

в друга. Таким образом, верно следующее соотношение:

$$\Gamma^{\text{Gaudin}}(y, z) = \Gamma^{\text{Heisen}}(z, zy), \quad (1)$$

$$dS^{\text{Gaudin}}(y, z) = dS^{\text{Heisen}}(z, zy).$$

Соотношения такого типа между спектральными кривыми возникали в работах [42, 43]². Следуя [44], мы называем такую дуальность (*классической*) *спектральной дуальностью*. Преобразование дуальности является *биспектральной инволюцией* [45], меняющей между собой спектральный параметр и переменную характеристического полинома.

Хорошо известен более простой пример периодической цепочки Тоды. Ее можно описывать как с помощью $\mathfrak{gl}(N)$ -значной матрицы Лакса:

$$L_{N \times N}^{\text{Toda}}(z) = \begin{pmatrix} p_1 & e^{\frac{1}{2}(q_2 - q_1)} & 0 & & ze^{\frac{1}{2}(q_1 - q_N)} \\ e^{\frac{1}{2}(q_2 - q_1)} & p_2 & e^{\frac{1}{2}(q_3 - q_2)} & \dots & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}(q_3 - q_2)} & p_3 & & 0 \\ & & \dots & & \\ \frac{1}{z}e^{\frac{1}{2}(q_1 - q_N)} & 0 & 0 & & p_N \end{pmatrix} \quad (2)$$

так и с помощью $GL(2)$ -значной трансфер-матрицы:

$$T_{2 \times 2}^{\text{Toda}}(\lambda) = L_N(\lambda) \dots L_1(\lambda), \quad L_i(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - p_i & e^{q_i} \\ -e^{-q_i} & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N \quad (3)$$

Спектральные кривые, определенные этими двумя способами связаны между собой биспектральной инволюцией, то есть

$$\det(\lambda - L_{N \times N}^{\text{Toda}}(z)) = 0 \quad \text{и} \quad \det(z - T_{2 \times 2}^{\text{Toda}}(\lambda)) = 0 \quad (4)$$

²Мы называем дуальность между моделями Годена, описанную в [42, 43] АНН-дуальностью. Смотрите комментарий в конце Главы 2.

совпадают. ЗВ-дифференциал одинаков в обоих случаях $dS = \lambda \frac{dz}{z}$. Таким образом, *периодическая цепочка Тоды является самодуальной моделью* [46, 47].

Квантовая версия этой дуальности возникает при точном квазиклассическом квантовании спектральных кривых. Рассматривая ЗВ-дифференциал как симплектическую 1-форму [48] на \mathbb{C}^2 -плоскости (y, z) получаем пару канонических переменных $(p(y, z), q(z))$, которая приводит ЗВ-дифференциал к виду $dS(y, z) = pdq$. Далее, имеется естественное квантование спектральной кривой, определяемое правилом $(p, q) \rightarrow (\hbar\partial_q, q)$. Для вышеупомянутых моделей имеем:

$$\hat{\Gamma}^{\text{Heisen}}(z, \hbar z \partial_z) \Psi^{\text{Heisen}}(z) = 0, \quad (5)$$

$$\hat{\Gamma}^{\text{Gaudin}}(\hbar\partial_z, z) \Psi^{\text{Gaudin}}(z) = 0 \quad (6)$$

с некоторым выбором упорядочения. Волновая функция может быть записана с помощью квантовой деформации ЗВ-дифференциала на спектральной кривой, т.е. $\Psi(z) = \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int^q dS(\hbar)\right)$, где $dS(\hbar) = p(q, \hbar)dq$ и $p(q, 0) = p(q)|_{\Gamma}$. Монодромии волновой функции вокруг A - и B -циклов кривой Γ даются деформированными переменными типа действия [7, 8]:

$$\Psi(z + A_i) = \exp\left(-\frac{1}{\hbar} a_i^{\hbar}\right) \Psi(z), \quad a_i^{\hbar} = \oint_{A_i} dS(\hbar), \quad (7)$$

$$\Psi(z + B_i) = \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{NS}}}{\partial a_i^{\hbar}}\right) \Psi(z), \quad \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{NS}}}{\partial a_i^{\hbar}} = \oint_{B_i} dS(\hbar),$$

где \mathcal{F}_{NS} — предел Некрасова–Шаташвили [6, 49] интеграла функции Некрасова [50, 51, 52, 53].

Гипотеза АГТ предсказывает следующие соотношения (*квантовой*

спектральной дуальности):

$$a_i^{\hbar}(\Psi^{\text{Heisen}}) = a_i^{\hbar}(\Psi^{\text{Gaudin}}), \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\text{NS}}}{\partial a_i^{\hbar}}(\Psi^{\text{Heisen}}) = \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{NS}}}{\partial a_i^{\hbar}}(\Psi^{\text{Gaudin}}).$$

В Главах 3 и 4 мы имеем дело с известным квантовым уравнением (5) для XXX цепочки — уравнением Бакстера³ [54]:

$$\left(\text{tr } T(\hbar z \partial_z) - \frac{z}{1+q} K_+(\hbar z \partial_z) - \frac{q}{(1+q)z} K_-(\hbar z \partial_z) \right) \Psi^{\text{Heisen}}(z) = 0. \quad (9)$$

Мы проверяем, что (9) может быть переписано как квантовое уравнение спектральной кривой для модели Годена (6). Таким образом, мы приходим к квантовой версии дуальности:

$$\boxed{\Psi^{\text{Heisen}}(z) = \Psi^{\text{Gaudin}}(z)} \quad (10)$$

Аналогично $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричным калибровочным теориям в четырех измерениях, можно рассматривать пятимерные $\mathcal{N} = 1$ теории, компактифицированные на окружность конечного радиуса R_5 . Хотя пятимерные теории и неперенормируемы с точки зрения подсчета степеней, многим выражениям в них все же можно придать смысл наблюдаемых в эффективной теории. Также можно рассматривать удобные ультрафиолетовые дополнения этих теорий, полученные с помощью теории струн. Для нахождения низкоэнергетического эффективного действия в таких теориях применимы те же методы, что и в четырех измерениях.

³Оно возникает как уравнение на собственные значения Q-оператора Бакстера в квантовом методе обратного рассеяния. Изначально оно было написано (на Фурье-образ) в разностной форме.

В частности, интегрируемые системы, соответствующие таким теориям — это XXZ (анизотропные) спиновые цепочки, причем параметр анизотропии $q = e^{-\epsilon_2 R_5}$. Существует также соответствующая деформация соотношений АГТ, в которую входят q -деформированные конформные блоки. При такой деформации для блоков со вставкой вырожденного оператора получается не дифференциальное, а разностное уравнение, по форме вновь напоминающее уравнение Бакстера для XXZ цепочки. Оказывается [55, 56, 57], что в этом случае также сохраняется спектральная дуальность. Она переводит \mathfrak{gl}_K XXZ спиновую цепочку с N узлами в \mathfrak{gl}_N XXZ цепочку с K узлами. При взятии четырехмерного предела $q \rightarrow 1$ одна из XXZ цепочек переходит в XXX цепочку, а другая — в тригонометрическую модель Годена.

В Главе 4 мы докажем классическую спектральную дуальность для XXZ цепочек. Мы также приведем аргументы в пользу квантовой версии этой дуальности. Помимо этого мы выведем новое выражение для производящего оператора квантовых интегралов движения тригонометрической модели Годена.

АГТ соответствие для произвольных центральных зарядов. Спектральная дуальность для конформных блоков

Интересно исследовать структуру АГТ соотношений не только в пределе $\epsilon_2 \rightarrow 0$ (когда возникает спектральная дуальность интегрируемых систем), но и для произвольных параметров деформации $\epsilon_{1,2}$. На языке конформной теории поля это соответствует произвольным конечным значениям центрального заряда c конформной алгебры — алгебры Вирасоро или, в более сложных случаях, W_N -алгебры.

Чтобы пояснить суть нашего подхода к АГТ соответствию, мы рассмотрим для примера простейший случай $SU(2)$ калибровочной теории с четырьмя гипермультиплетами в фундаментальном представлении. Инстантонная часть статсуммы Некрасова дается рядом по (экспоненцированной) константе связи Λ . Каждое слагаемое в разложении имеет в действительности более тонкую структуру, состоящую из нескольких факторизованных слагаемых, так что полная сумма может быть записана как сумма по парам диаграмм Юнга (A, B) :

$$Z_{\text{Nek}}(\Lambda|a, m_f, q, t) = \sum_{A, B} \Lambda^{|A|+|B|} \frac{(z_{\text{fund}}(A))^2 (z_{\text{fund}}(B))^2}{z_{\text{vect}}(A, B)}, \quad (11)$$

где $z_{\text{fund}, \text{vect}}$ — некоторые полиномы от параметров калибровочной теории. Со стороны конформной теории поля эта сумма соответствует разложению четырехточечного конформного блока по полной системе базисных векторов $|A, B, \alpha\rangle$, нумеруемых парами диаграмм Юнга. Это разложение можно схематически записать как

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\Lambda | \begin{smallmatrix} \alpha_\Lambda \\ \alpha_0 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \alpha \\ \alpha_\infty \end{smallmatrix}) &= \langle V_0(0) V_\Lambda(\Lambda) | \text{через } V_\alpha \text{ канал} | V_1(1) V_\infty(\infty) \rangle = \\ &= \sum_{A, B} \Lambda^{|A|+|B|} \langle V_0(0) V_\Lambda(1) | A, B, \alpha \rangle \langle A, B, \alpha | V_1(1) V_\infty(\infty) \rangle \stackrel{\text{АГТ}}{=} \\ &\stackrel{\text{АГТ}}{=} \sum_{A, B} \Lambda^{|A|+|B|} \frac{(z_{\text{fund}}(A))^2 (z_{\text{fund}}(B))^2}{z_{\text{vect}}(A, B)} \quad (12) \end{aligned}$$

Один из способов доказательства АГТ соответствия — это поиск специального базиса, для которого равенство в последних двух строчках выполнено не только как равенство рядов по степеням Λ , но и для каждой пары диаграмм [58, 59, 60], так что

$$\langle V_0(0) V_\Lambda(1) | A, B, \alpha \rangle \langle A, B, \alpha | V_1(1) V_\infty(\infty) \rangle = \frac{(z_{\text{fund}}(A))^2 (z_{\text{fund}}(B))^2}{z_{\text{vect}}(A, B)} \quad (13)$$

При $\epsilon_1 = -\epsilon_2$ (или $c = 1$ в конформной теории поля), действительно имеется простой базис, состоящий из полиномов Шура, который дает правильное разложение конформных блоков [60, 61]. Однако, для общих значений ϵ_1, ϵ_2 базис оказывается более сложным: в частности, наивной деформации полиномов Шура к полиномам Джека или Макдональда недостаточно. Правильный базис для $SU(2)$ калибровочной теории (обобщенные полиномы Джека) был найден в работе [62]. В Главе 5 мы покажем, что правильный базис в более сложном случае калибровочной группы $SU(3)$ дается обобщенными полиномами Джека $J_{A,B,C}$, а в Главе 6 — что для пятимерной калибровочной теории это базиса обобщенных полиномов Макдональда M_{AB} [63]. Для теории с калибровочной группой $SU(N)$ обобщенные полиномы зависят от N диаграмм Юнга и $N - 1$ дополнительного параметра, соответствующего модулям калибровочной теории.

Для вычисления матричных элементов в уравнении (13) мы используем представление Доценко–Фатеева для конформных блоков. В общем случае это представление позволяет записать конформный блок в виде многократного интеграла. Для различных теорий конкретный вид интегралов несколько отличается. В частности, в Главах 5 и 6 нам понадобится случай \mathfrak{sl}_3 интеграла Сельберга и q -деформированного интеграла Сельберга соответственно для вычисления средних от обобщенных полиномов Джека и Макдональда.

Два этих случая во многом аналогичны, поэтому для краткости мы продемонстрируем общую схему для случая q -интегралов. q -интеграл

Джексона определяется как дискретная *сумма* вида

$$\int_0^a d_q z f(z) = (1 - q) \sum_{k \geq 0} q^k a f(q^k a) = \frac{1 - q}{1 - q^{a \partial_a}} (a f(a)). \quad (14)$$

Матричные элементы в специальном базисе равны сельберговским средним обобщенных полиномов Макдональда:

$$\langle V_0(0) V_\Lambda(1) | A, B, \alpha \rangle = \frac{\int_0^1 d_q^N x \mu(x) M_{AB}(x)}{\int_0^1 d_q^N x \mu(x)}, \quad (15)$$

где $\mu(x)$ — некоторая q -деформированная мера Сельберга. Чтобы вычислить средние, мы выведем набор петлевых уравнений для q -деформированного бета-ансамбля (или (q, t) -матричной модели) который дает рекуррентные соотношения для средних любых симметрических полиномов.

Главный результат нашего рассмотрения — это замечательные *факторизованные* формулы для средних от обобщенных полиномов Макдональда. Они могут быть схематически записаны следующим образом

$$\frac{\int_0^1 d_q^N x \mu(x) M_{AB}(x)}{\int_0^1 d_q^N x \mu(x)} = \frac{(z_{\text{fund}}(A))(z_{\text{fund}}(B))}{[z_{\text{vect}}(A, B)]^{1/2}} \quad (16)$$

и явно приводят к соотношениям АГТ для четырехточечных конформных блоков (13). Хотя нам и не удалось строго доказать эти формулы, мы проверили их для нескольких низших полиномов.

Проясним также связь между нашим рассмотрением и альтернативным подходом к пятимерному обобщению АГТ соответствия, предложенным в работах [64, 65]. В этих работах сумма в интегралах Джексона в представлении Доценко–Фатеева *без* разложения по базису была

интерпретирована как сумма по *парам диаграмм Юнга*:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\Lambda \mid \begin{smallmatrix} \alpha_\Lambda \\ \alpha_0 \end{smallmatrix} \alpha \begin{smallmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_\infty \end{smallmatrix}) &= \langle V_0(0)V_\Lambda(\Lambda) \mid \text{through } V_\alpha \text{ primary} \mid V_1(1)V_\infty(\infty) \rangle \simeq \\ &\simeq \int_0^1 d_q^{N_+} x d_q^{N_-} y \mu(x)\mu(y)\nu(\Lambda, x, y) = \\ &= \sum_{R_+, R_-} \mu(q^{R_+ t^\rho})\mu(q^{R_- t^\rho})\nu(\Lambda, q^{R_+ t^\rho}, q^{R_- t^\rho}), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\nu(\Lambda, x, y) = \sum_{AB} \Lambda^{|A|+|B|} M_{AB}^*(x)M_{AB}(y)$ — некоторая рациональная функция, а $\rho = (N-1, N-2, \dots, 0)$ — вейлевский вектор. Более того, в работе [64, 65] было показано, что подинтегральные выражения замечательным образом собираются в функцию Некрасова

$$\mu(q^{R_+ t^\rho})\mu(q^{R_- t^\rho})\nu(\Lambda, q^{R_+ t^\rho}, q^{R_- t^\rho}) = (\Lambda^\vee)^{|R_+|+|R_-|} \frac{(z_{\text{fund}}(R_+))^2 (z_{\text{fund}}(R_-))^2}{z_{\text{vect}}(R_+, R_-)}. \quad (18)$$

Однако, это *не та* функция Некрасова, что фигурирует в АГТ соответствии, а *спектрально дальняя* [73, 72, 74] к ней. Можно заметить, что разложение в уравнении (17) производится не по исходной константе связи Λ , которая теперь нетривиальным образом входит в каждое слагаемое, а по *спектрально дуальной* константе связи Λ^\vee , т.е. по промежуточному импульсу q^α конформного блока.

Мы имеем, таким образом *два различных* разложения q -деформированного конформного блока, связанные спектральной дуальностью. Исходное разложение по специальному базису соответствует АГТ дуальной функции Некрасова, а спектрально дуальное разложение по промежуточному импульсу соответствует явной сумме по полюсам интеграла Доценко–Фатеева:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\Lambda \mid \begin{smallmatrix} \alpha_\Lambda \\ \alpha_0 \end{smallmatrix} \alpha \begin{smallmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_\infty \end{smallmatrix}) & \xlongequal{\text{AGT}} & Z_{\text{Nek}}(\Lambda \mid a, m_f, q, t) \\ \parallel \text{DF} & \nearrow \text{Spectral} & \\ Z_{\text{Nek}}^\vee(\Lambda^\vee = q^{2\alpha} \mid a^\vee, m_f^\vee, q, t) & & \end{array} \quad (19)$$

Вообще говоря, спектрально дуальная пятимерная функция Некрасова описывает калибровочные теории с различными калибровочными группами и составом материи: $SU(N)^{M-1}$ и $SU(M)^{N-1}$ колчаные калибровочные теории соответственно [82]. В нашем случае $N = M = 2$, так что дуальные теории имеют одну и ту же калибровочную группу. Тем не менее, параметры дуальных теорий выражаются друг через друга нетривиальным образом, например дуальная константа связи Λ^\vee — это комбинация масс исходной теории. Можно заметить, что соотношения АГТ получаются как комбинация явного разложения Доценко–Фатеева [64, 65] и спектральной дуальности.

Можно заполнить пустующий угол в диаграмме (19), применив АГТ дуальность к статсумме Z_{Nek}^\vee , или интерпретируя Z_{Nek} как разложение Доценко–Фатеева для дуального конформного блока \mathcal{B}^\vee :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{B}(\Lambda \mid \begin{array}{c} \alpha_\Lambda \\ \alpha_0 \end{array} \alpha \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_\infty \end{array}) & \xlongequal{\text{AGT}} & Z_{\text{Nek}}(\Lambda \mid a, m_f, q, t) \\
 \parallel \text{DF} & \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} & \parallel \text{DF} \\
 Z_{\text{Nek}}^\vee(\Lambda^\vee = q^{2\alpha} \mid a^\vee, m_f^\vee, q, t) & \xlongequal{\text{AGT}} & \mathcal{B}^\vee(\Lambda^\vee \mid \begin{array}{c} \alpha_\Lambda^\vee \\ \alpha_0^\vee \end{array} \alpha^\vee \begin{array}{c} \alpha_1^\vee \\ \alpha_\infty^\vee \end{array})
 \end{array} \tag{20}$$

В общем случае дуальный конформный блок \mathcal{B}^\vee содержит другое количество точек и вычисляется для другой конформной алгебры (q - W_M вместо q -Вирасоро), по сравнению с исходным блоком \mathcal{B} . Однако в нашем случае, ситуация значительно проще: и число точек и конформная алгебра для четырехточечного конформного блока q -Вирасоро остаются теми же. Размерности полей и их координаты, однако нетривиально перевыражаются друг через друга.

Можно задаться вопросом: почему спектральные дуальности становятся явными только в пятимерном обобщении АГТ соответствия, и не видны в исходном четырехмерном варианте? Оказывается, что

статсумма пятимерной калибровочной теории имеет еще более тонкую структуру, чем разложение Некрасова. Эту структуру можно проанализировать, если посмотреть на калибровочную теорию с точки зрения теории топологических струн. В подходе «геометрической инженерии» [66, 67], $\mathcal{N} = 1$ калибровочная теория в пяти измерениях получается компактификацией М-теории на некоторое шестимерное многообразие Калаби-Яу. Пятимерная статсумма Некрасова равна статсумме топологических струн на многообразии, соответствующем калибровочной теории⁴. Геометрия многообразия Калаби-Яу кодируется его торической диаграммой. Для случая $SU(2)$ калибровочной теории с четырьмя гипермультиплетами в фундаментальном представлении, диаграмма показана на Рис. . Ребра диаграммы соответствуют 2-циклам в многообразии Калаби-Яу, а Кэлеровы параметры этих циклов Q_i соответствуют параметрам калибровочной теории.

Статсумму теории топологических струн можно вычислить, пользуясь техникой топологических вершин [70, 71]. Каждому внутреннему ребру диаграммы сопоставляется диаграмма Юнга, а каждой тривалентной вершине — некоторое выражение $C_{\lambda\mu\nu}(q)$, зависящее от трех диаграмм, расположенных на примыкающих ребрах. Внешним ребрам сопоставляются пустые диаграммы. Статсумма получается при суммировании по всем промежуточным диаграммам λ_i с весами $(-Q_i)^{|\lambda_i|}$.

Существует два существенно различных способа произвести суммирование по диаграммам на Рис. . Можно разрезать торическую диаграмму вертикально, вычислить явно суммы по R_{\pm} и оставить суммы

⁴Исходный подход геометрической инженерии дает функцию Некрасова на самодуальном гравифотонном фоне, т.е. при $t = q$. Чтобы получить $t \neq q$, необходимо рассмотреть рафинированные топологические струны [68, 69].

$$= \left\{ \begin{array}{l} \sum_{A,B} Q_B^{|A|+|B|} \frac{(z_{\text{fund}}(A))^2 (z_{\text{fund}}(B))^2}{z_{\text{vect}}(A,B)} = Z_{\text{Nek}} \\ \sum_{R_+,R_-} Q_F^{|R_+|+|R_-|} \frac{(z_{\text{fund}}(R_+))^2 (z_{\text{fund}}(R_-))^2}{z_{\text{vect}}(R_+,R_-)} = Z_{\text{Nek}}^V \end{array} \right.$$

Рис. 1. Торическая диаграмма, соответствующая $SU(2)$ калибровочной теории с четырьмя гипермультиплетами в фундаментальном представлении. Q_F соответствует вакуумному среднему от скаляра, $Q_{1,2}^\pm$ — массам гипермультиплетов, а $Q_B \sim \Lambda$ — константе связи теории.

по A , B в конечном ответе. Эта сумма по парам диаграмм — как раз та самая сумма, которая возникает в функции Некрасова Z_{Nek} . Более того, каждая половинка диаграммы соответствует матричному элементу в разложении конформного блока (12):

$$= \langle V_0(0)V_\Lambda(1)|Y_1, Y_2, \alpha \rangle \quad (21)$$

Однако, существует еще один способ произвести суммирование по диаграммам: разрезать торическую диаграмму *горизонтально* и сначала вычислить суммы по A и B . В этом случае получается спектрально дуальная функция Некрасова Z_{Nek}^V . Суммы по R_\pm соответствуют суммам

в представлении Доценко–Фатеева (17):

$$= [\mu(q^{R_+t^\rho})\mu(q^{R_-t^\rho})\nu(\Lambda, q^{R_+t^\rho}, q^{R_-t^\rho})]^{1/2} \quad (22)$$

Спектральная дуальность в таком подходе возникает естественно и соответствует симметрии отражения торической диаграммы относительно диагонали (или диаграммы повороту на $\frac{\pi}{2}$).

Основные результаты диссертации представлены в статьях [30, 72, 73, 74, 75, 76].

Основные результаты диссертации докладывались на Международном семинаре «Gauge theories and integrability», Осака, Япония, 24–30 марта 2012 г., XVII Международном семинаре «Кварки-2012», Ярославль, 4-10 июня 2012 г., XXI Международной конференции «Integrable Systems and quantum symmetries», Прага, Чехия, 12–16 июня 2013 г., на Международной конференции «Strings, Knots and Related problems», Международный Институт Физики, Университет Рио Гранде до Норте, Наталь, Бразилия, 10-17 ноября 2013 г., XVIII Международном семинаре «Кварки-2014», Суздаль, 2-8 июня 2014 г.

Глава 1

Функции Некрасова и квантовые спиновые цепочки

В данной главе мы продемонстрируем связь между некрасовской деформацией препотенциала Зайберга-Виттена для линейных колчанных калибровочных теорий и квантовых спиновых цепочек. В частности, мы покажем, что монодромии волновой функции в разделенных переменных (или Q -оператора Бакстера) полностью задают некрасовский препотенциал в пределе $\epsilon_2 = 0$.

Рассмотрим спектральную кривую Зайберга-Виттена для замкнутой XXX спиновой цепочки с N узлами [39, 77, 78]

$$K(p) - \frac{\bar{\Lambda}}{2} (K_+(p)e^{ix} + K_-(p)e^{-ix}) = 0, \quad (1.1)$$

where $\bar{\Lambda} = \Lambda^{N_c - \frac{N_f}{2}}$ and

$$K(p) = u_N \prod_{j=1}^{N_c} (p - \lambda_j) = \sum_{j=1}^{N_c} u_j p^j,$$

$$K_+(p) = \prod_{j=1}^{N_+} (p + m_j), \quad K_-(p) = \prod_{j=N_++1}^{N_f} (p + m_j),$$

$$K_+(p)K_-(p) = \prod_{j=1}^{N_f} (p + m_j) = \sum_{j=1}^{N_f} v_j p^j.$$

Распределение мультиплетов по «+» и «-» полиномам не сказывается на периодах p . Периоды дифференциала pdx найденные с помощью (1.1) определяют препотенциал Зайберга-Виттена $\mathcal{F}_{SW}(a)$ (который

мы в дальнейшем будем называть классическим):

$$a_i = \Pi_{A_i}^0(\lambda, m, \Lambda) = \oint_{A_i} p dx, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{SW}}{\partial a_i} = \Pi_{B_i}^0(\lambda, m, \Lambda) = \oint_{B_i} p dx. \quad (1.3)$$

«Квантовая деформация» препотенциала получается при квантовании уравнения (1.1). Под этим понимается то, что (1.1) есть квазиклассический предел некоторого уравнения типа уравнения Шредингера (на самом деле оно является Фурье-образом уравнения Бакстера для ХХХ цепочки) и $p(x)$ является классическим импульсом [24]. Периоды pdx соответствуют периода Бора-Зоммерфельда в квантовой механике. К ним имеют квантовые поправки: pdx заменяется на $Pdx = \sum_n \hbar^n p_n dx$. Эти *точные квантовые периоды* определяют деформированный препотенциал аналогично (1.2), (1.3):

$$a_i = \Pi_{A_i}^{\hbar}(\lambda, m, \Lambda) = \oint_{A_i} P dx, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{Nek}}{\partial a_i} = \Pi_{B_i}^{\hbar}(\lambda, m, \Lambda) = \oint_{B_i} P dx. \quad (1.5)$$

Препотенциал, определенный таким образом совпадает с функцией Некрасова с одним ненулевым ϵ -параметром, $\mathcal{F}_{Nek}(a|\epsilon_1 = \hbar, \epsilon_2 = 0)$.

При попытке проквантовать уравнение (1.1), то есть написать $-i\hbar\partial/\partial x$ вместо p возникает проблема упорядочения операторов. Однако она в данном случае не представляет трудности так как различные упорядочения связаны сдвигом масс мультиплетов:

$$e^{itx}(-i\hbar\partial + m_f)e^{i(1-t)x} = (-i\hbar\partial + m_f - t\hbar)e^{ix}. \quad (1.6)$$

Учитывая это равенство можно выписать уравнение Бакстера, соответствующее (1.1):

$$\left(K(-i\hbar\partial) - \frac{\bar{\Lambda}}{2} \left(e^{\frac{ix}{2}} K_+(-i\hbar\partial) e^{\frac{ix}{2}} + e^{-\frac{ix}{2}} K_-(-i\hbar\partial) e^{-\frac{ix}{2}} \right) \right) e^{\left(\frac{i}{\hbar} \int^x P(y) dy\right)} = 0. \quad (1.7)$$

Здесь $P(y)$ понимается как ряд $P = \sum_n (-i\hbar)^n p_n$, где $p_0 = p$. Мы использовали свободу в выборе упорядочения в уравнении (1.7) для того чтобы занулить нечетные по \hbar поправки к периодам.

Напомним идею пертурбативных проверок по аналогии с [8]. Алгоритм таков:

- Необходимо решить уравнение Бакстера по теории возмущений по \hbar и найти первые несколько p_n . Они зависят от λ_i, m_f, Λ .
- Переписываем p_n в виде дифференциального оператора, действующего на p_0 :

$$p_n = \hat{\mathcal{O}}_n p_0 \quad (1.8)$$

$$P = \sum_n (-i\hbar)^n \hat{\mathcal{O}}_n p_0 = \hat{\mathcal{O}} p_0 \quad (1.9)$$

- Действуем на классические периоды $\Pi_{A_i}^0(\lambda, m, \Lambda)$ оператором $\hat{\mathcal{O}}$, находим $\Pi_{A_i}^{\hbar}(\lambda, m, \Lambda)$ и подставляем в известные производные функции Некрасова $\left. \frac{\partial \mathcal{F}_{Nek}}{\partial a_i} \right|_{a_i = \Pi_{A_i}^{\hbar}(\lambda, m, \Lambda)}$.
- Действуем на $\Pi_{B_i}^0(\lambda, m, \Lambda) = \left. \frac{\partial \mathcal{F}_{SW}}{\partial a_i} \right|_{a_i = \Pi_{A_i}^0(\lambda, m, \Lambda)}$ оператором $\hat{\mathcal{O}}$ и находим $\Pi_{B_i}^{\hbar}(\lambda, m, \Lambda)$.
- Сравниваем $\left. \frac{\partial \mathcal{F}_{Nek}}{\partial a_i} \right|_{a_i = \hat{\mathcal{O}} \Pi_{A_i}^0(\lambda, m, \Lambda)}$ with $\hat{\mathcal{O}} \left. \frac{\partial \mathcal{F}_{SW}}{\partial a_i} \right|_{a_i = \Pi_{A_i}^0(\lambda, m, \Lambda)}$.

В разделе 1.1 мы находим решение уравнения Бакстера и дифференциальный оператор $\hat{\mathcal{O}}$ в первых порядках теории возмущений по \hbar . В разделе 1.2 мы выписываем необходимые для наших целей функции Некрасова. В разделе 1.3 мы производим проверку в низших порядках по \hbar .

Можно также найти квантовые периоды во всех порядках по \hbar в пределе малых Λ [27]. Это соответствует пертурбативной (однопетлевой) части препотенциала Некрасова. А-периоды не получают поправок в этом пределе, поэтому $\Pi_{A_i}^{\hbar} = \Pi_{A_i}^0 = \lambda_i$.

Чтобы найти В-периоды заметим, что $P(x)$ можно записать как

$$P(x) = -i\hbar \partial \ln \psi(x), \quad (1.10)$$

где

$$\psi(x) = \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int^x P(y) dy \right). \quad (1.11)$$

Таким образом:

$$\Pi_{B_i}^{\hbar}(\lambda, m, \Lambda) = \ln \psi(a) - \ln \psi(b), \quad (1.12)$$

где a и b лежат на различных сторонах разреза¹. Найдя волновую функцию ψ мы находим пертурбативные периоды, которые совпадают с соответствующими периодами из Некрасовского препотенциала. Мы производим эти проверки в случае $SU(2)$ теории в разделе 1.4.

1.1 Решение уравнения Бакстера

Импульс P понимается в смысле пертурбативного разложения

$$P = \sum p_n (-i\hbar)^n.$$

¹Аналогичный подход был использован в [79].

Таким образом, необходимо переписать уравнение (1.7) в терминах p_n . Для этого удобно определить производящую функцию

$$\begin{aligned}
G(\alpha) &= \sum_{n \geq 0} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int^x P(y) dy\right) (-i\hbar\partial)^n \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int^x P(y) dy\right) \frac{\alpha^n}{n!} = \\
&= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int^x P(y) dy\right) \exp(-i\hbar\alpha\partial) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int^x P(y) dy\right) = \\
&= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_x^{x-i\alpha\hbar} P(y) dy\right) = \exp\left(\sum_{k \geq 0} \frac{(-i\hbar)^k \alpha^{k+1}}{(k+1)!} \partial^k P(x)\right). \quad (1.13)
\end{aligned}$$

Подставляя разложение для P в уравнение (1.13) и раскладывая экспоненту в ряд по $(-i\hbar)$ находим

$$\begin{aligned}
G(\alpha) &= \exp\left(\sum_{k \geq 0} \sum_{i \geq 0} \frac{(-i\hbar)^{k+i} \alpha^{k+1}}{(k+1)!} \partial^k p_i(x)\right) = \\
&= e^{\alpha p_0} \sum_{N \geq 0} (-i\hbar)^N \sum_{\substack{n \geq 0 \\ l_j \geq 1 \\ l_1 + \dots + l_n = N}} \sum_{\substack{0 \geq i_j \geq l_j \\ i_1 + \dots + i_n = M}} \alpha^{N-M+n} \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^n \frac{\partial^{l_j - i_j} p_{i_j}}{(l_j - i_j + 1)!} = \\
&= \sum_{N \geq 0} (-i\hbar)^N \sum_{\substack{n \geq 0 \\ l_j \geq 1 \\ l_1 + \dots + l_n = N}} \sum_{\substack{0 \geq i_j \geq l_j \\ i_1 + \dots + i_n = M}} \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^n \frac{\partial^{l_j - i_j} p_{i_j}}{(l_j - i_j + 1)!} \left(\frac{d}{dp_0}\right)^{N-M+n} e^{\alpha p_0}. \quad (1.14)
\end{aligned}$$

Разлагая $G(\alpha)$ по α получаем

$$\begin{aligned}
&\exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int^x P(y) dy\right) (-i\hbar\partial)^L \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int^x P(y) dy\right) = \\
&= \sum_{N \geq 0} (-i\hbar)^N \sum_{\substack{n \geq 0 \\ l_j \geq 1 \\ l_1 + \dots + l_n = N}} \sum_{\substack{0 \geq i_j \geq l_j \\ i_1 + \dots + i_n = M}} \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^n \frac{\partial^{l_j - i_j} p_{i_j}}{(l_j - i_j + 1)!} \left(\frac{d}{dp_0}\right)^{N-M+n} p_0^L \quad (1.15)
\end{aligned}$$

и окончательно

$$\begin{aligned}
& \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int^x P(y) dy\right) K(-i\hbar\partial) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int^x P(y) dy\right) = \\
& = \sum_{N \geq 0} (-i\hbar)^N \sum_{\substack{n \geq 0 \\ l_j \geq 1 \\ l_1 + \dots + l_n = N}} \sum_{\substack{0 \geq i_j \geq l_j \\ i_1 + \dots + i_n = M}} \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^n \frac{\partial^{l_j - i_j} p_{i_j}}{(l_j - i_j + 1)!} \left(\frac{d}{dp_0}\right)^{N-M+n} K(p_0).
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Имея выражение (1.16) можно приступить к решению уравнения (1.7). Замечаем, что система уравнений является «треугольной» (хотя и нелинейной), то есть p_N входит линейно в порядке $(-i\hbar)^N$ и выражается через низшие p_m . Для каждого заданного N уравнение может быть решено последовательными итерациями.

Первая поправка p_1 оказывается полной производной:

$$p_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \ln(K' + V'), \tag{1.17}$$

где $V = V(x, p_0(x)) = -\frac{\hbar}{2}(K_+ e^{ix} + K_- e^{-ix})$, $V' = \frac{\partial V}{\partial p_0}$ и $K' = \frac{\partial K}{\partial p_0}$. Как мы упоминали во введении, мы специально выбрали упорядочение операторов в (1.7) так, чтобы нечетные порядки были полными производными.

Нетривиальная поправка появляется только во втором порядке:

$$\begin{aligned}
p_2 = & -\frac{\partial V' \partial V''}{12(K' + V')^2} + \frac{\partial V'^2 (K'' + V'')}{24(K' + V')^3} + \frac{(K'' + V'')^2 V}{24(K' + V')^3} - \\
& - \frac{(K''' + V''')V}{24(K' + V')^2} - \frac{(K'' + V'')V'}{24(K' + V')^2}.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Третий порядок вновь является полной производной:

$$\begin{aligned}
p_3 = \frac{\partial}{\partial x} & \left(-\frac{\partial V' \partial V'''}{24(K' + V')^2} - \frac{\partial V \partial V''''}{24(K' + V')^2} + \frac{\partial V' \partial V''(K'' + V'')}{8(K' + V')^3} + \right. \\
& \frac{\partial V \partial V''''(K'' + V'')}{6(K' + V')^3} - \frac{3\partial V'^2(K'' + V'')^2}{16(K' + V')^4} - \frac{3\partial V \partial V''(K'' + V'')^2}{8(K' + V')^4} + \\
& \frac{5\partial V \partial V'(K'' + V'')^3}{8(K' + V')^5} - \frac{5\partial V^2(K'' + V'')^4}{16(K' + V')^6} + \frac{5\partial V'^2(K''' + V''')}{48(K' + V')^3} + \\
& \frac{\partial V \partial V''(K''' + V''')}{6(K' + V')^3} - \frac{2\partial V \partial V'(K'' + V'')(K''' + V''')}{3(K' + V')^4} + \\
& \frac{25\partial V^2(K'' + V'')^2(K''' + V''')}{48(K' + V')^5} - \frac{\partial V^2(K''' + V''')^2}{12(K' + V')^4} + \\
& \frac{\partial V \partial V'(K^{(4)} + V^{(4)})}{8(K' + V')^3} - \frac{7\partial V^2(K'' + V'')(K^{(4)} + V^{(4)})}{48(K' + V')^4} + \frac{\partial V^2(K^{(5)} + V^{(5)})}{48(K' + V')^3} + \\
& \frac{(K'' + V'')^3 \partial V}{8(K' + V')^4} - \frac{(K'' + V'')(K''' + V''') \partial V}{6(K' + V')^3} + \frac{(K^{(4)} + V^{(4)}) \partial V}{24(K' + V')^2} - \\
& \left. \frac{(K'' + V'')^2 V'}{8(K' + V')^3} + \frac{(K''' + V''') V'}{12(K' + V')^2} + \frac{(K'' + V'') V''}{16(K' + V')^2} - \frac{V'''}{48(K' + V')} \right). \quad (1.19)
\end{aligned}$$

1.1.1 Дифференциальный оператор

Удобно ввести дифференциальные операторы

$$D_i = \sum_{j=i}^{N_c} \frac{j!}{(j-i)!} u_j \frac{\partial}{\partial u_{j-i}}, \quad (1.20)$$

$$\tilde{D}_i = \sum_{j=i}^{N_c} \frac{j!}{(j-i)!} v_j \frac{\partial}{\partial v_{j-i}} \quad \text{for } i \geq 1, \quad (1.21)$$

$$\tilde{D}_0 = \bar{\Lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{\Lambda}}. \quad (1.22)$$

В их терминах поправка к импульсу записывается в виде

$$p_2 = -\frac{1}{24}(D_2 \tilde{D}_0 + \tilde{D}_2 \tilde{D}_0 - \tilde{D}_1 \tilde{D}_1) p_0. \quad (1.23)$$

1.1.2 A-периоды до порядка $\Lambda^{2N_c - N_f}$

Классические A-периоды были вычислены в [80]:

$$\begin{aligned} \Pi_{A_k}^0 \equiv a_k &= \lambda_k + \sum_{m \geq 1} \frac{\bar{\Lambda}^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_k} \right)^{2m-1} \left(\frac{\prod_{f=1}^{N_f} (\lambda_k + m_f)^m}{\prod_{i \neq k}^{N_c} \lambda_{ki}^{2m}} \right) = \\ &= \lambda_k + \frac{\bar{\Lambda}^2}{4} \frac{\prod_{f=1}^{N_f} (\lambda_k + m_f)}{\prod_{i \neq k}^{N_c} \lambda_{ki}} \left(\sum_{g=1}^{N_f} \frac{1}{(\lambda_k + m_g)} - 2 \sum_{l \neq k}^{N_c} \frac{1}{\lambda_{kl}} \right) + O(\bar{\Lambda}^4). \end{aligned} \quad (1.24)$$

1.2 Функции Некрасова

Функции Некрасова для нашей теории даются формулами [11]²

$$\mathcal{F}_{Nek} = \mathcal{F}_{pert}^{Nek} + \mathcal{F}_{inst}^{Nek}. \quad (1.25)$$

Пертурбативные периоды равны

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \frac{\partial \mathcal{F}_{pert}^{Nek}}{\partial a_i} &= - \left(N_c - \frac{N_f}{2} \right) a_i \ln \Lambda + \frac{\epsilon_1}{2} \sum_{j \neq i} \ln \left(\frac{\Gamma \left(1 + \frac{a_{ij}}{\epsilon_1} \right)}{\Gamma \left(1 - \frac{a_{ij}}{\epsilon_1} \right)} \right) - \\ &\quad - \frac{\epsilon_1}{4} \sum_n \ln \left(\frac{\Gamma \left(1 + \frac{a_i + m_n - \epsilon_1/2}{\epsilon_1} \right)}{\Gamma \left(1 - \frac{a_i + m_n - \epsilon_1/2}{\epsilon_1} \right)} \right) = \\ &= \sum_{j \neq i} a_{ij} \left(\ln \frac{a_{ij}}{\Lambda} - 1 + \sum_{m \geq 1} \frac{B_{2m}}{2m(2m-1)} \left(\frac{\epsilon_1}{a_{ij}} \right)^{2m} \right) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_n (a_i + m_n) \left(\ln \frac{a_i + m_n}{\Lambda} - 1 + \sum_{m \geq 1} \frac{B_{2m}(2^{-2m+1} - 1)}{2m(2m-1)} \left(\frac{\epsilon_1}{a_i + m_n} \right)^{2m} \right). \end{aligned} \quad (1.26)$$

²Мы используем определение масс, отличающееся на $-\frac{\epsilon_1}{2}$.

Для наших целей нам понадобится только одноинстантонная часть Некрасовского препотенциала:

$$\mathcal{F}_{1-inst}^{Nek} = \frac{\Lambda^{2N_c - N_f}}{2} \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\prod_{f=1}^{N_f} (\lambda_i + m_f + \frac{\epsilon_1}{2})}{\prod_{j \neq i} \lambda_{ij} (\lambda_{ij} + \epsilon_1)}. \quad (1.27)$$

1.3 Проверка до порядка \hbar^2

1.3.1 Нулевое число инстантонов

A-периоды не получают квантовых поправок в этом случае:

$$\Pi_{A_k}^{\hbar} = \Pi_{A_k}^0 = \lambda_k. \quad (1.28)$$

Утверждение, которое мы хотим проверить заключается в следующем:

$$\hat{O} \Pi_{B_k}^0 (\Pi_A^0) \stackrel{?}{=} \Pi_{B_k}^{\hbar} (\hat{O} \Pi_A^0), \quad (1.29)$$

где

$$\Pi_{B_k}^0 = -\frac{1}{4} \frac{\partial \mathcal{F}_{SW}}{\partial a_k}, \quad \Pi_{B_k}^{\hbar} = -\frac{1}{4} \frac{\partial \mathcal{F}_{Nek}}{\partial a_k}. \quad (1.30)$$

Удобно переписать дифференциальные операторы D_i, \tilde{D}_i через λ_i и m_n :

$$D_i = -\sum_{m=1}^{N_c} \frac{K^{(i)}(\lambda_m)}{K'(\lambda_m)} \frac{\partial}{\partial \lambda_m}, \quad \tilde{D}_i = \sum_{n=1}^{N_f} \frac{\tilde{K}^{(i)}(-m_n)}{\tilde{K}'(-m_n)} \frac{\partial}{\partial m_n}, \quad (1.31)$$

где $\tilde{K} = K_+ K_-$.

Тогда в порядке \hbar^2 (либо ϵ_1^2) имеем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \frac{\partial \mathcal{F}_{pert}}{\partial a_i} &= \sum_{j \neq i} \left[a_{ij} \left(\ln \frac{a_{ij}}{\Lambda} - 1 \right) + \frac{1}{12} \frac{\epsilon_1^2}{a_{ij}} \right] - \\ &- \frac{1}{2} \sum_n \left[(a_i + m_n) \left(\ln \frac{a_i + m_n}{\Lambda} - 1 \right) - \frac{1}{24} \frac{\epsilon_1^2}{a_i + m_n} \right] + o(\epsilon_1^2), \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\Pi_{B_i}^0(\Pi_A^0) = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} \left(\ln \frac{\lambda_{ij}}{\Lambda} - 1 \right) - \frac{1}{2} \sum_n (\lambda_i + m_n) \left(\ln \frac{\lambda_i + m_n}{\Lambda} - 1 \right). \quad (1.33)$$

Действуя \hat{O} на (1.33) и используя тождества

$$\tilde{D}_0 \ln \Lambda = \frac{1}{N_c - \frac{N_f}{2}}, \quad (1.34)$$

$$D_2 \lambda_i = -2 \sum_{k \neq i} \frac{1}{\lambda_{ik}}, \quad (1.35)$$

$$\tilde{D}_2 m_n = -2 \sum_{m \neq n} \frac{1}{m_n - m_m}, \quad (1.36)$$

$$\tilde{D}_1 m_n = 1, \quad (1.37)$$

$$\sum_n \sum_{m \neq n} \frac{1}{m_n - m_m} = 0 \quad (1.38)$$

получаем

$$\begin{aligned} \hat{O} \Pi_{B_i}^0(\Pi_A^0) &= \Pi_{B_i}^0(\Pi_A^0) - \frac{(-i\hbar)^2}{24} \left(D_2 \tilde{D}_0 + \tilde{D}_2 \tilde{D}_0 - \tilde{D}_1 \tilde{D}_1 \right) \Pi_{B_i}^0(\Pi_A^0) = \\ &= p_0 + \frac{\epsilon_1^2}{24} \left[(D_2 + \tilde{D}_2) \left(-\frac{1}{N_c - N_f/2} \right) \left(\sum_{j \neq i} \lambda_{ij} - \frac{1}{2} \sum_n (\lambda_i + m_n) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{D}_1 \left(-\frac{1}{2} \sum_n \ln \frac{\lambda_i + m_n}{\Lambda} \right) \right] = \\ &= p_0 + \frac{\epsilon_1^2}{24} \left[(D_2 + \tilde{D}_2) \left(-\lambda_i + \frac{1}{2N_c - N_f} \left(\sum_n m_n + \sum_j \lambda_j \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_n \frac{1}{\lambda_i + m_n} \right] = p_0 + \frac{\epsilon_1^2}{24} \left(\sum_{j \neq i} \frac{2}{\lambda_{ij}} + \frac{1}{2} \sum_n \frac{1}{\lambda_i + m_n} \right) + O(\epsilon_1^4), \quad (1.39) \end{aligned}$$

что находится в согласии с (1.32). Таким образом мы проверили гипотезу для произвольных N_c и N_f до порядка $\hbar^2 \ln \Lambda$.

1.3.2 Одно-инстантонное приближение

Общее утверждение гипотезы

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}_{Nek}}{\partial a_i} \right|_{a_i = \hat{\mathcal{O}} \Pi_{A_i}^0(\lambda, m, \Lambda)} \stackrel{?}{=} \hat{\mathcal{O}} \left. \frac{\partial \mathcal{F}_{SW}}{\partial a_i} \right|_{a_i = \Pi_{A_i}^0(\lambda, m, \Lambda)} \quad (1.40)$$

в порядке $\hbar^2 \Lambda^{2N_c - N_f}$ сводится к

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}_{1-inst}^{Nek''}}{\partial \lambda_i} + \sum_{j=1}^{N_c} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_{pert}^{Nek''}}{\partial \lambda_j \partial \lambda_i} \delta \lambda_j &\stackrel{?}{=} \\ &\stackrel{?}{=} \sum_{j=1}^{N_c} \left[\hat{\mathcal{O}}_2 \left(\delta \lambda_j \frac{\partial^2 \mathcal{F}_{pert}^{SW}}{\partial \lambda_j \partial \lambda_i} \right) - \delta \lambda_j \hat{\mathcal{O}}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{F}_{pert}^{SW}}{\partial \lambda_j \partial \lambda_i} \right] + \hat{\mathcal{O}}_2 \frac{\partial \mathcal{F}_{1-inst}^{SW}}{\partial \lambda_i}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Здесь $\hat{\mathcal{O}}_2 = -\frac{1}{24} (D_2 \tilde{D}_0 + \tilde{D}_2 \tilde{D}_0 - \tilde{D}_1 \tilde{D}_1)$, $\delta \lambda$ есть 1-инстантонная поправка к классическим А-периодам (1.24) а штрих означает производную по \hbar в $\hbar = 0$. Мы провели компьютерную проверку этого утверждения для 1-инстантонной части препотенциала до порядка \hbar^2 для низших N_c и N_f :

- $N_c = 2$ для $N_f = 1, 2, 3$,
- $N_c = 3$ для $N_f = 1, 2, 3$,
- $N_c = 4$ для $N_f = 1, 2$.

В качестве примера приведем формулы для случая $N_c = 2, N_f = 2$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}_{1-inst}^{Nek''}}{\partial \lambda_1} = -\frac{\Lambda^2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)^5} (8 m_1 m_2 + 3 m_1 \lambda_1 + 5 m_1 \lambda_2 + 4 \lambda_1 \lambda_2 + 3 m_2 \lambda_1 + \lambda_1^2 + \\ + 5 m_2 \lambda_2 + 3 \lambda_2^2) \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 \mathcal{F}_{pert}^{Nek''}}{\partial \lambda_j \partial \lambda_1} \delta \lambda_j &= \frac{\Lambda^2}{4} \left(\frac{1}{3 (\lambda_1 - \lambda_2)^2} + \frac{1}{12 (\lambda_1 + m_1)^2} + \frac{1}{12 (\lambda_1 + m_2)^2} \right) \times \\
&\times \left(\frac{\lambda_1 + m_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} + \frac{\lambda_1 + m_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} - 2 \frac{(\lambda_1 + m_1)(\lambda_1 + m_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^3} \right) - \\
&- \frac{1}{12} \frac{\Lambda^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \left(\frac{\lambda_2 + m_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} + \frac{\lambda_2 + m_1}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} - 2 \frac{(\lambda_2 + m_1)(\lambda_2 + m_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1)^3} \right)
\end{aligned} \tag{1.43}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^2 \left[\hat{\mathcal{O}}_2 \left(\delta \lambda_j \frac{\partial^2 \mathcal{F}_{pert}^{SW}}{\partial \lambda_j \partial \lambda_i} \right) - \delta \lambda_j \hat{\mathcal{O}}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{F}_{pert}^{SW}}{\partial \lambda_j \partial \lambda_i} \right] = \\
&= \frac{\Lambda^2}{48 (\lambda_1 + m_2)^2 (\lambda_1 + m_1)^2 (\lambda_2 - \lambda_1)^5} (124 m_2^3 \lambda_2 \lambda_1 m_1 + 51 m_2 \lambda_2^2 m_1^2 \lambda_1 + \\
&+ 124 m_1^3 \lambda_2 \lambda_1 m_2 + 4 m_2 \lambda_2^3 m_1 \lambda_1 + 336 \lambda_1 \lambda_2 m_1^2 m_2^2 + 471 \lambda_1^2 \lambda_2 m_1^2 m_2 + \\
&+ 564 \lambda_1^3 \lambda_2 m_1 m_2 + 96 \lambda_1^2 \lambda_2^2 m_2 m_1 + 471 \lambda_1^2 \lambda_2 m_1 m_2^2 + 18 m_1^2 \lambda_2^2 \lambda_1^2 + 272 m_1^3 m_2^2 \lambda_1 + \\
&+ 210 m_1^3 \lambda_1^2 m_2 + 485 m_1^2 \lambda_1^3 m_2 + 272 m_1^2 m_2^3 \lambda_1 - m_1^3 \lambda_2^2 \lambda_1 + 2 m_1^3 \lambda_2^2 m_2 + \\
&+ 38 \lambda_1^3 \lambda_2^2 m_2 + 18 \lambda_1^2 \lambda_2^2 m_2^2 + 226 \lambda_1^4 \lambda_2 m_2 + 208 \lambda_1^3 \lambda_2 m_2^2 + 226 \lambda_1^4 \lambda_2 m_1 + \\
&+ 208 \lambda_1^3 \lambda_2 m_1^2 + 63 m_2^3 \lambda_2 \lambda_1^2 + 24 m_2^2 \lambda_2^2 m_1^2 + 64 m_2^3 \lambda_2 m_1^2 + \\
&+ 344 m_2 \lambda_1^4 m_1 + 485 m_2^2 \lambda_1^3 m_1 + 648 m_2^2 \lambda_1^2 m_1^2 + 63 m_1^3 \lambda_2 \lambda_1^2 + 64 m_1^3 \lambda_2 m_2^2 + \\
&+ 38 \lambda_1^3 \lambda_2^2 m_1 - m_2^3 \lambda_2^2 \lambda_1 + 2 m_2^3 \lambda_2^2 m_1 + 210 m_2^3 \lambda_1^2 m_1 + 6 \lambda_1^2 \lambda_2^3 m_1 + \\
&+ 4 \lambda_1 \lambda_2^3 m_1^2 + 6 m_2 \lambda_2^3 \lambda_1^2 + m_2 \lambda_2^3 m_1^2 + \\
&+ 4 m_2^2 \lambda_2^3 \lambda_1 + m_2^2 \lambda_2^3 m_1 + 16 \lambda_1^4 \lambda_2^2 + 106 m_2^2 \lambda_1^4 + 49 m_2^3 \lambda_1^3 + 106 m_1^2 \lambda_1^4 + \\
&+ 49 m_1^3 \lambda_1^3 + 84 \lambda_1^5 \lambda_2 + 66 m_2 \lambda_1^5 + 66 m_1 \lambda_1^5 + 4 \lambda_1^3 \lambda_2^3 + m_1^3 \lambda_2^3 + \\
&+ m_2^3 \lambda_2^3 + 8 \lambda_1^6 + 51 \lambda_1 \lambda_2^2 m_2^2 m_1 + 112 m_1^3 m_2^3) \tag{1.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{O}}_2 \frac{\partial \mathcal{F}_{1-inst}^{SW}}{\partial \lambda_1} &= \frac{\Lambda^2}{3 (\lambda_2 - \lambda_1)^5} (4 m_1 \lambda_2 + 2 m_1 \lambda_1 + 6 m_1 m_2 + 3 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 + \\
&+ 2 \lambda_1 \lambda_2 + 4 m_2 \lambda_2 + 2 m_2 \lambda_1) \tag{1.45}
\end{aligned}$$

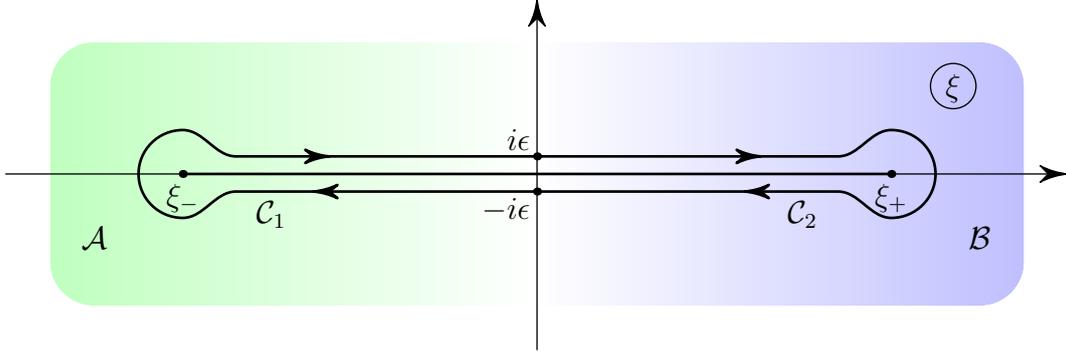


Рис. 1.1. В-контур \mathcal{C} состоящий из двух половинок \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}_2 обходящий разрез в комплексной плоскости ξ .

Суммируя можно убедиться, что уравнение (1.41) действительно выполняется.

1.4 Точная однопетлевая часть для случая $SU(2)$

В этом разделе мы воспроизводим однопетлевую часть Некрасовского препотенциала во всех порядках по \hbar . Периоды в этом случае выражаются через функции Хариш-Чандры как было замечено в [27].

1.4.1 Теория без материи

Рассмотрим сначала $SU(2)$ калибровочную теорию без материи. Уравнение Бакстера в этом случае записывается как

$$(-i\hbar\partial_\xi)^2\psi + \lambda^2\psi + \frac{\bar{\Lambda}}{2}(e^\xi + e^{-\xi})\psi = 0. \quad (1.46)$$

где $\xi = ix$. Это уравнение является уравнением Шредингера для частицы в потенциальной яме $V(\xi) = \bar{\Lambda} \operatorname{ch} \xi$ с энергией $E = -\lambda^2$ (λ подразумевается чисто мнимым с $\operatorname{Im} \lambda > 0$). В-периоды, появляющиеся в правилах квантования Бора-Зоммерфельда вычисляются по контуру \mathcal{C} окружающему точки поворота ξ_\pm (см. Рисунок 1.1).

В-период равен фазе, которую набирает частица за один период осцилляций. Эту фазу можно вычислить, зная коэффициенты при падающей и отраженной волнах в волновой функции частицы ψ :

$$\psi(\xi \rightarrow 0) = c_+ e^{\frac{\lambda}{\hbar} \xi} + c_- e^{-\frac{\lambda}{\hbar} \xi}, \quad (1.47)$$

$$\phi_1 = \frac{i}{\hbar} \int_{c_1} P(\xi) d\xi = \ln \frac{c_+}{c_-}. \quad (1.48)$$

Такая же фаза набегает на второй половине периода осцилляций:

$$\phi_2 = \frac{i}{\hbar} \int_{c_2} P(\xi) d\xi = \ln \frac{c_+}{c_-}. \quad (1.49)$$

В-периоды таким образом равны:

$$\Pi_B^{\hbar} = \int_c P(x) dx = -i \int_c P(\xi) d\xi = -i \int_{c_1} P(\xi) d\xi - i \int_{c_2} P(\xi) d\xi = -2\hbar \ln \frac{c_+}{c_-} \quad (1.50)$$

В пертурбативном пределе $\bar{\Lambda} \rightarrow 0$ точки поворота ξ_{\pm} уходят на $\pm\infty$ и частица движется свободно почти все время. Чтобы найти волновую функцию необходимо решить уравнение (1.46) в двух областях \mathcal{A} и \mathcal{B} рядом с точками поворота ξ_{\pm} .

Слева:

$$\xi \simeq \xi_- \simeq \ln \frac{\bar{\Lambda}}{2},$$

$$\tilde{\xi} = \xi - \ln \frac{\bar{\Lambda}}{2},$$

$$(-i\hbar\partial)^2 \psi_{\mathcal{A}} + \lambda^2 \psi_{\mathcal{A}} + e^{-\tilde{\xi}} \psi_{\mathcal{A}} = 0, \quad (-i\hbar\partial)^2 \psi_{\mathcal{B}} + \lambda^2 \psi_{\mathcal{B}} + e^{\tilde{\xi}} \psi_{\mathcal{B}} = 0,$$

$$\psi_{\mathcal{A}}(\tilde{\xi} \rightarrow -\infty) = 0,$$

Справа:

$$\xi \simeq \xi_+ \simeq -\ln \frac{\bar{\Lambda}}{2},$$

$$\tilde{\xi} = \xi + \ln \frac{\bar{\Lambda}}{2},$$

$$\psi_{\mathcal{B}}(\tilde{\xi} \rightarrow \infty) = 0.$$

Решения даются

Слева:

$$\psi_{\mathcal{A}} = f_0(\lambda; -\xi) \stackrel{\text{def}}{=} K_{\frac{2\lambda}{\hbar}} \left(\sqrt{\frac{\bar{\Lambda}}{2}} \frac{2e^{-\xi/2}}{\hbar} \right), \quad \psi_{\mathcal{B}} = f_0(\lambda; \xi).$$

Справа:

Асимптотики для $\xi \rightarrow 0$ равны

$$f_0(\lambda; \xi \rightarrow 0) = \frac{1}{\Gamma\left(1 - \frac{2\lambda}{\hbar}\right)} \left(\frac{\bar{\Lambda}}{2\hbar^2}\right)^{-\frac{\lambda}{\hbar}} e^{\frac{\lambda}{\hbar}\xi} - \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{2\lambda}{\hbar}\right)} \left(\frac{\bar{\Lambda}}{2\hbar^2}\right)^{\frac{\lambda}{\hbar}} e^{-\frac{\lambda}{\hbar}\xi}, \quad (1.51)$$

и, в соответствии с (1.50), B -периоды равны

$$\Pi_B^{\hbar} = -2\hbar \ln \left[- \left(\frac{\bar{\Lambda}}{2\hbar^2}\right)^{-\frac{2\lambda}{\hbar}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2\lambda}{\hbar}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{2\lambda}{\hbar}\right)} \right]. \quad (1.52)$$

С точностью до линейных по λ членов это выражение совпадает с (относительными) пертурбативными периодами найденными из Некрасовской функции (1.26):

$$\Pi_B^{\hbar} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{F}_{Nek}}{\partial a_2} - \frac{\partial \mathcal{F}_{Nek}}{\partial a_1} \right] \Bigg|_{\substack{a_1 = -\lambda \\ a_2 = \lambda}}. \quad (1.53)$$

1.4.2 Один мультиплет

Анализ в этом случае аналогичен предыдущему разделу. Уравнение записывается в виде

$$(-i\hbar\partial_\xi)^2\psi + \lambda^2\psi + \frac{\bar{\Lambda}}{2} \left(e^\xi \left(\hbar\partial_\xi + m + \frac{\hbar}{2} \right) + e^{-\xi} \right) \psi = 0. \quad (1.54)$$

В пределе $\bar{\Lambda} \rightarrow 0$ вновь решаем уравнение двух областях \mathcal{A} и \mathcal{B}

<p>Слева:</p> $\xi \simeq \xi_- \simeq \ln \frac{\bar{\Lambda}}{2},$ $\tilde{\xi} = \xi - \ln \frac{\bar{\Lambda}}{2},$ $(-i\hbar\partial)^2\psi_{\mathcal{A}} + \lambda^2\psi_{\mathcal{A}} + e^{-\tilde{\xi}}\psi_{\mathcal{A}} = 0, \quad \psi_{\mathcal{A}}(\tilde{\xi} \rightarrow -\infty) = 0,$	<p>Справа:</p> $\xi \simeq \xi_+ \simeq -\ln \frac{\bar{\Lambda}}{2},$ $\tilde{\xi} = \xi + \ln \frac{\bar{\Lambda}}{2},$ $(-i\hbar\partial)^2\psi_{\mathcal{B}} + \lambda^2\psi_{\mathcal{B}} + e^{\tilde{\xi}}(\hbar\partial + m + \frac{\hbar}{2})\psi_{\mathcal{B}} = 0, \quad \psi_{\mathcal{B}}(\tilde{\xi} \rightarrow \infty) = 0.$
--	---

(1.55)

Решения даются:

$$\psi_{\mathcal{A}} = f_0(\lambda; -\xi), \quad (1.56)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\mathcal{B}} = f_1(\lambda, m; \xi) \stackrel{\text{def}}{=} & \left(\frac{\bar{\Lambda}}{2\hbar}\right)^{\frac{\lambda}{\hbar}} e^{\frac{\lambda}{\hbar}\xi} \Phi\left(\frac{\lambda+m}{\hbar} + \frac{1}{2}, 1 + \frac{2\lambda}{\hbar}; \frac{\bar{\Lambda}}{2\hbar}e^\xi\right) - \\ & - \left(\frac{\bar{\Lambda}}{2\hbar}\right)^{-\frac{\lambda}{\hbar}} e^{-\frac{\lambda}{\hbar}\xi} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2\lambda}{\hbar}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{m-\lambda}{\hbar}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{2\lambda}{\hbar}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{m+\lambda}{\hbar}\right)} \Phi\left(\frac{m-\lambda}{\hbar} + \frac{1}{2}, 1 - \frac{2\lambda}{\hbar}; \frac{\bar{\Lambda}}{2\hbar}e^\xi\right), \end{aligned} \quad (1.57)$$

где $\Phi(a, c; z)$ вырожденная гипергеометрическая функция. Аналогично предыдущему разделу вводим коэффициенты отражения c_{\pm}^L, c_{\pm}^R как

$$\psi_{\mathcal{A}}(\xi \rightarrow 0) = c_+^L e^{\frac{\lambda}{\hbar}\xi} + c_-^L e^{-\frac{\lambda}{\hbar}\xi}, \quad (1.58)$$

$$\psi_{\mathcal{B}}(\xi \rightarrow 0) = c_+^R e^{\frac{\lambda}{\hbar}\xi} + c_-^R e^{-\frac{\lambda}{\hbar}\xi}, \quad (1.59)$$

тогда период вычисляется как

$$\Pi_B^{\hbar} = -\hbar \ln \left[\frac{c_+^L c_-^R}{c_-^L c_+^R} \right]. \quad (1.60)$$

Используя (1.56), (1.57) получаем

$$\Pi_B^{\hbar} = -\hbar \ln \left[- \left(\frac{\bar{\Lambda}}{2}\right)^{-\frac{4\lambda}{\hbar}} \hbar^{\frac{6\lambda}{\hbar}} \left(\frac{\Gamma\left(1 + \frac{2\lambda}{\hbar}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{2\lambda}{\hbar}\right)}\right)^2 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{m-\lambda}{\hbar}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{m+\lambda}{\hbar}\right)} \right]. \quad (1.61)$$

Это выражение вновь совпадает с периодами из уравнения (1.26).

1.4.3 Два мультиплета

Уравнение в этом случае таково:

$$\left(-i\hbar\partial_\xi\right)^2\psi + \lambda^2\psi + \frac{\bar{\Lambda}}{2} \left(e^\xi \left(\hbar\partial_\xi + m_1 + \frac{\hbar}{2} \right) + e^{-\xi} \left(\hbar\partial_\xi + m_2 - \frac{\hbar}{2} \right) \right) \psi = 0. \quad (1.62)$$

Решения в двух областях связаны с решением (1.57) из предыдущего раздела

$$\psi_{\mathcal{A}}(\xi) = \exp\left(-\frac{\bar{\Lambda}e^{-\xi}}{2\hbar}\right) f_1(\lambda, m_2; -\xi), \quad (1.63)$$

$$\psi_{\mathcal{B}}(\xi) = f_1(\lambda, m_1; \xi). \quad (1.64)$$

Период равен

$$\Pi_B^{\hbar} = -\hbar \ln \left[\left(\frac{\bar{\Lambda}}{2\hbar}\right)^{-\frac{4\lambda}{\hbar}} \left(\frac{\Gamma(1 + \frac{2\lambda}{\hbar})}{\Gamma(1 - \frac{2\lambda}{\hbar})}\right)^2 \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{m_1 - \lambda}{\hbar})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{m_1 + \lambda}{\hbar})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{m_2 - \lambda}{\hbar})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{m_2 + \lambda}{\hbar})} \right], \quad (1.65)$$

В согласии с (1.26).

1.4.4 Три мультиплета

Решения для этого случая даются:

$$\psi_{\mathcal{A}}(\xi) = \exp\left(-\frac{\bar{\Lambda}e^{-\xi}}{2\hbar}\right) f_1(\lambda, m_3; -\xi), \quad (1.66)$$

$$\psi_{\mathcal{B}}(\xi) = f_2(\lambda, m_1, m_2; \xi). \quad (1.67)$$

где

$$\begin{aligned} f_2(m_1, m_2, \lambda; \xi) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Gamma(1 - \frac{2\lambda}{\hbar})}{\Gamma(\frac{m_1 - \lambda}{\hbar} + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{m_2 - \lambda}{\hbar} + \frac{1}{2})} \cdot \\ &\cdot \left(\frac{\bar{\Lambda}}{2}\right)^{\frac{\lambda}{\hbar}} e^{\frac{\lambda}{\hbar}\xi} {}_2F_1\left(\frac{\lambda + m_1}{\hbar} + \frac{1}{2}, \frac{\lambda + m_2}{\hbar} + \frac{1}{2}; 1 + \frac{2\lambda}{\hbar}; \frac{\bar{\Lambda}}{2}e^{\xi}\right) - \\ &- \frac{\Gamma(1 + \frac{2\lambda}{\hbar})}{\Gamma(\frac{m_1 + \lambda}{\hbar} + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{m_2 + \lambda}{\hbar} + \frac{1}{2})} \left(\frac{\bar{\Lambda}}{2}\right)^{-\frac{\lambda}{\hbar}} e^{-\frac{\lambda}{\hbar}\xi} \times \\ &\times {}_2F_1\left(\frac{m_1 - \lambda}{\hbar} + \frac{1}{2}, \frac{m_2 - \lambda}{\hbar} + \frac{1}{2}; 1 - \frac{2\lambda}{\hbar}; \frac{\bar{\Lambda}}{2}e^{\xi}\right). \quad (1.68) \end{aligned}$$

Период равен

$$\Pi_B^{\hbar} = -\hbar \ln \left[\left(\frac{\bar{\Lambda}}{2\sqrt{\hbar}}\right)^{-\frac{4\lambda}{\hbar}} \left(\frac{\Gamma(1 + \frac{2\lambda}{\hbar})}{\Gamma(1 - \frac{2\lambda}{\hbar})}\right)^2 \cdot \prod_{f=1}^3 \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{m_f - \lambda}{\hbar})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{m_f + \lambda}{\hbar})} \right]. \quad (1.69)$$

1.4.5 Четыре мультиплета

В случае четырех мультиплетов вместо энергетического масштаба $\bar{\Lambda}$ имеется микроскопическая константа связи $q_{UV} = \exp(2\partial i\tau_{UV})$. В остальном этот случай аналогичен предыдущим:

$$\Pi_B^{\hbar} = -\hbar \ln \left[\left(\frac{q_{UV}}{2} \right)^{-\frac{4\lambda}{\hbar}} \left(\frac{\Gamma \left(1 + \frac{2\lambda}{\hbar} \right)}{\Gamma \left(1 - \frac{2\lambda}{\hbar} \right)} \right)^2 \cdot \prod_{f=1}^4 \frac{\Gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{m_f - \lambda}{\hbar} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{m_f + \lambda}{\hbar} \right)} \right]. \quad (1.70)$$

1.5 Заключение

Мы продемонстрировали, что Некрасовский препотенциал для $SU(N)$ теории с гипермультиплетами в фундаментальном представлении может быть получен при квантовании соответствующей спектральной кривой Зайберга-Виттена. Мы проверили эту гипотезу:

- Для пертурбативной части препотенциала при произвольных N_c и N_f до порядка \hbar^3 .
- Для одноинстантонной части при $N_c = 1, 2$, $N_f = 1, 2, 3$ и $N_c = 4$, $N_f = 1, 2$ до порядка \hbar^3 .
- Для пертурбативной части препотенциала в случае $N_f = 0, 1, 2, 4$ во всех порядках по \hbar .

Таким образом мы также проверили, что уравнение Бакстера для XXX цепочки и системы Годена дают одинаковые результаты.

Глава 2

Спектральная дуальность между $SL(2)$ цепочкой Гейзенберга и четырехточечной моделью Годена

В следующих разделах мы коротко описываем рассматриваемые модели и формулируем спектральную дуальность. Некоторые комментарии даны в заключении. Детали будут приведены в следующей главе. В ней мы также опишем пуассоново отображение между двумя моделями.

2.1 Дуальность между цепочкой Гейзенберга и моделью Годена

1. $GL(2)$ XXX цепочка Гейзенберга на N узлах. В классическом случае данная система определяется спектральной кривой

$\Gamma^{\text{Heisen}}(w, x) :$

$$\text{tr } T(x) - \frac{1}{1+q} w K^+(x) - \frac{q}{1+q} w^{-1} K^-(x) = 0, \quad K^\pm(x) = \prod_{i=1}^N (x - m_i^\pm) \quad (2.1)$$

и ЗВ-дифференциалом

$$dS^{\text{Heisen}}(w, x) = x \frac{dw}{w}. \quad (2.2)$$

$T(x)$ в (2.1) — это $GL(2)$ -значная трансфер-матрица:

$$T(x) = V L_N(x) \dots L_1(x), \quad L_i(x) = x - x_i + S^i, \quad i = 1 \dots N, \\ V = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{q}{(1+q)^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

$$S^i \in \mathfrak{sl}_2 : \text{Spec}(S^i) = (K_i, -K_i), \quad m_i^\pm = x_i \pm K_i.$$

Функция

$$\mathrm{tr} T(x) = x^N + \sum_{i=1}^N x^{i-1} H_i^{\mathrm{Heisen}} \quad (2.4)$$

дает коммутирующие интегралы движения.

2. Специальная (редуцированная) \mathfrak{gl}_N система Годена на $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, q, \infty\}$. Данная система описывается спектральной кривой

$$\Gamma^{\mathrm{Gaudin}}(y, z) : \det(y - L(z)) = 0, \quad L(z) = \frac{A^0}{z} + \frac{A^1}{z-1} + \frac{A^q}{z-q} \in \mathfrak{gl}_N \quad (2.5)$$

С дополнительными условиями, включающими в себя условия редукции¹

$$\begin{aligned} A^0 + A^1 + A^q + A^\infty &= 0, \\ A^\infty \equiv \Upsilon &= \mathrm{diag}(v_1, \dots, v_N), \quad \mathrm{Spec}(A^0) = (\mu_1, \dots, \mu_N), \\ A^1 &= \xi^1 \otimes \eta^1, \quad A^q = \xi^q \otimes \eta^q, \end{aligned} \quad (2.6)$$

т.е. A^1 и A^q являются \mathfrak{gl}_N матрицами ранга 1 (такой типа конфигураций рассматривался ранее в [88, 33]). С использованием условий (2.6), спектральная кривая может быть найдена явно:

$$\begin{aligned} (\eta^1(z\gamma + \Upsilon)^{-1} \xi^1 + q\eta^q(z\gamma + \Upsilon)^{-1} \xi^q + q + 1) \prod_{i=1}^N (z\gamma + v_i) &= \\ &= z \prod_{i=1}^N (z\gamma + v_i) + z^{-1} q \prod_{i=1}^N (z\gamma - \mu_i) \end{aligned} \quad (2.7)$$

или

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^N (z\gamma + v_i) + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k^1 \xi_k^1 + q\eta_k^q \xi_k^q}{q+1} \prod_{i \neq k}^N (z\gamma + v_i) &= \\ &= \frac{z}{q+1} \prod_{i=1}^N (z\gamma + v_i) + z^{-1} \frac{q}{q+1} \prod_{i=1}^N (z\gamma - \mu_i). \end{aligned} \quad (2.8)$$

¹Необходимо также зафиксировать действие подалгебры Картана. Мы не рассматриваем такую фиксацию в данной главе, поскольку она не меняет спектральную кривую.

ЗВ-дифференциал имеет вид

$$dS^{\text{Gaudin}}(y, z) = y dz. \quad (2.9)$$

Классическая спектральная дуальность. Во-первых, заметим, что обе системы (как классические механические системы) описывают динамику $N - 1$ степеней свободы и зависят от $2N + 1$ параметра.

В самом деле, динамические переменные модели Годена (2.6) — это $A^{0,1,q,\infty}$. Фиксация функций Казимира ограничивает $A^{0,1,q,\infty}$ на косопрямленные орбиты максимальной размерности $(N^2 - N)$ в точках $z = 0, \infty$ и минимальной размерности $(2N - 2)$ в $z = 1, q$. Далее, редукция косопряженным действием группы $GL(N)$ дает следующую размерность фазового пространства:

$$2(N^2 - N) + 2(2N - 2) - 2(N^2 - 1) = 2(N - 1). \quad (2.10)$$

Число параметров равно $2N + 3$: $\{v_1, \dots, v_N, \mu_1, \dots, \mu_N, \text{tr } A^1, \text{tr } A^q, q\}$. Два из них, $(\text{tr } A^0, \text{tr } A^\infty)$ можно исключить из спектральной кривой посредством сдвига переменной y . Таким образом, число независимых параметров равно $2N + 1$.

Для цепочки Гейзенберга, изначально имеется N \mathfrak{sl}_2 -значных переменных S^i , причем функции Казимира фиксированы на каждом узле: $\frac{1}{2} \text{tr} (S^i)^2 = K_i^2$. Редукция с помощью $\text{Stab}(V(q)) \cong \text{Cartan}(GL(2))$ фиксирует две независимых переменных. Итак, для размерности фазового пространства имеем

$$3N - N - 2 = 2(N - 1). \quad (2.11)$$

Имеется $2N + 1$ параметров $\{x_1, \dots, x_N, K_1, \dots, K_N, q\}$.

Дуальность между моделями описывается следующей

Теоремой. $GL(2)$ XXX цепочка Гейзенберга с N узлами, определяемая (2.1)-(2.4), и \mathfrak{gl}_N модель Годена (2.5)-(2.9) спектрально дуальны друг другу на классическом уровне

$$\boxed{\begin{aligned} \Gamma^{\text{Gaudin}}(y, z) &= \Gamma^{\text{Heisen}}(w, x) \\ dS^{\text{Gaudin}}(y, z) &= dS^{\text{Heisen}}(w, x) \end{aligned}} \quad (2.12)$$

со следующей заменой переменных

$$z = w, \quad y = \frac{x}{w}, \quad (2.13)$$

соответствием между параметрами

$$m_i^+ = -v_i, \quad m_i^- = \mu_i, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.14)$$

и соотношением между производящими функциями Гамильтонианов:

$$\begin{aligned} \text{tr } T^{\text{Heisen}}(y) &= \\ &= \det(y + \Upsilon) \left(1 + \frac{1}{1+q} \eta^1 (y + \Upsilon)^{-1} \xi^1 + \frac{q}{1+q} \eta^q (y + \Upsilon)^{-1} \xi^q \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Это утверждение следует из сравнения (2.1) и (2.7). В частности,

$$H_N^{\text{Heisen}} = \frac{1}{1+q} \text{tr } A^1 + \frac{q}{1+q} \text{tr } A^q + \sum_{k=1}^N v_k. \quad (2.16)$$

Квантовая спектральная дуальность. Квантование спектральной кривой для XXX цепочки (2.7) с ЗВ-дифференциалом (2.2) означает, что переменную x следует заменить на оператор $\hbar w \partial_w$. В таком случае, получаем уравнение Бакстера:

$$\left(\text{tr } T(\hbar w \partial_w) - \frac{w}{1+q} K_+(\hbar w \partial_w) - \frac{q}{(1+q)w} K_-(\hbar w \partial_w) \right) \Psi^{\text{Heisen}}(w) = 0. \quad (2.17)$$

Аналогично, для спектральной кривой Годена (2.8) квантование дается заменой $y \rightarrow \hbar\partial_z$:

$$\left(\prod_{i=1}^N (z\hbar\partial_z + v_i) + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k^1 \xi_k^{1+q} \eta_k^q \xi_k^q}{q+1} \prod_{i \neq k}^N (z\hbar\partial_z + v_i) - \right. \\ \left. - \frac{z}{q+1} \prod_{i=1}^N (z\hbar\partial_z + v_i) - z^{-1} \frac{q}{q+1} \prod_{i=1}^N (z\hbar\partial_z - \mu_i) \right) \Psi^{\text{Gaudin}}(z) = 0. \quad (2.18)$$

Естественно, дифференциальные операторы в скобках в уравнениях (2.17) и (2.18) могут быть отождествлены также, как и классические спектральные кривые.

2.2 Замечания

- *Дуальность АНН.* В работе [42, 43] (смотри также [82]) авторы рассмотрели модель Годена с M отмеченными точками и матрице Лакса, определенной следующим образом:

$$L_{\text{АНН}}^G(z) = Y + \sum_{c=1}^M \frac{A^c}{z - z_c}, \quad Y = \text{diag}(y_1, \dots, y_N), \quad A^c \in \mathfrak{gl}_N. \quad (2.19)$$

Этот случай отличен от рассмотренного нами. Разница важна, поскольку $Y \neq 0$ приводит к полюсу второго порядка в точке ∞ для $L_{\text{АНН}}^G(z)dz$. Фазовое пространство также отличается. Оно представляет собой прямое произведение коприсоединенных орбит (снабженных естественной структурой Ли-Пуассона), отфакторизованное по стабилизатору Y : $\mathcal{O}^1 \times \dots \times \mathcal{O}^M // \text{Stab}(Y)$.

В случае, когда все A^c имеют ранг 1, дуальная матрица Лакса — это \mathfrak{gl}_M -значная функция с $\tilde{Y} = \text{diag}(z_1, \dots, z_M)$ и N отмеченными

точками в y_1, \dots, y_N :

$$\tilde{L}_{\text{АНН}}^{\text{G}}(z) = \tilde{Y} + \sum_{c=1}^N \frac{\tilde{A}^c}{z - y_c}, \quad \tilde{Y} = \text{diag}(z_1, \dots, z_M), \quad \tilde{A}^c \in \mathfrak{gl}_M. \quad (2.20)$$

Дуальность дает следующее соотношение между спектральными кривыми:

$$\det(\tilde{Y} - z) \det(L_{\text{АНН}}^{\text{G}}(z) - \lambda) = \det(Y - \lambda) \det(\tilde{L}_{\text{АНН}}^{\text{G}}(\lambda) - z). \quad (2.21)$$

Размерности фазовых пространств обеих моделей равны $2(N - 1)(M - 1)$, и число параметров $N + M - 1$ также совпадает.

- Иногда \mathfrak{sl}_N описание модели Годена более удобно, нежели описание \mathfrak{gl}_N . Преобразование спектральной кривой от \mathfrak{gl}_N к \mathfrak{sl}_N дается простым сдвигом:

$$y \rightarrow y' = y - \frac{1}{N} \text{tr} L(z) = y - \frac{1}{zN} \left(-\text{tr} \Upsilon + \frac{\text{tr} A^1}{z-1} + q \frac{\text{tr} A^q}{z-q} \right). \quad (2.22)$$

В этом случае замена переменных (2.13) изменяется²:

$$z = w, \quad y' = \frac{x-R(z)}{w}, \quad R(z) = \frac{1}{N} \left(-\text{tr} \Upsilon + \frac{\text{tr} A^1}{z-1} + q \frac{\text{tr} A^q}{z-q} \right). \quad (2.23)$$

Равенство волновых функций (10) приобретает дополнительный множитель:

$$\Psi^{\text{Heisen}}(z) = \Psi^{\text{Gaudin}}(z) e^{\frac{1}{N\hbar} \int^z b_h(z) dz},$$

$$b_h(z) = \frac{(1+q)}{(z-1)(z-q)} \left(H_N^{\text{Heisen}} + \frac{z \sum_{k=1}^N m_k^+}{1+q} + \frac{q \sum_{k=1}^N m_k^-}{(1+q)z} \right) - \hbar \frac{N(N-1)}{2z}. \quad (2.24)$$

²В такой форме эту замены можно найти в [34] для случая \mathfrak{sl}_2 .

- Следует отметить, что мы не налагаем никаких граничных условий, которые полностью определили бы квантовую задачу, т.е. мы не определяем волновую функцию явно. Чтобы сравнить квантовые задачи, необходимо построить Пуассоново (а затем квантовое) отображение между фазовыми пространствами (пространствами Гильберта) двух моделей. Мы опишем Пуассоново отображение в следующей главе.

Также, можно задать пространства решений изначально и затем убедиться в том, что они переходят друг в друга при преобразованиях дуальности. Такой рецепт применен в [83, 84], где авторы рассмотрели очень близкую задачу в терминах векторов Бете. Точное соответствие между двумя подходами заслуживает внимания в будущем.

- Помимо рассмотренного нами подхода к квантованию модели Годена, существует и другой, предложенный в работах [85] и [86, 87]. Мы надеемся найти связь между двумя подходами в будущих работах.
- В заключение, мы упомянем возможные обобщения соответствия, предложенного в данной главе. Во-первых, можно естественным образом рассмотреть многоточечные конформные блоки. Это дает многоточечные модели Годена. В то же время АГТ-соответствие предсказывает, что в этом случае на другой стороне дуальности имеется теория с калибровочной группой, являющейся произведением простых сомножителей. Эта последняя естественным образом описывается XXX цепочками высших рангов [46, 47]. Таким образом, ожидается соответствие между $GL(p)$ -цепочками и мно-

готовечными моделями Годена.

Другое интересное обобщение получается из пятимерного варианта АГТ [89, 90, 91, 92], который предполагает соответствие между ХХZ цепочками (смотри [93, 94]) и моделью типа Годена с релятивистской (разностной) динамикой. Последняя получается поскольку на стороне конформных блоков мы имеем в данном случае дело с конформным блоком q -Вирасоро алгебры, что в свою очередь подразумевает разностное уравнение Шредингера для конформного блока со вставкой вырожденного оператора. Обобщение на шесть измерений (эллиптические обобщения дифференциального оператора в уравнении Шредингера и ХYZ цепочка) также чрезвычайно интересны.

Как известно, \mathfrak{sl}_2 редуцированная модель Годена с рассмотренной ранее конфигурацией может быть записана в различных эллиптических формах [95, 96, 97, 98, 99, 100, 101] с q , являющимся функцией модулярного параметра. Таким образом, можно ожидать некоторой эллиптической параметризации также и для случая \mathfrak{sl}_N .

Глава 3

Спектральная дуальность между общими XXX спиновыми цепочками и системами Годена

Цель данной главы двоякая: во-первых распространить результаты Главы 2 на случай цепочек высших спинов. Мы покажем, что $GL(k)$ цепочка Гейзенберга с N дуальна специальной редуцированной системе Годена с $k + 2$ отмеченными точками и алгеброй \mathfrak{gl}_N (Теорема 2, Раздел 3.4); во-вторых мы построим явное пуассоново отображение между моделями. Для достижения второй цели мы произведем процедуру гамильтоновой редукции с помощью скобок Дирака [103, 104, 105, 106] в модели Годена и покажем, что редуцированная модель характеризуется квадратичными скобками Пуассона (Предложения 1, 2 в Разделе 3.2). Затем мы применяем преобразование дуальности АНН [42, 43] и доказываем, что квадратичная алгебра Пуассона для дуальной редуцированной модели Годена совпадает с естественной квадратичной алгеброй для спиновой цепочки (Теорема 3, Раздел 3.4). Эти результаты устанавливают точное соответствие между моделями:

$$\text{АНН}(zL^{\text{Gaudin}}(z))(x) = \frac{1}{\prod_j (x-x_j)} T^{\text{Heisen}}(x) \quad (3.1)$$

Здесь L^{Gaudin} — это матрица Лакса для модели Годена, а T^{Heisen} — трансфер-матрица спиновой цепочки Гейзенберга.

Данная глава организована следующим образом: в Разделе 3.1 мы вводим основные определения и конструкции, связанные со спектральной дуальностью в интегрируемых системах. В разделах 3.2 и 3.3 де-

тально описываются модель Годена и спиновой цепочки. В разделе 3.4 доказывается классическая спектральная дуальность и строится явное пуассоново отображение между двумя моделями. Квантовая версия дуальности описывается в разделе 3.5. В заключении мы обсуждаем некоторые открытые проблемы и поясняем связь наших результатов с ранее известными.

3.1 Спектральные дуальности и интегрируемые системы

3.1.1 Спектральные кривые и пуассоновы структуры

Рассмотрим классическую интегрируемую систему с g степенями свободы в смысле Лиувилля-Арнольда¹. Мы предполагаем, что она описывается матрицей Лакса $L(z) \in \text{Mat}(N)$ со спектральным параметром z — локальной координатой на некоторой комплексной кривой Σ . Это означает, что уравнения движения относительно любого из коммутирующих гамильтонианов $\{H_a, H_b\} = 0$, $a, b = 1 \dots g$ имеют форму Лакса:

$$\partial_{t_a} L(z) = \{H_a, L(z)\} = [L(z), M_a(z)]. \quad (3.2)$$

Уравнения Лакса можно понимать как условия совместности для *линейной задачи*:

$$\begin{cases} (L(z) - \lambda)\phi = 0, \\ (\partial_{t_a} + M_a(z))\phi = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Первое уравнение порождает *спектральную кривую* (N -кратное накрытие поверхности Σ с точками ветвления)

$$\Gamma(\lambda, z) : \det(\lambda - L(z)) = 0. \quad (3.4)$$

¹Более точно, алгебраически интегрируемую.

которая определяет гамильтонианы и константы связи² в том смысле, что $\text{tr } L^k(z)$, $1 \leq k \leq N$ является их производящими функциями. Спектральная кривая сама по себе не задает интегрируемую систему полностью. в самом деле, Γ не содержит никакой информации о пуассоновой структуре. Более того, любая матрица Лакса $L(z)$ (и, следовательно λ) определена с точностью до умножения на произвольную функцию z и интегралов движения. Таким образом, необходимы какие-то новые элементы чтобы полностью определить интегрируемую систему. Простейший способ фиксировать произвол — это ввести классическую r -матрицу [102, 109, 110, 111], которая определит скобки Пуассона между любым матричными элементами матрицы Лакса. Основными примерами r -матричных структур являются линейная

$$\{L(z) \otimes L(w)\} = [L(z) \otimes 1 + 1 \otimes L(w), r(z, w)] \quad (3.5)$$

и квадратичная

$$\{L(z) \otimes L(w)\} = [L(z) \otimes L(w), r(z, w)] \quad (3.6)$$

скобки. Каждая из этих структур гарантирует инволюцию $\{H_a, H_b\} = 0$ коэффициентов разложения $\text{tr } L^k(z)$.

Общая конструкция, предложенная (см. [112], [113]), дает, хотя бы в принципе, решения интегрируемой модели в терминах тэта-функций на многообразии Якоби $\text{Jac}(\Gamma)$ — лиувиллев тор интегрируемой системы³. Эта конструкция конечно предполагает некоторый выбор пуассоновой (или симплектической) структуры и координат Дарбу на $\text{Jac}(\Gamma)$. В действительности, в работах [112, 113, 102, 78, 48] канонические переменные

²Константы связи — это функции Казимира соответствующих скобок Пуассона, заданных классической r -матричной структурой.

³В конкретных случаях может потребоваться дополнительная факторизация, для того чтобы получить $\text{genus}(\Gamma) = g$.

в соответствии с алгоритмом *разделения переменных* [114, 115, 116, 117, 118, 119]. Этот алгоритм дает набор переменных со скобками Пуассона, равными

$$\{\lambda_a, z_b\} = p_a(\lambda_a, z_a)\delta_{ab}, \quad \{\lambda_a, \lambda_b\} = \{z_a, z_b\} = 0, \quad a, b = 1 \dots g, \quad (3.7)$$

где p_a - некоторые функции. Каждая пара переменных $(\lambda_a = \lambda(z_a), z_a)$ лежит на спектральной кривой, т.е.

$$\Gamma(\lambda_a, z_a) = 0, \quad a, b = 1 \dots g. \quad (3.8)$$

Замечание: (3.8) можно рассматривать как “разделенные уравнения”, которые возникают в методе разделения переменных, если рассмотреть производящую функцию канонической замены переменных в виде $\mathcal{S} = \sum_{\alpha=1}^g \mathcal{S}_\alpha(z_\alpha, c_1, \dots, c_g)$, где c_α — заданные значения гамильтонианов H_α , которые соответствуют конкретной данной точке в пространстве модулей (спектральных) кривых. Уравнения (3.8) эквивалентны уравнениям $\lambda_\alpha = \frac{\partial \mathcal{S}_\alpha}{\partial z_\alpha}$. Согласно определению Лиувилля-Арнольда, интегрируемая модель является лагранжевым расслоением, база которого — множество значений первых интегралов H_α , а слои изоморфны $\text{Jac}(\Gamma)$. Существование разделенных переменных означает, что лагранжево подмногообразие может быть глобально представлено как произведение g копий $\Gamma \times \dots \times \Gamma$ спектральной кривой. Алгоритм [114, 115, 116, 117, 118, 119] дает конкретный набор разделенных переменных. Эти переменные — полюса “правильно нормированной” функции Бейкера-Ахиезера ϕ (3.3), а дуальные переменные (в случае простейшей нормировки) — соответствующие собственные значения λ_α для (3.5), либо $\log \lambda_\alpha$ для (3.6). Например, в случае \mathfrak{sl}_2 переменные определяются как нули $L_{12}(z)$, а дуальные переменные — как значения $L_{11}(z_\alpha)$.

Таким образом, спектральная кривая записывается с помощью разделенных переменных. На кривой Γ существует производящий дифференциал dS (типа « $p dq$ ») который дает переменные действия:

$$\begin{aligned} a_i &= \oint_{A_i} dS, \\ \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{SW}}}{\partial a_i} &= \oint_{B_i} dS, \quad i = 1, \dots, g. \end{aligned} \quad (3.9)$$

где A_i — это A -периоды кривой Γ . Этот дифференциал (который в некоторых случаях записывается просто как λdz) естественно возникает в контексте теории Зайберга-Виттена [1, 2], и называется *дифференциалом Зайберга-Виттена*. Выбирая определенный дифференциал dS , мы фиксируем функции p_a в уравнении (3.7). Например, если $dS = \lambda dz$, то $p_a = 1$. Пуассонова структура (3.7) может быть также представлена как голоморфная симплектическая форма [78, 48]:

$$\omega = \delta(dS), \quad (3.10)$$

где δ обозначает внешний дифференциал на тотальном пространстве расслоения спектральных кривых и дивизоров $[z_1, \dots, z_g]$.

Уравнения Лакса (3.2) инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$L(z) \rightarrow g(z)L(z)g^{-1}(z), \quad M_a(z) \rightarrow g(z)M_a(z)g^{-1}(z) + \partial_{t_a}g(z)g^{-1}(z). \quad (3.11)$$

Соответствующая r -матрица при этом, естественно, меняется, в то время как дифференциал Зайберга-Виттена остается инвариантным.

Принимая во внимание все вышесказанное, мы приходим к выводу, что существует два способа определить пуассонову структуру интегрируемой модели. Первый (калибровочно-инвариантный) дается выбором

дифференциала Зайберга-Виттена, второй (зависящий от калибровки) заключается в выборе r -матричной структуры. Связь между двумя подходами описывается алгоритмом разделения переменных [114] либо, эквивалентным образом, соответствующими симплектическими формами [78, 48].

В действительности, мы имеем дело со специальным (хотя и широким) классом матриц Лакса, которые имеют только простые полюса в некоторых точках на Σ . Калибровочные преобразования могут изменять вычеты в полюсах, или производить новые полюса. В этом случае они связывают различные фазовые пространства с различными пуассоновыми (и r -матричными) структурами [120, 121, 122].

Проиллюстрируем конструкцию теории Зайберга-Виттена, которая будет интересовать нас в данной главе. Это $SU(N)$ калибровочная теория с $N_f = 2N$ гипермультиплетами материи в фундаментальном представлении. Соответствующая классическая интегрируемая система — это $GL(2)$ XXX цепочка Гейзенберга с N узлами [77, 46, 47], ее спектральная кривая записывается в виде:

$$\Gamma^{\text{Heisen}} : P(x) - \frac{w}{1+q} K_+(x) - \frac{q}{(1+q)w} K_-(x) = 0, \quad (3.12)$$

где

$$P(x) = \prod_{k=1}^N (x - \phi_k), \quad K_{\pm} = \prod_{k=1}^N (x - m_k^{\pm}). \quad (3.13)$$

Дифференциал Зайберга-Виттена дается формулой

$$dS = \frac{x dw}{w}. \quad (3.14)$$

Параметры ϕ_k — (диагональные) вакуумные средние значения скалярного поля в присоединенном представлении, которое принадлежит к $\mathcal{N} = 2$

векторному мультиплету (при этом $\sum_k \phi_k = 0$), m_k^\pm — массы гипермультиплетов. Эффективный низкоэнергетический препотенциал \mathcal{F}_{SW} может быть найден из интегралов по A и B периодам римановой поверхности, задаваемой Γ^{Heisen} :

$$a_i = \oint_{A_i} \frac{x dw}{w}, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\text{SW}}}{\partial a_i} = \oint_{B_i} \frac{x dw}{w}. \quad (3.16)$$

Замечание: Дифференциал Зайберга-Виттена также можно выбрать в виде $dS = -\log(w)dx$. Этот дифференциал дает тот же ответ, что и (3.14) для интегралов (3.9), поскольку оба дифференциала лежат в одном и том же классе когомологий $H^1(\Gamma, \mathbb{C})$.

3.1.2 Квантование

Имеются два естественных способа квантования интегрируемой модели. можно проквантовать либо r -матричную структуру или структуру скобок Пуассона в разделенных переменных (3.7), соответствующих данному дифференциалу Зайберга-Виттена. Мы начнем со второго пути.

Рассматривая дифференциал Зайберга-Виттена как симплектическую 1-форму [78, 48] на \mathbb{C}^2 -плоскости (y, z) можно получить пару канонических переменных $(p(y, z), q(z))$, которые приводят этот дифференциал к виду $dS(y, z) = pdq$. Тогда существует естественное квантование спектральной кривой, определяемое правилом $(p, q) \rightarrow (\hbar\partial_q, q)$. Таким образом, квантование следует из вида дифференциала Зайберга-Виттена:

$$dS = \tilde{\lambda}d\tilde{z}: (\tilde{\lambda}, \tilde{z}) \xrightarrow{\text{Quant}} (-i\hbar\partial_{\tilde{z}}, \tilde{z}). \quad (3.17)$$

при некотором выборе упорядочения операторов. Например из (3.14) мы имеем:

$$\Gamma(w, x) = 0 \xrightarrow{\text{Quant}} \hat{\Gamma} = \Gamma(w, \hbar w \partial_w) \psi = 0. \quad (3.18)$$

Волновые функции могут быть записаны с помощью квантовых деформаций дифференциала Зайберга-Виттена на спектральной кривой, т.е. $\Psi(z) = \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int^q dS(\hbar)\right)$, где $dS(\hbar) = p(q, \hbar) dq$ и $p(q, 0) = p(q)|_{\Gamma}$. Монодромии волновой функции вокруг A - и B -циклов кривой Γ даются квантовой деформацией переменных типа действия [7, 8]:

$$\Psi(z + A_i) = \exp\left(-\frac{1}{\hbar} a_i^{\hbar}\right) \Psi(z), \quad a_i^{\hbar} = \oint_{A_i} dS(\hbar), \quad (3.19)$$

$$\Psi(z + B_i) = \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{NS}}}{\partial a_i^{\hbar}}\right) \Psi(z), \quad \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{NS}}}{\partial a_i^{\hbar}} = \oint_{B_i} dS(\hbar),$$

где \mathcal{F}_{NS} — предел Некрасова-Шаташвили [6, 49] интеграла ЛМНС [50, 51, 52, 53]. Следует отметить, что мы не накладываем на волновую функцию никаких граничных условий, которые определяют явно спектр квантовой системы.

Дифференциальное уравнение в правой части уравнения (3.18) — это *уравнение Бакстера* [54]. Можно также выбрать другое квантование. Например, $(w, x) \rightarrow (e^{-\hbar \partial_x}, x)$, т.е. w в этом случае переходит в оператор сдвига. Тогда уравнение Бакстера запишется в разностной (Фурье-дуальной) форме. С точки зрения (3.17) этот случай соответствует $dS = i \log(w) dx$. Однако, этот дифференциал дает тот же ответ, что и дифференциал (3.14) для интегралов (3.9), поскольку оба дифференциала соответствуют одному и тому же представителю класса когомологий $H^1(\Gamma, \mathbb{C})$.

Изначально уравнение Бакстера возникло в квантовом методе об-

ратной задачи рассеяния [123, 124, 125, 126, 127]. Этот метод позволяет проквантовать фазовое пространство и соответствующую пуассонову структуру (3.5)–(3.6) с помощью соотношений

$$\begin{aligned}\hat{L}_1^{\hbar}(z)\hat{L}_2^{\hbar}(w)R_{12}^{\hbar}(z,w) &= R_{12}^{\hbar}(z,w)\hat{L}_2^{\hbar}(w)\hat{L}_1^{\hbar}(z), \\ R_{12}^{\hbar}(z,w) &= 1 \otimes 1 + \hbar r(z,w) + O(\hbar^2)\end{aligned}\tag{3.20}$$

где $L_1 = L \otimes 1$, $L_2 = 1 \otimes L$. Дальнейшее развитие квантового метода обратной задачи рассеяния требует выбора условий квантования — *уравнений Бете*. В нашем подходе мы имеем дело с точными квазиклассическими уравнениями и не обсуждаем уравнения типа Бете, поскольку не занимаемся поиском конкретных решений.

Помимо подхода, рассматриваемого здесь, квантование модели Годена известно из работ [128] и [86, 87]. В работе [86, 87] был предложен метод вычисления $\det(\partial_z + \hat{L}(z))$ как производящей функции коммутирующих квантовых гамильтонианов. Однако, этот метод основан на линейных коммутационных соотношениях в соответствующей алгебре Ли. В нашем случае (как будет описано ниже) мы имеем дело с *редуцированной* моделью Годена, описываемой квадратичными скобками. Таким образом, метод, предложенный [86, 87] неприменим к нашему случаю (во всяком случае, в его изначальной форме). В этой главе мы используем рецепт (3.17), который дает уравнение Бакстера, т.е. естественное квантование спектральной кривой, основанное на методе разделенных переменных.

3.1.3 Биспектральная задача и p - q дуальность

Понятие биспектральных операторов возникло в работах Ф.А. Грюнбаума [129, 130] и Ж.Ж. Дуйстермаата [131]. Дж. Вилсон определил

их как операторы, фигурирующие в *биспектральной задаче* [45]: найти для каких линейных обыкновенных дифференциальных операторов $\hat{L} = \sum_{j=0}^l L_j(z) \partial_z^j$ имеется ненулевое семейство собственных функций $\Psi(z, \lambda)$, гладко зависящих от спектрального параметра z , которые также являются собственными функциями дифференциального оператора $\hat{T} = \sum_{r=0}^m T_r(\lambda) \partial_\lambda^r$ с собственным значением $g(z)$:

$$\begin{aligned}\hat{L}(z, \partial_z) \Psi(z, \lambda) &= f(\lambda) \Psi(z, \lambda), \\ \hat{C}(\lambda, \partial_\lambda) \Psi(z, \lambda) &= g(z) \Psi(z, \lambda)\end{aligned}\tag{3.21}$$

Выяснилось, что для оператора Шредингера $\hat{L} = \partial_z^2 + V(z)$ простейшее решение биспектральной задачи дается функциями Бесселя при $V(z) = \frac{1}{z^2}$ и Эйри при $V(z) = z$ [131]. Более сложные решения можно получить, применяя рациональные преобразования Дарбу. Они удовлетворяют уравнению КдВ [132]. Затем, когда была установлена связь с системами типа Калоджеро [133, 134], стало ясно, что биспектральная задача тесно связана с теорией интегрируемы систем [135, 136, 137, 138, 139, 140]. Биспектральная задача напоминает квантовую версию *p-q дуальности* [141, 142, 143, 144, 145, 146, 147], в то время как цель данной главы несколько другая. В самом деле, *p-q дуальность* переводит координаты системы в переменные действия дуальной модели, в то время как спектральная дуальность меняет местами координаты и импульсы в разделенных переменных. Можно ожидать некоторой связи между двумя сортами дуальностей, поскольку разделение переменных (3.7) по сути напоминает поиск переменных типа действие-угол. В самом деле, после разделения переменных, отображение в переменные действие-угол выглядит просто, поскольку его можно проделать отдельно для каждой степени свободы.

В то же время, p - q дуальность сильно отличается от спектральной. Вместо цепочки Тоды в случае спектральной дуальности (этот пример разобран ниже), для p - q дуальности самодуальной моделью является рациональная система Калоджеро-Мозера (а также гипотетическая дважды эллиптическая система [141, 142, 143]). Более того, из теоретико-групповой интерпретации p - q дуальности следует, что дуальные модели имеют представления матрицами Лакса одинакового размера, в то время как в случае спектральной дуальности, они, вообще говоря, различаются (например, 2×2 и $N \times N$).

3.1.4 Спектральная дуальность

Дуальность, которую мы изучаем генерируется *биспектральной инволюцией* [45], которая является просто заменой аргументов функции

$$b_{\text{Wilson}} : \Gamma(\lambda, z) \rightarrow \Gamma(z, \lambda) \quad (3.22)$$

соответствующей некоторой спектральной задаче.

Определение 1 Пусть две (алгебраически) интегрируемые системы описываются спектральными кривыми $\Gamma(\lambda, z) = 0$, $\Gamma'(\lambda', z') = 0$ и соответствующими дифференциалами Зайберга-Виттена $dS(\lambda, z)$, $dS'(\lambda', z')$. Тогда системы называются спектрально дуальными на классическом уровне, если существует замена переменных

$$\lambda' = \lambda'(\lambda, z), \quad z' = z'(\lambda, z),$$

такая, что

$$\Gamma(\lambda, z) = b_{\text{Wilson}}[\Gamma'](\lambda'(\lambda, z), z'(\lambda, z)) = \Gamma'(z'(\lambda, z), \lambda'(\lambda, z)), \quad (3.23)$$

и

$$dS(\lambda, z) \cong dS(\lambda'(\lambda, z), z'(\lambda, z)), \quad (3.24)$$

где \cong служит напоминанием о том, что дифференциал Зайберга-Виттена интегрируемой системы определен с точностью до полного дифференциала на спектральной кривой.

Приведем широко известный

Пример [102]: Периодическая цепочка Тоды может быть описана как с помощью матрицы Лакса со значениями в $\mathfrak{gl}(N)$

$$L_{N \times N}^{Toda}(z) = \begin{pmatrix} p_1 & e^{\frac{1}{2}(q_2 - q_1)} & 0 & & ze^{\frac{1}{2}(q_1 - q_N)} \\ e^{\frac{1}{2}(q_2 - q_1)} & p_2 & e^{\frac{1}{2}(q_3 - q_2)} & \dots & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}(q_3 - q_2)} & p_3 & & 0 \\ & & \dots & & \\ \frac{1}{z}e^{\frac{1}{2}(q_1 - q_N)} & 0 & 0 & & p_N \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

и трансфер матрицы, принимающей значения в $GL(2)$

$$T_{2 \times 2}^{Toda}(\lambda) = L_N(\lambda) \dots L_1(\lambda), \quad L_i(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - p_i & e^{q_i} \\ -e^{-q_i} & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.26)$$

Спектральные кривые, определенные этими соотношениями, оказываются связаны биспектральной инволюцией, т.е.

$$\det(\lambda - L(z)) = 0 \quad \text{и} \quad \det(z - T(\lambda)) = 0 \quad (3.27)$$

совпадают. Дифференциал Зайберга-Виттена одинаков в обоих случаях $dS = \lambda \frac{dz}{z}$. Таким образом, периодическая цепочка Тоды является самодуальной моделью.

В квантовом случае мы используем схему квантования (3.9) с некоторым выбором упорядочения операторов.

Определение 2 Две интегрируемые системы называются спектрально дуальными на квантовом уровне, если их уравнения Бакстера

$$\hat{\Gamma}\Psi = 0 \quad \text{и} \quad \hat{\Gamma}'\Psi' = 0 \quad (3.28)$$

совпадают.

В данной главе мы докажем, что спектрально дуальной для специальной редуцированной $\mathfrak{gl}(N)$ модели Годена является XXX цепочка Гейзенберга как на классическом, так и на квантовом уровне. Более того, мы также запишем явно отображение Пуассона между двумя моделями.

Замечание: на классическом уровне совпадение спектральных кривых было упомянуто в работе [34] для $N = 2$. Для произвольного N общий вид спектральной кривой для модели Годена был получен в работе [33]. В квантовом случае уравнение Бакстера было выведено в работе [26].

3.2 Модель Годена

Пусть z — локальная координата на \mathbb{CP}^1 . Матрица Лакса имеет вид \mathfrak{gl}_N -значной функции $L^G(z)$ на $\mathbb{CP}^1 \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ с простыми полюсами в точках $\{z_1, \dots, z_n\}$ и заданными вычетами $\text{Res}_{z_c} L(z) = A^c \in \mathfrak{gl}_N^*$:

$$L^G(z) = \sum_{c=1}^n \frac{A^c}{z - z_c} \quad (3.29)$$

Спектральная кривая дается уравнением

$$\tilde{\Gamma}^{\text{Gaudin}}(\tilde{y}, z) : \det(\tilde{y} - L^G(z)) = 0. \quad (3.30)$$

3.2.1 Нередуцированная модель Годена

Фазовое пространство модели Годена [37, 38] является прямым произведением орбит коприсоединенного действия GL_N :

$$\tilde{\mathfrak{M}}^{\text{Gaudin}} = \mathcal{O}_1 \times \dots \times \mathcal{O}_n, \quad (3.31)$$

$$\dim \tilde{\mathfrak{M}}^{\text{Gaudin}} = \sum_{c=1}^n \dim \mathcal{O}_c.$$

Фазовое пространство наделено структурой скобок Ли-Пуассона:

$$\{A_{ij}^b, A_{kl}^c\} = \delta^{bc} (A_{kj}^c \delta_{il} - A_{il}^c \delta_{kj}) , \quad b, c = 1, \dots, n , \quad (3.32)$$

которые также задаются линейной r -матричной структурой:

$$\{L^G(z) \otimes L^G(w)\} = [L^G(z) \otimes 1 + 1 \otimes L^G(w), r(z, w)], \quad (3.33)$$

$$r(z, w) = \frac{1}{z-w} \sum_{i,j=1}^N E_{ij} \otimes E_{ji}.$$

Орбиты реализуются с помощью фиксации функций Казимира или собственных значений матрицы $\{A^c\}$, например

$$A^c = g A_0^c g^{-1} , \quad g \in \text{GL}_N , \quad A_0^c = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathfrak{gl}_N^* . \quad (3.34)$$

Спектр A_0^c определяет размерность орбиты \mathcal{O}_c . Например, в общем случае (когда λ_i произвольны)

$$\dim \mathcal{O}^{\max} = N(N-1). \quad (3.35)$$

В случае, когда $N-1$ собственных значений совпадают

$$\dim \mathcal{O}^{\min} = 2(N-1). \quad (3.36)$$

Эту последнюю орбиту можно параметризовать «колчанными» переменными [148, 149, 150], т.е. вектором (столбцом) ξ и ковектором (строкой) η^T :

$$A = \xi \otimes \eta^T , \quad A_{ij} = \xi_i \eta_j , \quad \{\xi_i, \eta_j\} = \delta_{ij} \quad (3.37)$$

Симметрия

$$\xi \rightarrow a\xi , \quad \eta \rightarrow \frac{1}{a}\eta \quad (3.38)$$

дает «закон сохранения» $\sum_{i=1}^N \eta_i \xi_i = \text{tr } A = N\lambda = \text{const}$. Фиксируя калибровку с помощью условия $\eta_N = 1$, получаем $\xi_N = N\lambda - \sum_{i=1}^{N-1} \eta_i \xi_i$. После такой редукции скобка Пуассона между $\xi_i, \eta_j, i, j = 1 \dots N-1$ остается канонической.

3.2.2 Конкретизация модели

Можно произвести редукцию пространства $\tilde{\mathfrak{M}}^{Gaudin}$ (3.31) по коприсоединенному действию группы $GL(N)$, действующей следующим образом:

$$L^{Gaudin} \rightarrow gL^{Gaudin}g^{-1} : A^c \rightarrow gA^c g^{-1}, \quad \forall c, \quad g \in GL(N). \quad (3.39)$$

Это дает связь первого рода

$$\sum_{c=1}^n A^c = 0, \quad (3.40)$$

которую необходимо дополнить некоторым условием фиксации калибровки χ . Редуцированное фазовое пространство получается после гамильтоновой редукции

$$\mathfrak{M}^{Gaudin} = \mathcal{O}_1 \times \dots \times \mathcal{O}_n // \text{Ad}_{GL(N)}. \quad (3.41)$$

Поскольку $\dim \text{Ad}_{GL(N)} = N^2 - 1$, получаем

$$\dim \mathfrak{M}^{Gaudin} = \sum_{c=1}^n \dim \mathcal{O}_c - 2(N^2 - 1). \quad (3.42)$$

Дифференциал Зайберга-Виттена определяется как

$$dS^{Gaudin} = \tilde{y}dz \quad (3.43)$$

Данная редуцированная модель — основной предмет данной главы. Начнем с примера, описанного в предыдущей главе [72].

Модель Годена $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, q, \infty\}$.

Рассмотрим случай четырех отмеченных точек $0, 1, q, \infty$ ⁴ и пусть A^0 и A^∞ — орбиты максимальной размерности (3.34), (3.35), а A^1 и A^q — минимальной размерности (3.36)–(3.37), т.е.

$$A_{ij}^1 = \xi_i^1 \eta_j^1, \quad \{\xi_i^1, \eta_j^1\} = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N-1, \quad (3.44)$$

$$\eta_N^1 = 1, \quad \xi_N^1 = c_1 - \sum_{i=1}^{N-1} \eta_i^1 \xi_i^1, \quad c_1 = \text{tr } A^1$$

и

$$A_{ij}^q = \xi_i^q \eta_j^q, \quad \{\xi_i^q, \eta_j^q\} = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N-1, \quad (3.45)$$

$$\eta_N^q = 1, \quad \xi_N^q = c_q - \sum_{i=1}^{N-1} \eta_i^q \xi_i^q, \quad c_q = \text{tr } A^q$$

Редукция по $\text{Ad}_{GL(N)}$ приводит к уравнению (3.40):

$$\varrho = A^0 + A^1 + A^q + A^\infty = 0 \quad (3.46)$$

с фиксированной калибровкой. Процедуру редукции можно произвести в два этапа, которые действуют на недиагональные и диагональные части отображения моментов (3.46) соответственно.

Первый этап редукции:

$$\begin{aligned} \text{non-diag}(\varrho) &= \text{non-diag}(A^0 + A^1 + A^q + A^\infty) = 0, \\ \chi &= \text{non-diag}(A^\infty) = 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

i.e.

$$A^\infty = \Upsilon \equiv \text{diag}(v_1, \dots, v_N). \quad (3.48)$$

⁴ $SL(2)$ действует на \mathbb{CP}^1 дробно-линейными преобразованиями, что позволяет перевести любые заданные три точки в точки с координатами $0, 1, \infty$.

Второй этап редукции использует оставшуюся часть калибровочной группы, которая равна $\text{Stab}(\Upsilon) \simeq \mathfrak{H}$, подгруппа Картана группы $GL(N)$:

$$\begin{aligned} \text{diag}(\varrho) &= \text{diag}(A^0 + A^1 + A^q + A^\infty) = 0, \\ \chi_{\mathfrak{H}} &= 0, \end{aligned} \tag{3.49}$$

где $\chi_{\mathfrak{H}}$ — некоторые условия, фиксирующие действие $\text{Ad}_{\mathfrak{H}}$. Следует также упомянуть, что спектр A^0 фиксирован

$$A^0 \sim \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_N), \tag{3.50}$$

и таким образом

$$\det(\kappa + \Upsilon + A^1 + A^q) = \prod_{i=1}^N (\kappa - \mu_i). \tag{3.51}$$

Вычислим размерность редуцированного фазового пространства. Из (3.42) имеем:

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{M}^{\text{Gaudin}} &= \dim \mathcal{O}_0 + \dim \mathcal{O}_1 + \dim \mathcal{O}_q + \dim \mathcal{O}_\infty - 2(N^2 - 1) \\ &= 2 \dim \mathcal{O}^{\max} + 2 \dim \mathcal{O}^{\min} - 2(N^2 - 1) \stackrel{(3.35), (3.36)}{=} 2N - 2 \end{aligned} \tag{3.52}$$

После первого шага (3.48) редукции (3.41) мы получаем $2 \times 2(N - 1)$ -мерное фазовое пространство. Затем второй шаг редукции (по $\text{Ad}_{\text{Stab}(\Upsilon)} \simeq \text{Ad}_{\mathfrak{H}}$, $\dim \text{Ad}_{\mathfrak{H}} = N - 1$) приводит к размерности $2(N - 1)$ как в (3.52).

Ниже (в разделе 3.4.3) мы представим пуассоново отображение фазового пространства модели Годена на фазовое пространство спиновой цепочки Гейзенберга. Мы произведем только первый этап редукции, после чего имеется точное совпадение пуассоновых структур при замены переменных.

Симметрия отражения. Можно легко показать, что система Годена (3.44)–(3.50) имеет следующую \mathbb{Z}_2 симметрию:

$$(q, z, A^0, A^1, A^q, \Upsilon) \longmapsto (q^{-1}, z^{-1}, \Upsilon, A^1, A^q, A^0) \quad (3.53)$$

В самом деле, преобразования (3.53) не меняют матричную 1-форму Лакса:

$$L^G(z)dz = - \left(\Upsilon - \frac{A^1}{z-1} - q \frac{A^q}{z-q} \right) \frac{dz}{z} \xrightarrow{(3.53)} L^G(z)dz \quad (3.54)$$

или

$$L^G(z) \xrightarrow{(3.53)} -z^2 L^G(z) \quad (3.55)$$

Описанная симметрия также сохраняется и в квантовом случае, поскольку квантование (3.153) $\tilde{y} \mapsto \partial_z$ согласовано с уравнением (3.55):

$$\partial_z - L^G(z) \xrightarrow{(3.53)} -z^2 (\partial_z - L^G(z)). \quad (3.56)$$

В случае алгебры \mathfrak{gl}_2 структура симметрии отражения в эллиптической параметризации [95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 101] была замечена в [99, 152].

Модель Годена на $\mathbb{CP}^1 \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$.

В общем случае, конструкция похожа на предыдущий пример. Пусть $z_1 = 0$ и $z_n = \infty$. Конкретная форма матриц в отмеченных точках в этом случае такова:

$$\begin{aligned} \text{Spec}(A^0) &= (\mu_1, \dots, \mu_N), \\ \text{Spec}(A^\infty) &= (v_1, \dots, v_N), \\ A_{ij}^c &= \xi_i^c \eta_j^c. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Условия связей даются

$$\begin{aligned} \text{non-diag}(\varrho) &= 0, \quad \varrho = A^0 + A^1 + A^q + A^\infty, \\ \chi &= \text{non-diag}(A^\infty) = 0 \end{aligned} \quad (3.58)$$

на первом этапе редукции, и

$$\text{diag}(\varrho) = 0, \quad \chi_{\mathfrak{H}} = 0$$

на втором. Размерность редуцированного фазового пространства равна

$$\dim \mathfrak{M}_1^{\text{Gaudin}} = (2N - 2)(n - 2) \quad (3.59)$$

после первого этапа редукции, а в конце концов

$$\dim \mathfrak{M}^{\text{Gaudin}} = (2N - 2)(n - 3). \quad (3.60)$$

Чтобы посчитать количество параметров, заметим, что при добавлении одной отмеченной точки возникают две новых постоянных (положение точки и единственное нетривиальное собственное значение вырожденной орбиты). Тогда, принимая во внимание (3.81) для пространства параметров, получаем

$$\dim (\mathfrak{R}^{\text{Gaudin}}) = 2N + 1 + 2(n - 4) = 2(N + n) - 7. \quad (3.61)$$

Матрица Лакса

$$L^{\text{Gaudin}}(z) = \frac{1}{z} A^0 + \sum_{c=2}^{n-1} \frac{1}{z - z_c} A^c$$

при условии связи $\varrho = 0$ может быть записана в виде

$$L^{\text{Gaudin}}(z) = \frac{1}{z} \left(-\Upsilon + \sum_{c=2}^{n-1} \frac{z_c}{z - z_c} A^c \right) \quad (3.62)$$

поскольку $A^0 = -A^\infty - \sum_{c=2}^{n-1} A^c$, $A^\infty = \Upsilon$.

3.2.3 Гамильтонова редукция

Процедура Дирака [103] позволяет вычислить редуцированную пуассонову структуру в терминах исходных скобок Пуассона на уравнениях движения. Произведем редукцию в нашем случае. Не существует выделенного способа фиксировать действие $\chi_{\mathfrak{h}}$ (3.49). Поэтому мы произведем только первый этап редукции (3.58).

Пусть мы имеем связи $h = (h_1, \dots, h_m) = 0$, и матрица их скобок пуассона на уравнениях движения

$$C_{ij} = \{h_i, h_j\}|_{h_i=0} \quad (3.63)$$

невырождена в общей точке фазового пространства (связи второго рода по классификации Дирака [103]). Тогда, редуцированная пуассонова структура дается формулой Дирака. Для пары функций f и g

$$\{f, g\}_D = \left(\{f, g\} - \sum_{i,j=1}^m \{f, h_i\} C_{ij}^{-1} \{h_j, g\} \right) \Big|_{\text{on-shell}} \quad (3.64)$$

В нашем случае имеется $2(N^2 - N)$ связей

$$h = (\varrho_{ij}, A_{ij}^\infty), \quad i \neq j = 1 \dots N. \quad (3.65)$$

Матрица C (3.63) имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \beta \\ \beta & \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha = \left\{ \sum_{c=1}^{n-1} A^c, \sum_{c=1}^{n-1} A^c \right\}, \quad \beta = \{A^\infty, A^\infty\}. \quad (3.66)$$

Тогда обратная матрица равна

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & -\alpha^{-1} \\ -\alpha^{-1} & \alpha^{-1} + \beta^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.67)$$

и невырождена согласно аргументам, приведенным в работе [105, 106].

Прямое вычисление дает следующие результаты:

Предложение 1 Для общей модели Годена (3.29) редукция, соответствующая первому этапу (3.47) дает следующие редуцированные скобки Дирака

$$\begin{aligned} \{A_{ij}^a, A_{kl}^b\}_D &= \delta_{ab}(A_{il}^a \delta_{kj} - A_{kj}^a \delta_{il}) - \\ &- \sum_{p \neq k} \frac{A_{ip}^a A_{pl}^b \delta_{jk}}{\varrho_{pp} - \varrho_{kk} - A_{pp}^n + A_{kk}^n} - \sum_{p \neq i} \frac{A_{kp}^b A_{pj}^a \delta_{il}}{\varrho_{ii} - \varrho_{pp} + A_{pp}^n - A_{ii}^n} + \frac{A_{il}^a A_{kj}^b (1 - \delta_{jl})}{\varrho_{ll} - \varrho_{jj} - A_{ll}^n + A_{jj}^n} + \frac{A_{kj}^a A_{il}^b (1 - \delta_{ik})}{\varrho_{ii} - \varrho_{kk} - A_{ii}^n + A_{kk}^n}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

for $a, b \neq n$.

Предложение 2 Для специальной редуцированной модели Годена (3.57) редукция, соответствующая первому этапу (3.47) дает следующие скобки Дирака

$$\begin{aligned} \{\xi_i^a, \eta_j^b\}_D &= -\delta_{ij} \left(\delta^{ab} + \sum_{p \neq i} \frac{\xi_p^a \eta_p^b}{v_p - v_i - \varrho_{pp} + \varrho_{ii}} \right), \\ \{\xi_i^a, \xi_j^b\}_D &= \frac{\xi_j^a \xi_i^b (1 - \delta_{ij})}{v_j - v_i - \varrho_{jj} + \varrho_{ii}}, \\ \{\eta_i^a, \eta_j^b\}_D &= \frac{\eta_j^a \eta_i^b (1 - \delta_{ij})}{v_i - v_j - \varrho_{ii} + \varrho_{jj}}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

for $a, b \neq n$.

Формулы для общей модели (3.68) также применимы для специальной редуцированной модели (3.57). Более того, соотношения (3.68) следуют из (3.69) и стандартной параметризации $A_{ij}^c = \xi_i^c \eta_j^c$.

3.2.4 Спектральная кривая

Вновь с примера, рассмотренного в предыдущей главе [72].

Предложение 3 [72, 33] *Спектральная кривая модели Годена, определенной набором данных (3.44)–(3.48) имеет следующий вид:*

$$\begin{aligned} \Gamma^{\text{Gaudin}}(y, z) &: (1 + q) \det(y + \Upsilon) \left(1 + \frac{1}{1+q} \eta^1 (y + \Upsilon)^{-1} \xi^1 + \frac{q}{1+q} \eta^q (y + \Upsilon)^{-1} \xi^q \right) \\ &= z P_{-v}(y) + z^{-1} q P_{\mu}(y), \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$P_{\mu}(y) = \prod_{i=1}^N (y - \mu_i), \quad P_{-v} = \prod_{i=1}^N (y + v_i).$$

Доказательство:

Чтобы получить спектральную кривую (3.30), нам необходима следующая простая Лемма:

Лемма 1 *Для любой обратимой матрицы $G \in \text{Mat}(N)$ и пары N -мерных векторов ξ и η верно*

$$1. \quad \det(G + \xi \eta^T) = (1 + \eta^T G^{-1} \xi) \det G, \quad (3.71)$$

$$2. \quad (G + \xi \eta^T)^{-1} = G^{-1} - \frac{1}{1 + \eta^T G^{-1} \xi} G^{-1} \xi \eta^T G^{-1}. \quad (3.72)$$

Подставляя (3.48) в матрицу Лакса (3.29) с A^c , определяемой соотношениями (3.44)–(3.51), получаем:

$$L^{\text{Gaudin}}(z) = -\frac{1}{z} \left(\Upsilon - \frac{A^1}{z-1} - q \frac{A^q}{z-q} \right). \quad (3.73)$$

Таким образом, уравнение спектральной кривой $\det(\tilde{y} - L^G(z)) = 0$ может быть записано в виде:

$$\det(\tilde{y}z + \Upsilon - \frac{1}{z-1} \xi^1 \times \eta^1 - \frac{q}{z-q} \xi^q \times \eta^q) = 0 \quad (3.74)$$

Введем

$$y = \tilde{y}z. \quad (3.75)$$

Применяя (3.71), (3.72) из Леммы 1 дважды, получаем:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\text{Gaudin}}(y, z) : \quad & \det(y + \Upsilon) \left(1 - \frac{1}{z-1} \eta^1(y + \Upsilon)^{-1} \xi^1 - \frac{q}{z-q} \eta^q(y + \Upsilon)^{-1} \xi^q \right. \\ & \left. + \frac{q}{(z-1)(z-q)} \left(\eta^1(y + \Upsilon)^{-1} \xi^1 \cdot \eta^q(y + \Upsilon)^{-1} \xi^q - \eta^1(y + \Upsilon)^{-1} \xi^q \cdot \eta^q(y + \Upsilon)^{-1} \xi^1 \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.76)$$

Выражение в левой части уравнения (3.76) содержит только простые полюса в точках $z = 1$ и $z = q$. Полюса в точках $y = -v_i$ в действительности не возникают. В самом деле, легко видеть, что полюса второго порядка сокращаются во второй строчке уравнения (3.76), в то время как фактор $\det(y + \Upsilon)$ уничтожает полюса первого порядка. Более того, вычислим $\det(y - A^0)$ с помощью (3.48)–(3.51):

$$\begin{aligned} \det(y - A^0) = & \det(y + \Upsilon) \left(1 + \eta^1(y + \Upsilon)^{-1} \xi^1 + \eta^q(y + \Upsilon)^{-1} \xi^q \right. \\ & \left. + \eta^1(y + \Upsilon)^{-1} \xi^1 \cdot \eta^q(y + \Upsilon)^{-1} \xi^q - \eta^1(y + \Upsilon)^{-1} \xi^q \cdot \eta^q(y + \Upsilon)^{-1} \xi^1 \right) = \prod_{i=1}^N (y - \mu_i) \end{aligned} \quad (3.77)$$

Конечный ответ получается подстановкой второй строчки уравнения (3.77) во вторую строчку уравнения (3.76):

$$\begin{aligned} z^2 \det(y + \Upsilon) - z \det(y + \Upsilon) \left(\eta^1(y + \Upsilon)^{-1} \xi^1 + q \eta^q(y + \Upsilon)^{-1} \xi^q + q + 1 \right) \\ + q \det(y - A^0) = 0, \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\det(y - A^0) = \prod_{i=1}^N (y - \mu_i), \quad \det(y + \Upsilon) = \prod_{i=1}^N (y + v_i). \quad \blacksquare$$

Заметим, что случай \mathfrak{sl}_N модели Годена отличается от случая \mathfrak{gl}_N сдвигом матриц $A^c \rightarrow A^c - \frac{1}{N} \text{tr } A^c$. Таким образом, спектральная кривая

отличается на

$$y \rightarrow y + \frac{1}{N} \sum_{z_c \in \{0,1,q\}} \frac{\operatorname{tr} A^c}{z - z_c}. \quad (3.79)$$

Пространство параметров спектральных кривых модели Годена описывается следующим набором переменных:

$$\mathfrak{R}^{Gaudin} = \{v_1, \dots, v_N, \mu_1, \dots, \mu_N, \operatorname{tr} A^1, \operatorname{tr} A^q, q\}. \quad (3.80)$$

Учитывая возможные сдвиги переменной y , число независимых параметров равно

$$\dim \mathfrak{R}^{Gaudin} = 2N + 1. \quad (3.81)$$

Случай произвольного числа отмеченных точек (3.57) рассмотрен ниже (см. Теорему 2).

3.2.5 Простейший пример: \mathfrak{gl}_2 на $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, q, \infty\}$

Найдем спектральную кривую. В случае \mathfrak{gl}_2 имеем

$$\det \sum_i A_i = \sum_i \det A_i + \sum_{i < j} \operatorname{tr} A_i \operatorname{tr} A_j - \operatorname{tr} A_i A_j, \quad A_i \in \mathfrak{gl}_2.$$

Специальный случай (3.44)–(3.50) для \mathfrak{gl}_2 подразумевает, что мы имеем дело в четырьмя 2×2 матрицами

$$A^0 \sim \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2), \quad A^1 = \xi^1 \times \eta^1, \quad A^q = \xi^q \times \eta^q,$$

где $\xi^1, \xi^q, \eta^1, \eta^q$ — двумерные вектора и $A^\infty = \operatorname{diag}(v_1, v_2)$ с условием (3.48). Для спектральной кривой имеем выражение

$$\begin{aligned} & \tilde{y}^2 - \left(\frac{\operatorname{tr} A^1}{z-1} + q \frac{\operatorname{tr} A^q}{z-q} + \frac{\mu_1 + \mu_2}{z} \right) \tilde{y} + \\ & + \frac{1}{z^2} \left(\det \Upsilon + q \frac{\operatorname{tr} A^1 \operatorname{tr} A^q - \operatorname{tr} A^1 A^q}{(z-1)(z-q)} - q \frac{\operatorname{tr} \Upsilon \operatorname{tr} A^q - \operatorname{tr} \Upsilon A^q}{z-q} - \frac{\operatorname{tr} \Upsilon \operatorname{tr} A^1 - \operatorname{tr} \Upsilon A^1}{z-1} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.82)$$

где во второй строчке мы использовали условие $A^0 = -\Upsilon - A^1 - A^q$. Можно также произвести сдвиг (3.79) $\tilde{y} \rightarrow \tilde{y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\text{tr} A^1}{z-1} + q \frac{\text{tr} A^q}{z-q} + \frac{\mu_1 + \mu_2}{z} \right)$, который соответствует бесследовому случаю $\mathfrak{gl}_2 \rightarrow \mathfrak{sl}_2$, т.е. $A_i \sim \text{diag}(\nu_i, -\nu_i)$.

В этом случае спектральная кривая записывается в следующем виде:

$$\tilde{y}^2 - V(z) = -\frac{1-q}{z(z-1)(z-q)} H \quad (3.83)$$

где H — гамильтонова функция на фазовом пространстве

$$H = \text{tr} \left[A_q \left(A_0 + \frac{q}{q-1} A_1 \right) \right] - \nu_q \left(\mu_1 + \mu_2 + \frac{2q}{q-1} \nu_1 \right) \quad (3.84)$$

и потенциал записывается как

$$V(z) = \frac{\nu_0^2}{z^2} + \frac{\nu_1^2}{(z-1)^2} + \frac{\nu_q^2}{(z-q)^2} - \frac{\nu_0^2 + \nu_1^2 + \nu_q^2 - \nu_\infty^2}{z(z-1)} \quad (3.85)$$

с $\nu_0 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{2}$, $\nu_1 = \frac{1}{2} \text{tr} A^1$, $\nu_q = \frac{1}{2} \text{tr} A^q$, $\nu_\infty = \frac{\nu_1 - \nu_2}{2}$.

Замечание: Пространство классов смежности (3.41) в этом случае является фазовым пространством уравнения Пенлеве VI [153, 154, 155] в описании Шлезингера [156, 157].

3.2.6 Дуальность АНН

В работе [42, 43] М.Р. Адамс, Дж. Харнад и Ж. Уртюбиз предложили дуальность между классическими моделями Годена-Шлезингера различных рангов с различным числом точек. Их описание отличалось от нашего на постоянное слагаемое Y в матрице Лакса (или связности в изомонодромном случае):

$$L_{АНН}^G(z) = Y + \sum_{c=1}^M \frac{A^c}{z - z_c}, \quad Y = \text{diag}(y_1, \dots, y_N), \quad A^c \in \mathfrak{gl}_N. \quad (3.86)$$

Разница в данном случае важна, поскольку $Y \neq 0$ приводит к появлению полюса второго порядка в точке ∞ для $L_{АНН}^G(z)dz$. Фазо-

вое пространство также отличается в этом случае. Оно является прямым произведением коприсоединенных орбит (снабженных естественной структурой Ли-Пуассона), факторизованным по стабилизатору Y : $(\mathcal{O}^1 \times \dots \times \mathcal{O}^M) // \text{Stab}(Y)$.

В случае, когда все A^c имеют ранг 1, дуальная матрица Лакса является \mathfrak{gl}_M -значной функцией с $\tilde{Y} = \text{diag}(z_1, \dots, z_M)$ и N отмеченными точками y_1, \dots, y_N :

$$\tilde{L}_{AHH}^G(z) = \tilde{Y} + \sum_{c=1}^N \frac{\tilde{A}^c}{z - y_c}, \quad \tilde{Y} = \text{diag}(z_1, \dots, z_M), \quad \tilde{A}^c \in \mathfrak{gl}_M. \quad (3.87)$$

Дуальность приводит к связи между спектральными кривыми:

$$\det(\tilde{Y} - z) \det(L_{AHH}^G(z) - \lambda) = \det(Y - \lambda) \det(\tilde{L}_{AHH}^G(\lambda) - z). \quad (3.88)$$

Размерности фазовых пространств обеих моделей равны $2(N-1)(M-1)$, а число параметров равно $2(N+M)-3$. В самом деле, в случае (3.86) размерность нередуцированной модели равна $\sum_{c=1}^M \dim A^c = M \times 2(N-1)$. Редукция по коприсоединенному действию подгруппы Картана $\text{Stab}(Y) \simeq \mathfrak{h} \subset \text{GL}_N$, $\dim \text{Ad}_{\mathfrak{h}} = N-1$ дает

$$\sum_{c=1}^M \dim A^c - 2 \dim(\text{Stab}(Y)) = M(2N-2) - 2(N-1) = 2(N-1)(M-1).$$

3.3 Цепочка Гейзенберга

3.3.1 $GL(2)$ XXX Heisenberg chain

Пусть x — локальная координата на \mathbb{CP}^1 . Определим операторы Лакса как набор $GL(2)$ -значных функций

$$L_i(x) = x - x_i + S^i, \quad i = 1 \dots N \quad (3.89)$$

где $S^i = \sum_{\alpha=1}^3 S_{\alpha}^i \sigma_{\alpha}$ — матрицы из алгебры \mathfrak{sl}_2 , а $\{x_i\}$ — набор точек на \mathbb{CP}^1 . Каждый оператор $L_i(x)$ ставится в соответствие i -ому узлу одномерной решетки. Тогда трансфер-матрица определяется как

$$T(x) = V(q)L_N(x) \dots L_1(x) \quad (3.90)$$

где матрица «твиста» $V(q)$ — постоянная $GL(2)$ -значная матрица. Следуя работе [46, 47], мы выбираем V зависящей от параметра q

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{q}{(1+q)^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \text{const} \quad (3.91)$$

с собственными значениями $\frac{q}{1+q}$ и $\frac{1}{1+q}$. Спектральная кривая и дифференциала Зайберга–Виттена равны

$$\tilde{\Gamma}^{\text{Heisen}}(\tilde{w}, x) : \det(\tilde{w} - T(x)) = 0, \quad (3.92)$$

$$dS^{XXX} = x \frac{dw}{w}. \quad (3.93)$$

Разлагая детерминант 2×2 матрицы, получаем

$$\tilde{w} - \text{tr} T(x) + \tilde{w}^{-1} \det T(x) = 0. \quad (3.94)$$

Пуассонова структура состоит из N копий \mathfrak{sl}_2 -скобок Ли–Пуассона на каждом узле:

$$\{S_{\alpha}^k, S_{\beta}^l\} = \delta^{kl} \sqrt{-1} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_{\gamma}^k. \quad (3.95)$$

Эти скобки следуют из квадратичной r -матричной структуры:

$$\begin{aligned} \{L(z) \otimes L(w)\} &= [r(z, w), L(z) \otimes L(w)], \\ r(z, w) &= \frac{1}{z-w} \left(1 \otimes 1 + \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_{\alpha} \otimes \sigma_{\alpha} \right). \end{aligned} \quad (3.96)$$

Значения функций Казимира определяются собственными значениями $\text{Spec}(S^i) = (K_i, -K_i)$:

$$K_i^2 = \sum_{\alpha=1}^3 S_{\alpha}^i S_{\alpha}^i, \quad i = 1 \dots N \quad (3.97)$$

Таким образом, имеется пара независимых переменных на каждом узле. Поскольку $\det L_i(x) = (x - x_i)^2 - K_i^2$, спектральная кривая (3.94) может быть записана в виде

$$\tilde{w} - \text{tr} T(x) + \tilde{w}^{-1} \frac{q}{(1+q)^2} K^+(x) K^-(x) = 0, \quad (3.98)$$

$$K^{\pm}(x) = \prod_{i=1}^N (x - m_i^{\pm}) \quad m_i^{\pm} = x_i \pm K_i. \quad (3.99)$$

На этом этапе фазовое пространство модели $2N$ -мерное

$$\tilde{\mathfrak{M}}^{\text{Heisen}} = \{ S_{\alpha}^i, i = 1 \dots N, \alpha = 1 \dots 3 \mid K_i = \text{const}_i \in \mathbb{C} \}, \quad \dim \tilde{\mathfrak{M}}^{\text{Heisen}} = 2N \quad (3.100)$$

Заметим, что функции $K^{\pm}(x)$ постоянны на $\tilde{\mathfrak{M}}^{\text{Heisen}}$, в то время как

$$\text{tr} T(x) = x^N + \sum_{i=1}^N x^{i-1} H_i^{\text{Heisen}}, \quad (3.101)$$

где $\{H_i^{\text{Heisen}}\}$ — набор N полиномиальных функций степеней $N + 1 - i$ на $\tilde{\mathfrak{M}}^{\text{Heisen}}$, которые взаимно-коммутируют $\{H_k^{\text{Heisen}}, H_j^{\text{Heisen}}\} = 0$ относительно (3.95) из-за (3.96).

Упомянем здесь также связь с параметрами четырехмерной калибровочной теории: m_i^{\pm} соответствуют массам $2N$ гипермультиплетов в фундаментальном представлении, $q = e^{2\pi i \tau}$ связана в ультрафиолетовом значении комплексной константы связи τ , а x_i параметризуют вакуумные средние значения скалярных полей.

3.3.2 Редуцированное фазовое пространство и спектральная кривая

Гамильтониан H_N^{Heisen} линеен:

$$H_N^{\text{Heisen}} = \text{tr} \left(V \sum_{i=1}^N S^i \right) - \sum_{i=1}^N x_i. \quad (3.102)$$

Это приводит к сохранению проекции полного «спина» на направление задаваемое неоднородностью V : $\vec{V} = \frac{1}{2} \text{tr} (V \vec{\sigma})$. Конечно, этот закон сохранения генерируется присоединенным действием $g \in GL(2)$, которое оставляет V инвариантным, т.е. $g \in \text{Stab}(V)$:

$$g \in GL_2 : S^i \rightarrow g S^i g^{-1}, \quad V \rightarrow g V g^{-1} = V \quad (3.103)$$

По аналогии с тем, что в случае многих частиц, при условии сохранения полного импульса, можно выбрать систему центра масс, мы разрешим уравнение⁵

$$H_N^{\text{Heisen}} = \text{const} \quad (3.104)$$

относительной любой из переменных, например S_α^N , и уменьшим размерность пространства $\tilde{\mathcal{M}}^{\text{Heisen}}$ на два: условие связи (3.104) необходимо дополнить некоторым условием, «фиксирующим калибровку», которое соответствует выбору нетривиального действия (3.103) на S^N . Обозначим эту вторую константу как $\chi_N(S^N) = 0$.

Легко показать, что скобки Пуассона (3.95) между S^k , $k = 1 \dots N - 1$ не меняются при такой редукции. Итак, редуцированное фазовое про-

⁵Естественным выбором с точки зрения калибровочной теории является $H_N = 0$, поскольку он уничтожает $U(1)$ фактор, оставляя $SU(N)$ теорию. Мы, однако, оставим константу произвольной.

странство

$$\mathfrak{M}^{\text{Heisen}} = \{S_\alpha^i, i = 1 \dots N, \alpha = 1 \dots 3 \mid K_i = \text{const}_i, H_N^{\text{Heisen}} = \text{const}, \chi_N(S^N) = 0\}$$

$$\dim \mathfrak{M}^{\text{Heisen}} = 2N - 2 \quad (3.105)$$

имеет размерность $2N - 2$, а интегрируемая динамик генерируется $H_1^{\text{Heisen}}, \dots, H_{N-1}^{\text{Heisen}}$ с $S^N = S^N(S^1, \dots, S^{N-1})$ на уравнениях движения.

Перепишем также спектральную кривую (3.92). Подставляя $\tilde{w} = w \frac{1}{1+q} K^+(x)$ в (3.94), получаем

$$\Gamma^{\text{Heisen}}(w, x) : \quad \text{tr} T(x) - \frac{1}{1+q} w K^+(x) - \frac{q}{1+q} w^{-1} K^-(x) = 0 \quad (3.106)$$

или

$$x^N + \frac{1}{1-q} \left(\frac{1}{w-1} - \frac{1}{w-q} \right) [w^2 \Delta K^+(x) - w(1+q) \Delta \text{tr} T(x) + q \Delta K^-(x)] = 0, \quad (3.107)$$

где $\Delta f(x) = f(x) - x^N$. В итоге кривая зависит от $N - 1$ гамильтонианов и от следующего набора из $2N + 2$ параметров:

$$\mathfrak{R}^{\text{Heisen}} = \{x_1, \dots, x_N, K_1, \dots, K_N, H_N, q\} \stackrel{(3.99)}{\simeq} \{m_1^\pm, \dots, m_N^\pm, H_N, q\}. \quad (3.108)$$

В действительности одну из переменных $\{x_i\}$ можно сдвинуть, сдвигая переменную x . Таким образом, число независимых параметров модели равно

$$\dim \mathfrak{R}^{\text{Heisen}} = 2N + 1. \quad (3.109)$$

3.3.3 Простейший пример: цепочка из двух узлов

Пусть

$$\text{tr} T(x) = x^2 + H_2 x + H_1, \quad K^\pm = (x - m_1^\pm)(x - m_2^\pm) \quad (3.110)$$

Подставляя это соотношение в (3.106), после замены переменных $x = \tilde{y}z$, $w = z$, имеем

$$\tilde{y}^2 z^2 + H_2 \tilde{y}z + H_1 = \frac{z}{1+q} (\tilde{y}z - m_1^+) (\tilde{y}z - m_2^+) + \frac{1}{z} \frac{q}{1+q} (\tilde{y}z - m_1^-) (\tilde{y}z - m_2^-) \quad (3.111)$$

Это уравнение легко приводится к форме

$$\tilde{y}^2 - b(z)\tilde{y} + c(z) = 0, \quad (3.112)$$

with

$$\begin{aligned} b(z) &= \frac{(q+1)H_2 + q(m_1^+ + m_2^+) + (m_1^- + m_2^-)}{(q-1)(z-q)} + \frac{(m_1^- + m_2^-)}{z} - \frac{(q+1)H_2 + (m_1^+ + m_2^+) + q(m_1^- + m_2^-)}{(q-1)(z-1)}, \\ c(z) &= \frac{q+1}{q} \frac{m_1^- m_2^- - H_1}{z} + \frac{m_1^- m_2^- + qm_1^+ m_2^+ - (1+q)H_1}{q(q-1)(z-q)} - \frac{qm_1^- m_2^- + m_1^+ m_2^+ - (1+q)H_1}{(q-1)(z-1)} + \frac{m_1^- m_2^-}{z^2}. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Производя сдвиг $\tilde{y} \rightarrow \tilde{y} + \frac{1}{2}b(z)$, мы приходим к условию $\tilde{y}^2 + c(z) - \frac{1}{4}b^2(z) = 0$

$$\tilde{y}^2 + c(z) - \frac{1}{4}b^2(z) = 0 \quad (3.114)$$

которое также записывается в виде

$$\tilde{y}^2 - V(z) = -\frac{1-q}{z(z-1)(z-q)} H \quad (3.115)$$

где H — гамильтониан (линейный по H_1) и

$$V(z) = \frac{m_0^2}{z^2} + \frac{m_1^2}{(z-1)^2} + \frac{m_q^2}{(z-q)^2} - \frac{m_0^2 + m_1^2 + m_q^2 - m_\infty^2}{z(z-1)} \quad (3.116)$$

где

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{m_1^- - m_2^-}{2}, \quad m_\infty = \frac{m_2^+ - m_1^+}{2}, \\ m_1 &= \frac{1}{2(q-1)} \left((q+1)H_2 + m_1^+ + m_2^+ + q(m_1^- + m_2^-) \right), \\ m_q &= -\frac{1}{2(q-1)} \left((q+1)H_2 + m_1^- + m_2^- + q(m_1^+ + m_2^+) \right). \end{aligned} \quad (3.117)$$

Можно сравнить это выражение с (3.83)-(3.85). Заметим, что H_2 — константа (3.104). Таким образом m_1 и m_q также являются константами,

поскольку они не зависят от H_1 . Выбор знаков в уравнении (3.117) не следует из уравнения (3.116). Опрвдание нашего выбора знаков будет объяснено в Главе 3.5.

3.3.4 Цепочки высшего ранга

Рассмотрим теперь GL_k model

$$L^i(x) = x - x_i + S^i, \quad S^i \in \mathfrak{gl}_k \quad (3.118)$$

с трансфер-матрицей

$$T(x) = V(q)L_1(x)L_2(x)\dots L_N(x), \quad (3.119)$$

где $V(q) = \text{diag}(v_1, \dots, v_k)$ — диагональная матрица (ее элементы будут определены в дальнейшем) и скобки Пуассона равны

$$\{L_n(x) \otimes L_m(y)\} = \delta_{nm}[r(x, y), L_m(x) \otimes L_m(y)]. \quad (3.120)$$

r -матрица определяется как

$$r(x, y) = \frac{P_{12}}{x - y}, \quad P_{12} = \sum_{a,b=1}^k E_{ab} \otimes E_{ba}. \quad (3.121)$$

Тогда

$$\{S_{ab}^i, S_{cd}^j\} = \delta^{ij}(S_{ad}^i \delta_{cb} - S_{cb}^i \delta_{ad}). \quad (3.122)$$

С помощью r -матричных соотношений (3.120), получаем те же скобки для трансфер-матрицы:

$$\{T(x) \otimes T(y)\} = [r(x, y), T(x) \otimes T(y)]. \quad (3.123)$$

Таким образом,

$$\{T_{ab}(z), T_{cd}(w)\} = \frac{1}{z-w} (T_{cb}(z)T_{ad}(w) - T_{ad}(z)T_{cb}(w)), \quad (3.124)$$

$$\{T_{ab}(z), T_{cd}(z)\} = T_{ad}(z)\partial_z T_{cb}(z) - T_{cb}(z)\partial_z T_{ad}(z).$$

Представим себе теперь трансфер-матрицу в виде суммы:

$$T(x) = \prod_{j=1}^N (x-x_j) V(q) \prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{S^i}{x-x_i}\right) = \prod_{j=1}^N (x-x_j) \left(V(q) + \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{S}^i}{x-x_i} \right). \quad (3.125)$$

\mathfrak{gl}_k -значные коэффициенты \tilde{S}^i — это вычеты выражения $T(x)/\prod_j (x-x_j)$, т.е.

$$\tilde{S}^i = \frac{T(x_i)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_i} \frac{T(x) dx}{\prod_j (x - x_j)}, \quad (3.126)$$

где γ_i — маленький контур, обходящий вокруг x_i . Вычислим теперь скобки в новых переменных \tilde{S}^i спиновой цепочки.

Предложение 4 Скобки Пуассона для \tilde{S}^i (3.126) имеют следующий вид:

$$\{\tilde{S}_{ab}^i, \tilde{S}_{cd}^j\} = (1-\delta^{ij}) \frac{\tilde{S}_{cb}^i \tilde{S}_{ad}^j - \tilde{S}_{ad}^i \tilde{S}_{cb}^j}{x_i - x_j} + \delta^{ij} \left(\tilde{S}_{ad}^i V_{cb} - \tilde{S}_{cb}^i V_{ad} + \sum_{k \neq i} \frac{\tilde{S}_{ad}^i \tilde{S}_{cb}^k - \tilde{S}_{cb}^i \tilde{S}_{ad}^k}{x_i - x_k} \right). \quad (3.127)$$

Доказательство:

При $i \neq j$ скобки легко получить из r -матричных соотношений для $T(x)$ (3.124):

$$\{\tilde{S}_{ab}^i, \tilde{S}_{cd}^j\} = \frac{\tilde{S}_{cb}^i \tilde{S}_{ad}^j - \tilde{S}_{ad}^i \tilde{S}_{cb}^j}{x_i - x_j} \quad \text{for } i \neq j \quad (3.128)$$

При $i = j$ аргументы трансфер-матриц совпадают. Чтобы преодолеть эту проблему, можно использовать либо локальное выражение (3.124), либо интегральное представление (3.126):

$$\begin{aligned} \{\tilde{S}_{ab}^i, \tilde{S}_{cd}^i\} &= \oint_{\gamma_i} \oint_{\gamma'_i} dx dy \{T_{ab}(x), T_{cd}(y)\} \prod_{k,j} \frac{1}{x-x_j} \frac{1}{y-x_k} \\ &= \oint_{\gamma_i} \oint_{\gamma'_i} dx dy \frac{T_{cb}(x)T_{ad}(y) - T_{ad}(x)T_{cb}(y)}{(x-y)} \prod_{k,j} \frac{1}{x-x_j} \frac{1}{y-x_k} = \oint_{\gamma_i} dx \frac{T_{cb}(x)\tilde{S}_{ad}^i - T_{ad}(x)\tilde{S}_{cb}^i}{(x-x_i)\prod_j (x-x_j)}. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Теперь можно деформировать контур интегрирования γ_i в контур вокруг бесконечности, а также набор маленьких контуров вокруг x_j при $j \neq i$, все с положительным направлением обхода. Интеграл вычисляется по полюсам:

$$\begin{aligned}
\{\tilde{S}_{ab}^i, \tilde{S}_{cd}^i\} &= - \sum_{k \neq i} \oint_{\gamma_k} dx \frac{T_{cb}(x) \tilde{S}_{ad}^i - T_{ad}(x) \tilde{S}_{cb}^i}{(x-x_i) \prod_j (x-x_j)} \\
&- \oint_{\gamma_\infty} dx \frac{T_{cb}(x) \tilde{S}_{ad}^i - T_{ad}(x) \tilde{S}_{cb}^i}{(x-x_i) \prod_j (x-x_j)} = - \sum_{k \neq i} \frac{\tilde{S}_{cb}^k \tilde{S}_{ad}^i - \tilde{S}_{ad}^k \tilde{S}_{cb}^i}{x_k - x_i} - V_{cb} \tilde{S}_{ad}^i - V_{ad} \tilde{S}_{cb}^i = \\
&= \tilde{S}_{ad}^i V_{cb} - \tilde{S}_{cb}^i V_{ad} + \sum_{k \neq i} \frac{1}{x_i - x_k} (\tilde{S}_{ad}^i \tilde{S}_{cb}^k - \tilde{S}_{cb}^i \tilde{S}_{ad}^k) \quad \blacksquare
\end{aligned} \tag{3.130}$$

Хотя формула, приведенная выше верна для произвольных S^i , в этой главе мы будем рассматривать случай, когда переменные в отмеченных точках — это орбиты коприсоединенного действия ($GL(k)$) *минимальной размерности* (см. (3.36)):

$$\dim(S^i) = 2(k-1), \quad \forall i = 1 \dots N. \tag{3.131}$$

Тогда размерность фазового пространства равна

$$\dim(\mathfrak{M}^{\text{Heisen}}) = N(2k-2) - (2k-2) = 2(k-1)(N-1) \tag{3.132}$$

где $-(2k-2)$ возникает из-за редукции по подгруппе Картана группы $GL(k)$ (3.105). Для того, чтобы вычислить количество параметров, заметим, что увеличивая ранг на единицу мы добавляем две константы (компонента матрицы V и значение гамильтониана, соответствующего действию подгруппы Картана группы $GL(k)$). Учитывая (3.109), получаем

$$\dim(\mathfrak{R}^{\text{Heisen}}) = 2N + 1 + 2(k-2) = 2(N+k) - 3 \tag{3.133}$$

для размерности пространства параметров.

3.4 Классическая дуальность

Сначала, напомним результаты Главы 2.

3.4.1 Дуальность для $GL(2)$ цепочки

Как следует из Предложения 3 (раздел 3.2.4), спектральные кривые специальной редуцированной модели Годена the spectral curves of the special reduced Gaudin model (3.44)–(3.50) и XXX спиновой цепочки имеют одну и ту же форму (3.106) и (3.70). Более того, размерности фазовых пространств (3.105), (3.52) и пространства параметров (3.108)–(3.109), (3.80)–(3.81) можно также отождествить. Все это можно суммировать в следующей форме:

Теорема 1 $GL(2)$ XXX спиновая цепочка Гейзенберга, определенная как (3.89)–(3.109) и модель Годена с алгеброй \mathfrak{gl}_N (3.39)–(3.81) спектрально дуальны друг другу на классическом уровне при помощи замены переменных:

$$\begin{cases} z = w, \\ \tilde{y} = \frac{x}{w}, \end{cases} \quad (3.134)$$

следующей замены параметров (3.108) и (3.80):

$$\begin{cases} m_i^+ = -v_i, & 1 \leq i \leq N, \\ m_i^- = \mu_i, & 1 \leq i \leq N, \\ H_N^{\text{XXX}} = \frac{1}{1+q} \text{tr} A^1 + \frac{q}{1+q} \text{tr} A^q + \sum_{k=1}^N v_k \end{cases} \quad (3.135)$$

и следующего соотношения между производящими функциями гамильтонианов:

$$\operatorname{tr} T^{\text{xxx}}(y) = \det(y + \Upsilon) \left(1 + \frac{1}{1+q} \eta^1 (y + \Upsilon)^{-1} \xi^1 + \frac{q}{1+q} \eta^q (y + \Upsilon)^{-1} \xi^q \right) \quad (3.136)$$

Простейший пример дуальности возникает при сравнении (3.115)–(3.117) и (3.83)–(3.85).

3.4.2 Дуальность для цепочек высшего ранга

Все утверждения, сделанные в предыдущих разделах верны не только для $GL(2)$ спиновой цепочки и четырехточечной модели Годена, но также и для $GL(k)$ спиновой цепочки и $k + 2$ -точечной модели Годена. В самом деле, из (3.60), (3.61) и (3.132), (3.133) можно заключить, что размерности фазовых пространств и пространств параметров в модели Годена (3.57)–(3.61) и цепочке Гейзенберга (3.132)–(3.132) совпадают при $n = k + 2$.

Теорема 2 $GL(k)$ спиновая цепочка Гейзенберга с N узлами (3.125)–(3.133) и модель Годена с алгеброй \mathfrak{gl}_N на $\mathbb{CP}^1 \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ (3.57)–(3.61) спектрально дуальны на классическом уровне при

1. замене переменных в спектральной задаче:

$$z = w, \quad (3.137)$$

$$\tilde{y} = \frac{x}{w},$$

2. следующем отождествлении параметров:

$$n = k + 2, \quad (3.138)$$

$$V = \operatorname{diag}(z_2, \dots, z_{n-1}) \in \mathfrak{gl}_k, \quad (3.139)$$

$$A_{ii}^\infty \equiv \Upsilon_{ii} \equiv v_i = -x_i. \quad (3.140)$$

3. и следующей замене динамических переменных:

$$\left(V^{-1}\tilde{S}^i\right)_{ab} = \xi_i^a \eta_i^b, \quad a, b = 1 \dots k, \quad i = 1 \dots N, \quad (3.141)$$

Доказательство:

Продемонстрируем явно как соответствие между двумя системами проявляет себя на уровне спектральных кривых. Запишем спектральную кривую спиновой цепочки:

$$\det_{k \times k} \left(z - \prod_{j=1}^N (x - x_j) V \left(1 + \sum_{i=1}^N \frac{\xi_i \eta_i^T}{x - x_i} \right) \right) = 0. \quad (3.142)$$

Для $k + 2$ -точечной модели Годена:

$$\det_{N \times N} (yz - L_G) = \det_{N \times N} \left(yz + A_\infty - \sum_{a=1}^k \frac{z_a \xi^a (\eta^a)^T}{z - z_a} \right) = 0. \quad (3.143)$$

Обозначим yz как x и будем считать, как и в предыдущих разделах, что матрица A_∞ диагональна, причем диагональные элементы равны v_i , $i = 1 \dots N$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} & \det_{N \times N} \left(x + A_\infty - \sum_{a=1}^k \frac{z_a \xi^a (\eta^a)^T}{z - z_a} \right) = \\ & = \prod_{i=1}^N (x + \Lambda_i) \det_{N \times N} \left(1 - (x + A_\infty)^{-1} \sum_{a=1}^k \frac{z_a \xi^a (\eta^a)^T}{z - z_a} \right). \end{aligned} \quad (3.144)$$

Определим матрицу $D = (x + A_\infty)^{-1} \sum_{a=1}^k \frac{z_a \xi^a (\eta^a)^T}{z - z_a}$. Раскладывая определитель по степеням D , мы получаем сумму слагаемых, каждое из которых является произведением следов D^n . Типичный вклад выглядит как $c_{n_1, \dots, n_j} \text{tr} D^{n_1} \dots D^{n_j}$. Заметим, что коэффициенты c_{n_1, \dots, n_j} не зависят от размера N матрицы L_G . Мы докажем, что каждый след матрицы

D^n может быть переписан как след n -ой степени $k \times k$ матрицы. Тогда эквивалентность между двумя спектральными кривыми будет доказана.

Доказательство производится следующим образом. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_{N \times N} D^M &= \sum_{i_1 \dots i_M=1}^N \sum_{a_1 \dots a_M=1}^k \frac{1}{x+\Lambda_{i_1}} \cdot \frac{z_{a_1} \xi_{a_1}^{i_1} \eta_{a_1}^{i_2}}{(z-z_{a_1})} \dots \frac{1}{x+\Lambda_{i_M}} \cdot \frac{z_{a_M} \xi_{a_M}^{i_M} \eta_{a_M}^{i_1}}{(z-z_{a_M})} = \\
&= \sum_{i_1 \dots i_M=1}^N \mathrm{tr}_{k \times k} \left((z-Z)^{-1} Z \frac{\eta^{i_1}(\xi^{i_1})^T}{(x+\Lambda_{i_1})} \dots (z-Z)^{-1} Z \frac{\eta^{i_M}(\xi^{i_M})^T}{(x+\Lambda_{i_M})} \right) = \\
&= \mathrm{tr}_{k \times k} \left[\sum_{i=1}^N \frac{(z-Z)^{-1} Z \eta^i(\xi^i)^T}{x+\Lambda_i} \right]^M,
\end{aligned} \tag{3.145}$$

где следы во второй и третьей строчках берутся по индексам a_i , а Z — \mathfrak{gl}_k -значная диагональная матрица с элементами z_a :

$$Z = \mathrm{diag}(z_1, \dots, z_k).$$

Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned}
&\det_{N \times N} \left(x + A_\infty - \sum_{a=1}^k \frac{z_a \xi^a (\eta^a)^T}{z-z_a} \right) = \\
&= \prod_{i=1}^N (x + \Lambda_i) \det_{k \times k} \left[1 - \sum_{i=1}^N \frac{(z-Z)^{-1} Z \eta^i(\xi^i)^T}{x+\Lambda_i} \right] = \\
&= \frac{\prod_{i=1}^N (x+\Lambda_i)}{\prod_{a=1}^k (z-z_a)} \det_{k \times k} \left[z - Z \left(1 + \sum_{i=1}^N \frac{\eta^i(\xi^i)^T}{x+\Lambda_i} \right) \right].
\end{aligned} \tag{3.146}$$

Спектральные кривые совпадают, если отождествить⁶ $Z = V$, $\tilde{S}^i = V \xi^i(\eta^i)^T$ and $v_i = -x_i$. ■

Замечание: в действительности, любая система Годена может быть переписана как спиновая цепочка. Для этого необходимо слить вместе несколько отмеченных точек, в которых помещены орбиты минимальной размерности. Это соответствует совпадению нескольких собственных значений матрицы V в спиновой цепочке. Обратное, любая спиновая

⁶С этого момента мы используем другую нормировку для z и, следовательно, для V : т.е. для $k = 2$ мы пишем $V = \mathrm{diag} \left(\frac{1}{1+q}, \frac{q}{1+q} \right)$ вместо $V = \mathrm{diag}(1, q)$.

цепочка может быть переписана как система Годена при помощи слияния нескольких точек x_i . Матрица A^∞ в системе Годена в этом случае будет иметь несколько совпадающих собственных значений.

3.4.3 Отображение Пуассона

В этой главе мы покажем, что отождествление (3.141) дает взаимнооднозначное пуассоново отображение из одной системы в другую. Наша стратегия заключается в следующем: мы стартуем с модели Годена (3.57)–(3.62) с квадратичными скобками Пуассона (3.69). Затем мы применим преобразование дуальности АНН (3.87) к матрице zL^{Gaudin} . После этого мы покажем, что \mathfrak{gl}_{n-2} -значные вычеты дуальной модели имеют ту же пуассонову структуру, что и \tilde{S}^i (3.127).

Обозначим

$$B_{ab}^i = \xi_i^a \eta_i^b \in \mathfrak{gl}_k. \quad (3.147)$$

В действительности, доказательство Теоремы 2 следует из дуальности АНН (3.88). Можно определить АНН дуальную модель к модели Годена (3.62)

$$L^{\text{Gaudin}}(z) = \frac{1}{z} \left(-\Upsilon + \sum_{c=2}^{n-1} \frac{z_c}{z - z_c} A^c \right), \quad \Upsilon = \text{diag}(v_1, \dots, v_N),$$

следуя алгоритму (3.87):

$$\text{АНН} \left\{ zL^{\text{Gaudin}}(z) \right\} (x) = Z + \sum_{i=1}^N \frac{zB}{x+v_i}. \quad (3.148)$$

Однако, пуассонова структура обеих моделей в нашем случае квадратична, а не линейна, как в исходном случае АНН [42, 43]).

Теорема 3 *При преобразовании дуальности АНН фазовое пространство редуцированной \mathfrak{gl}_N модели Годена с $k + 2$ отмеченными точками (3.57), (3.59), (3.69) и XXX цепочки Гейзенберга (3.125)–(3.127)*

связану с помощью (3.141)

$$\left(V^{-1}\tilde{S}^i\right)_{ab} = B_{ab}^i, \quad a, b = 1 \dots k, \quad i = 1 \dots N.$$

Это отображение пуассоново, т.е. скобки Пуассона переменных B^i (3.147), задаваемые скобками Дирака (3.69), имеют тот же вид, как и скобки для $V^{-1}\tilde{S}^i$ (3.127):

$$\begin{aligned} \{B_{ab}^i, B_{cd}^j\} = & (1 - \delta^{ij}) \frac{1}{v_i - v_j - \varrho_{ii} + \varrho_{jj}} (B_{ad}^i B_{cb}^j - B_{cb}^i B_{ad}^j) + \\ & + \delta^{ij} \left(B_{ad}^i \delta_{bc} - B_{cb}^i \delta_{ad} + \sum_{n \neq i} \frac{B_{ad}^i B_{cb}^n - B_{cb}^i B_{ad}^n}{v_n - v_i - \varrho_{nn} + \varrho_{ii}} \right) \end{aligned} \quad (3.149)$$

при

$$x_i = \varrho_{ii} - v_i. \quad (3.150)$$

Переменные ϱ_{ii} и v_i являются функциями Казимира в АНН дуальной модели Годена:

$$\begin{aligned} \{v_i, A_{kl}^b\}_D = \{v_i, A_{kl}^b\} = 0 \quad \text{for } b = 1 \dots k, \\ \{\varrho_{ii}, A_{kl}^b\}_D = \{\varrho_{ii}, A_{kl}^b\} = 0 \quad \text{for } b = 1 \dots k. \end{aligned} \quad (3.151)$$

Доказательство непосредственно следует из выражения для скобок Дирака (3.69). Заметим, что ϱ_{ii} являются функциями Казимира. Таким образом, можно положить $\varrho_{ii} = 0$ и воспроизвести результаты (3.140). Тогда, сравнивая (3.148) и (3.125), получаем точное соответствие двух моделей:

$$\text{АНН} \left\{ z L^{\text{Gaudin}}(z) \right\} (x) = T^{\text{Heisen}}(x) \prod_j \frac{1}{x - x_j}. \quad (3.152)$$

3.5 Квантовая дуальность

3.5.1 Простейший пример

Вновь начнем с простейшего случая (\mathfrak{sl}_2 четырехточечной редуцированной модели Годена и цепочки из двух узлов), соответствующего четырехмерной теории Янга-Миллса с калибровочной группой $SU(2)$. Как было показано в Главе 1, уравнение Бакстера для XXX спиновой цепочки приводит к интегралам Бора–Зоммерфельда, которые дают правильный препотенциал Некрасова [30]. Это уравнение Бакстера можно понимать как квантование соответствующей спектральной кривой (3.111):

$$\mathrm{tr} T(x) = \tilde{y}^2 z^2 + H_2 \tilde{y} z + H_1 = \frac{z}{1+q} K^+(\tilde{y}z) + \frac{1}{z} \frac{q}{1+q} K^-(\tilde{y}z),$$

где

$$K^+(x) = (x - m_1^+)(x - m_2^+), \quad K^-(x) = (x - m_1^-)(x - m_2^-).$$

«Квантование» дает (если положить $x = z\tilde{y}$)

$$\tilde{y} \longrightarrow \hbar \partial_z \tag{3.153}$$

На этом этапе необходимо зафиксировать порядок некоммутирующих операторов. Мы используем нормальное упорядочение, т.е. всюду полагаем производные ∂_z справа от переменных z . Это дает следующие правила

$$\begin{aligned} &: K_{\hbar}^+(x) :=: K^+(x) : + \hbar x, \\ &: K_{\hbar}^-(x) :=: K^-(x) : + \hbar x, \\ &: \mathrm{tr} T_{\hbar}(x) :=: \mathrm{tr} T(x) : + \hbar x. \end{aligned} \tag{3.154}$$

Эти правила следуют из соотношения

$$x^2 \xrightarrow{\mathrm{Quant}} \hbar^2 z \partial_z z \partial_z = \hbar^2 z^2 \partial_z^2 + \hbar^2 z \partial_z =: \hat{x}^2 : + \hbar : \hat{x} : . \tag{3.155}$$

Подставив (3.153), получаем

$$[\hbar^2 \partial_z^2 - b_{\hbar}(z) \hbar \partial_z + c_{\hbar}(z)] \psi_{\text{Heisen}}(z) = 0, \quad (3.156)$$

где

$$b_{\hbar}(z) = b(z) - \frac{\hbar}{z}, \quad c_{\hbar}(z) = c(z), \quad (3.157)$$

а $b(z)$ и $c(z)$ даются (3.113):

$$b(z) = \frac{(q+1)H_2 + q(m_1^+ + m_2^+) + (m_1^- + m_2^-)}{(q-1)(z-q)} + \frac{(m_1^- + m_2^-)}{z} - \frac{(q+1)H_2 + (m_1^+ + m_2^+) + q(m_1^- + m_2^-)}{(q-1)(z-1)},$$

$$c(z) = \frac{q+1}{q} \frac{m_1^- m_2^- - H_1}{z} + \frac{m_1^- m_2^- + q m_1^+ m_2^+ - (1+q)H_1}{q(q-1)(z-q)} - \frac{q m_1^- m_2^- + m_1^+ m_2^+ - (1+q)H_1}{(q-1)(z-1)} + \frac{m_1^- m_2^-}{z^2}.$$

Вместо «классического» сдвига (3.79) $\tilde{y} \rightarrow \tilde{y} + \frac{1}{2}b(z)$ здесь возникает замена

$$\psi_{\text{Heisen}}(z) = \psi_{\text{Gaudin}}(z) \exp\left(\frac{1}{2\hbar} \int^z dz b_{\hbar}(z)\right) \quad (3.158)$$

которая приводит к уравнению

$$\left[\hbar^2 \partial_z^2 + c_{\hbar}(z) - \frac{1}{4} b_{\hbar}^2(z) + \frac{1}{2} (\partial_z b_{\hbar}(z)) \right] \psi_{\text{Gaudin}}(z) = 0. \quad (3.159)$$

Производя те же вычисления, что и в классическом случае, получаем

$$\left[-\hbar^2 \partial_z^2 + V_{\hbar}(z) - \frac{1-q}{z(z-1)(z-q)} H_{\hbar} \right] \psi_{\text{Heisen}}(z) = 0, \quad (3.160)$$

где $H_{\hbar} = H + \hbar m_q$, и

$$V_{\hbar}(z) = \frac{m_0^2 - \frac{\hbar^2}{4}}{z^2} + \frac{m_1(m_1 - \hbar)}{(z-1)^2} + \frac{m_q(m_q - \hbar)}{(z-q)^2} - \frac{m_0^2 + m_1(m_1 - \hbar) + m_q(m_q - \hbar) - m_{\infty}^2}{z(z-1)} \quad (3.161)$$

m_0 , m_1 , m_q и m_{∞} даются (3.117). Уравнение (3.160) — это в точности уравнение, которое было получено из рассмотрения конформных блоков⁷. В работе [26] было показано, что это уравнение дает квантовые периоды (монодромии вокруг A и B циклов), из которых получаются правильная функция Некрасова. Две волновые функции — ψ_{Heisen} и ψ_{Gaudin} —

⁷Существуют различные соглашения относительно того, как определять массами мультиплетов в ϵ -деформированной теории. Чтобы сравнить наши выражения и выражения в работе [11] необходимо произвести сдвиг: $m_{\text{our}}^{\pm} = m_{\text{AGT}}^{\pm} \pm \hbar/2$.

дают немного различные периоды и, следовательно различные препотенциалы, поскольку отличаются на фактор b_{\hbar} в уравнении (3.158). Разница в интегралах по периодам равна

$$\Delta\Pi = \oint b_{\hbar}(z) dz. \quad (3.162)$$

Однако эта разница не оказывает влияния на физические эффекты в калибровочной теории по следующей причине. Как мы кратко упоминали в разделе 3.3.2, линейный гамильтониан $H_2 = \sum_k \phi_k$, который входит в выражение для b_{\hbar} необходимо положить равным нулю в теории с калибровочной группой $SU(N)$. Оставшиеся слагаемые не зависят от гамильтонианов H_i , или, эквивалентно, от ϕ_k , которые соответствуют вакуумным модулям в калибровочной теории. Таким образом, вклад $\Delta\Pi$ от b_{\hbar} в монодромии является константой (зависящей только от масс m_k^{\pm}), его вклад в препотенциал линеен по вакуумным модулям и не входит в низкоэнергетический эффективный лагранжиан $\mathcal{L} = \int d^4\theta \mathcal{F}(\Psi)$.

Формулы (3.158) и (3.159) дают связь между волновыми функциями для \mathfrak{sl}_2 модели Годена, в то время как слячай \mathfrak{gl}_2 записывается проще:

$$\psi_{\text{Heisen}}(z) = \psi_{\text{Gaudin}}(z). \quad (3.163)$$

3.5.2 Общий случай

Квантование спектральной кривой XXX спиновой цепочки (3.78) с дифференциалом Зайберга–Виттена (3.93) производится заменой x на $\hbar w \partial_w$. Например, в случае $GL(2)$ мы получаем уравнение Бакстера:

$$\left(\text{tr } T(\hbar w \partial_w) - \frac{w}{1+q} K_+(\hbar w \partial_w) - \frac{q}{(1+q)w} K_-(\hbar w \partial_w) \right) \psi^{\text{Heisen}}(w) = 0. \quad (3.164)$$

Эквивалентным образом, для спектральной кривой Годена (3.70) квантование дается заменой $y \rightarrow \hbar\partial_z$:

$$\left(\prod_{i=1}^N (z\hbar\partial_z + v_i) + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k^1 \xi_k^1 + q\eta_k^q \xi_k^q}{q+1} \prod_{i \neq k}^N (z\hbar\partial_z + v_i) - \frac{z}{q+1} \prod_{i=1}^N (z\hbar\partial_z + v_i) - z^{-1} \frac{q}{q+1} \prod_{i=1}^N (z\hbar\partial_z - \mu_i) \right) \psi^{\text{Gaudin}}(z) = 0. \quad (3.165)$$

Конечно, дифференциальные операторы в скобках в уравнениях (3.164) и (3.165) могут быть отождествлены точно так же, как и классические спектральные кривые.

Уравнение Бакстера (3.164) выглядит так же, как и классическое уравнение спектральной кривой, за исключением подстановки $x \rightarrow \hbar z\partial_z$. Все производные $z\partial_z$ располагаются справа от всех функций переменной z (что согласуется с нашим предыдущим определением нормального упорядочения при замене $z \rightarrow \log z$).

Чтобы получить аналогичное выражение для квантовой системы Годена, необходимо также переместить все производные $z\partial_z$ направо. После этого эквивалентность становится полностью аналогична классическому случаю. Таким образом, определение «квантового детерминанта» должно быть следующим:

$$\text{“det”} (\hbar z\partial_z + zL_{\text{Gaudin}}(z)) \stackrel{\text{def}}{=} \text{все } z\partial_z \text{ справа.} \quad (3.166)$$

Теорема 4 $GL(k)$ спиновая цепочка Гейзенберга с N узлами и \mathfrak{gl}_N модель Годена с $k+2$ отмеченными точками спектрально дуальны друг другу на квантовом уровне со следующим соотношением между волновыми функциями:

$$\psi_{\text{xxx}}(z) = \psi_{\text{Gaudin}}(z), \quad (3.167)$$

т.е. уравнение Бакстера для цепочки Гейзенберга может быть записано как квантование спектральной кривой модели Годена с определенным выбором упорядочения операторов (3.166).

Небольшая проблема возникает только для \mathfrak{sl}_N модели Годена. В этом случае имеется дополнительный фактор, точно так же, как и в уравнении (3.158). Однако, этот фактор является контролируемым. Вычислим его для случая $GL(2)$ цепочки, т.е. в случае дуальности с четырехточечной моделью Годена.

Уравнение Бакстера для XXX спиновой цепочки можно переписать как полином от дифференциального оператора ∂_z (вместо $z\partial_z$). Чтобы это сделать, необходимо произвести упорядочение в выражении $(z\partial_z)^n$. Для этого, представим действие $(z\partial_z)^n$ как часть дилатации operator

$$(z\partial_z)^n = \frac{d^n}{d\alpha^n} e^{\alpha z \partial_z} \Big|_{\alpha=0}, \quad e^{\alpha z \partial_z} f(z) = f(e^\alpha z). \quad (3.168)$$

Тогда, используя ряд Тейлора для $f(z + z(e^{\alpha z} - 1))$, получаем

$$(z\partial_z)^n = \sum_{k=1}^n \tilde{C}_n^k z^k \partial_z^k, \quad \tilde{C}_n^k = \sum_{l=1}^k \frac{(-1)^{k-l} l^n}{(k-l)! l!} \equiv \sum_{l=1}^k (-1)^{k-l} \frac{l^n}{k!} \binom{k}{l}. \quad (3.169)$$

Коэффициенты \tilde{C}_n^k имеют следующие свойства:

$$\tilde{C}_n^1 = 1, \quad \tilde{C}_n^{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \tilde{C}_n^n = 1. \quad (3.170)$$

Например, последнее из них является хорошо известным комбинаторным тождеством [151]:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^r = \begin{cases} 0, & \text{при } r < n, \\ n!, & \text{при } r = n. \end{cases}$$

Наконец, для оператора $K^+(z\partial_z)$ имеем

$$K^+(\hbar z\partial_z) = \sum_{n=1}^N (-1)^n \sigma_n(\{m^+\}) (\hbar z\partial_z)^n = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^n (-1)^n \sigma_n(\{m^+\}) \hbar^n \tilde{C}_n^k z^k \partial_z^k \quad (3.171)$$

и аналогично для K^- , где $\sigma_n(\{m^+\})$ — элементарные симметрические полиномы. Теперь можно переписать уравнение Бакстера в желаемой форме, т.е. так, чтобы все операторы ∂_z были расположены справа

$$\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^n \left(H_{n+1} - \frac{z(-1)^n}{q+1} \sigma_n(\{m^+\}) - \frac{q(-1)^n}{(1+q)z} \sigma_n(\{m^-\}) \right) \hbar^n \tilde{C}_n^k z^k \partial_z^k \psi = 0 \quad (3.172)$$

Аналогично переходу от уравнения (3.106) к (3.107), можно написать это уравнение в виде:

$$\left(\hbar^N \partial_z^N - b_{\hbar}(z) \hbar^{N-1} \partial_z^{N-1} + \sum_{m=0}^{N-2} c_m(z) \hbar^m \partial_z^m \right) \psi = 0 \quad (3.173)$$

Из (3.166), (3.168) и (3.170) следует, что

$$b_{\hbar}(z) = \frac{(1+q)}{(z-1)(z-q)} \left(H_N + \frac{z \sum_{k=1}^N m_k^+}{1+q} + \frac{q \sum_{k=1}^N m_k^-}{(1+q)z} \right) - \hbar \frac{N(N-1)}{2z}. \quad (3.174)$$

Можно вновь изгнать $b_{\hbar}(z)$ из уравнения. Используя этот вывод, мы получаем

Теорема 5 [72] *$GL(2)$ XXX спиновую цепочку Гейзенберга на N узлах, определенную (3.89)–(3.109) и \mathfrak{gl}_N модель Годена (3.39)–(3.81) спектрально дуальны друг другу на квантовом уровне, причем волновые функции связаны соотношением:*

$$\psi_{\text{XXX}}(z) = \psi_{\text{Gaudin}}(z) e^{\frac{1}{N\hbar} \int^z b_{\hbar} dz}, \quad (3.175)$$

т.е. уравнение Бакстера для цепочки Гейзенберга можно переписать как квантование спектральной кривой модели Годена с упорядочением (3.166).

В самом деле, все классические утверждения верны при нашем выборе упорядочения операторов (3.166) в модели Годена. Итак, две системы в точности эквивалентны.

3.6 Комментарии и обсуждение

В этом разделе мы обсудим возможные обобщения и взаимосвязи моделей и их дуальностей. Во-первых, имеется широкий класс уравнений, сохраняющих монодромии, которые можно рассматривать как обобщение модели Годена.

- **Уравнения Пенлеве–Шлезингера.** В случае \mathfrak{gl}_2 пространство косета (3.41) — это фазовое пространство уравнения Пенлеве VI [153]. Уравнения Пенлеве можно понимать как уравнения, описывающие изомонодромные деформации [156] линейной системы

$$(\partial_z - L^G(z)) \Psi(z, q) = 0. \quad (3.176)$$

«Деформация» генерирует динамику относительно отмеченных точек. В случае четырехточечной модели Годена имеется только одна точка вставки оператора. В данном случае достаточно q :

$$(\partial_q - M_q^G(z)) \Psi(z, q) = 0, \quad M_q^G(z) = -\frac{A^q}{z - q}. \quad (3.177)$$

Уравнение нулевой кривизны является уравнением сохранения монодромии:

$$\partial_q L^G(z) - \partial_z M_q^G(z) + [L^G(z), M_q^G(z)] = 0. \quad (3.178)$$

Вычеты в точках $0, 1, q$ дают конечные уравнения на A^c , которые называются уравнениями Шлезингера:

$$\begin{aligned}\partial_q A^0 &= -\frac{1}{q}[A^0, A^q], \\ \partial_q A^1 &= \frac{1}{1-q}[A^1, A^q], \\ \partial_q A^q &= \frac{1}{q}[A^0, A^q] - \frac{1}{1-q}[A^1, A^q].\end{aligned}\tag{3.179}$$

После редукции (3.41) эти уравнения переходят в одно единственное уравнение: уравнение Пенлеве VI. То же самое может быть сделано и в общем случае матриц из \mathfrak{gl}_N и с любым количеством отмеченных точек. В работе [33] Ямада⁸ рассмотрел высшие уравнения Пенлеве, соответствующие конфигурации (3.44)–(3.50). Заметим, что если заменить ∂_q на ∂_t во всех уравнениях выше, то уравнение (3.179) описывает эволюцию в нередуцированной модели Годена, в то время как редуцированная модель описывается автономной версией соответствующих уравнений Пенлеве. Система Шлезингера — это неавтономная версия модели Годена:

$$\partial_{t_j} A_i = \frac{[A_i, A_j]}{z_i - z_j} \quad \rightarrow \quad \partial_{z_j} A_i = \frac{[A_i, A_j]}{z_i - z_j}\tag{3.180}$$

Связь между системами Годена и Шлезингера можно записать как:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda - L(z))\Psi = 0 \\ (\partial_{t_i} - M_i(z))\Psi = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\lambda \rightarrow \partial_z} \left\{ \begin{array}{l} (\partial_z - L(z))\Psi = 0 \\ (\partial_{z_i} - M_i(z))\Psi = 0 \end{array} \right. .\tag{3.181}$$

$$\partial_{t_i} L = [L, M_i] \quad \rightarrow \quad \partial_{z_i} L - \partial_z M = [L, M_i]\tag{3.182}$$

$$\{H_i, H_j\} = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_{t_i} H_j - \partial_{t_j} H_i = \{H_i, H_j\}$$

⁸Уравнения такого типа возникали ранее в контексте иерархий УС в работе [88].

Переход от системы Шлезингера к уравнению Пенлеве производится с помощью процедуры редукции:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Модель Годена} & \longrightarrow & \text{Система Шлезингера} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Редуцированная модель Годена} & \longrightarrow & \text{Уравнения Пенлеве}
 \end{array}$$

Перечислим задачи, которые связаны с дуальностью систем Годена и Шлезингера:

1. Рецепт (3.181) связывает изомонодромные деформации и задачу квантования. Соответствующее «изомонодромное квантование» было исследовано в работе [158, 159, 160, 161, 162, 163]. В то же время, естественное квантование модели Годена дается уравнениями Книжника-Замолодчикова-Бернара (КЗБ). Можно надеяться, что существует соответствие между решениями уравнений Бакстера и уравнений КЗБ.
2. В работе [101] было показано, что классическая линейная задача в правой части уравнения (3.181) приводит к нестационарной квантовой задаче для редуцированной модели, записанной в спектральных переменных. В то же время, Бажанов и Мангазеев показали [165], что уравнение Бакстера для некоторой специальной цепочки совместно с уравнением Ламэ. Таким образом, можно ожидать, что уравнения Бакстера совместны с некоторым нестационарным уравнением Шредингера.
3. В работе [33] были изучены высшие (связанные) уравнения типа Пенлеве, связанные со специальной конфигурацией (3.44)–(3.50). В простейшем случае соответствующей

автономной системой является BC_1 модель Калоджеро–Иноземцева, в то время как ее изомонодромная версия — уравнение Пенлеве VI, записанное в эллиптической форме [95]. Для случая \mathfrak{gl}_N можно надеяться найти эллиптические интегрируемые («бесспиновые») системы типа Калоджеро–Годена и соответствующие уравнения типа Пенлеве с $N-1$ степенями свободы и $2N$ константами связи.

4. Эллиптическую форму уравнения Пенлеве VI можно понимать как неавтономную версию XYZ спиновой цепочки с одним узлом, взаимодействующей с постоянным внешним магнитным полем⁹, т.е. с динамическими граничными условиями, удовлетворяющими уравнениям отражения [99, 152]. Таким образом, спектральная дуальность дает связь между XYZ и XXX цепочками, которую интересно было бы изучить детально.

- **Квантование.** Необходимо отметить, что мы не накладываем никаких граничных условий, т.е. не вполне рассматриваем не до конца определенную квантовую задачу, и не находим собственные функции явно. Мы сравниваем только уравнения Бакстера, которые даются квантованием спектральных кривых, записанных в разделенных переменных. Альтернативно, можно было сначала задать пространства решений, и затем проверить что они переходят друг в друга при преобразованиях дуальности. Такой подход был использован в работе [83, 84], где была рассмотрена близкая задача в терминах векторов Бете. Напомним, что матрица Лакса для

⁹Соответствующая механическая система — гиростат Жуковского–Вольтерра.

n -точечной редуцированной модели Годена имеет вид

$$L^G(z) = \sum_{c=1}^{n-1} \frac{A^c}{z-z_c} = \frac{1}{z} \left(-\Upsilon + \sum_{c=2}^n \frac{z_c A^c}{z-z_c} \right), \quad (3.183)$$

где z_1 полагается равной нулю и Υ — вычет в бесконечно удаленной точке ∞ . Выражение в скобках (в правой части уравнения (3.183)) совпадает со случаем, рассмотренным Мухиным, Тарасовым и Варченко. В работе [83, 84] они предложили дуальность между XXX спиновой цепочкой и тригонометрической моделью Годена на квантовом уровне, связывающую соответствующие вектора Бете. Их вывод использует пространства квазиполиномов (и квазиэкспонент), т.е. явный вид решений уравнений Бете. Он основан на линейных коммутационных соотношениях (следующих из алгебры Ли), в то время как в нашем случае модель Годена является рациональной (хотя и редуцированной), а скобки квадратичны. Таким образом, можно ожидать связи между результатами данной главы и результатами полученными в работе [83, 84], возникающей из квантовой версии дираковской редукции. На классическом уровне, главное отличие заключается в определении дифференциала Зайберга–Виттена. В нашем случае $dS = \lambda dz$, и замена переменных, при переходе к XXX цепочке дается: $z = w$, $\lambda = x/w$. В работе [83, 84] дифференциал, равен $dS = \lambda \frac{dz}{z}$ и соответствующая замена переменных имеет вид $z = w$, $\lambda = x$. Отметим также, что выражение в скобках (в правой части уравнения (3.183)) содержит постоянную часть (Υ), которая (без учета фактора $1/z$) приводит к полюсу второго порядка дифференциала $L^G(z)dz$ в точке ∞ . Такой типа моделей Годена был рассмотрен в работе [164].

Помимо подхода, рассмотренного в этой главе, были предложены

различные рецепты квантования модели Годена, например в работах [128] и [86, 87]). Эти рецепты подходят для нередуцированных моделей Годена. Таким образом, чтобы связать результаты работ [128] и [86, 87] с нашими, необходимо произвести (нетривиальную) квантовую процедуру редукции.

- **Орбиты высших рангов.** В данной главе мы рассмотрели спиновые цепочки с орбитами минимального ранга в каждом узле, т.е. $S^k \in \mathfrak{sl}_k$ сопряжена матрице вида $\text{diag}(r, \dots, r, -(k-1)r)$. Было бы также интересно описать спектральную дуальность для $GL(k)$ спиновых цепочек общего вида.

- **Анизотропные цепочки.** В следующей главе мы опишем еще одно интересное обобщение результатов этой главы. Оно возникает из пятимерной версии АГТ соответствия [89], [90, 91, 92], которое приводит к соответствию между двумя ХХЗ цепочками (см. [82, 93, 94]). На стороне конформной теории поля мы имеем дело с конформным блоком алгебры q -Вирасоро. В случае вставки вырожденного поля возникает разностной аналог уравнения Шредингера.

В работе [82] была предложена дуальность для пятимерных калибровочных теорий. Она связывает теории с калибровочными группами $SU(N)^{M-1}$ и $SU(M)^{N-1}$, компактифицированные на многообразии $\mathbb{R}^4 \times S^1$, где радиус окружности S^1 равен R_5 . На уровне интегрируемых систем, такой ситуации соответствует ХХЗ спиновая цепочка. В случае одной группы $SU(N)$ спектральную кривую можно записать в виде [93, 94]:

$$w + Q_{2N}(e^{2\zeta/R_5})w^{-1} = P_N(e^{2\zeta/R_5}), \quad (3.184)$$

где $Q_{2N}(\lambda) = \prod_{i=1}^N (\lambda - e^{2m_i^+/R_5})(\lambda - e^{2m_i^-/R_5})$ и $P_N(\lambda) = \prod_{i=1}^N (\lambda -$

e^{a/R_5}) — полином степени N , коэффициенты которого параметризуют кулоновскую ветвь вакуумного пространства модулей. Можно заметить, что спектральная кривая имеет тот же вид, что и в четырехмерном случае, однако записывается в переменных $(w, e^{2\zeta})$. Однако, дифференциал дифференциал Зайберга–Виттена записывается по-другому, $dS = \zeta dw/w$.

Из результатов работы [82] можно получить преобразование дуальности для спектральной кривой XXZ спиновой цепочки. Оно связывает две различных XXZ цепочки, соответствующие двум сторонам дуальности $SU(N)^{M-1} \leftrightarrow SU(M)^{N-1}$, т.е. \mathfrak{gl}_M спиновую цепочку с N узлами и \mathfrak{gl}_N цепочку с M узлами и спиновыми матрицами минимального ранга в каждом узле. Более конкретно, дуальность меняет местами переменные $w \leftrightarrow e^{2\zeta/R_5}$. Дифференциал Зайберга–Виттена явно инвариантен (с точностью до знака) при таком преобразовании: $dS = \ln e^{2\zeta/R_5} d \ln w \cong -d \ln e^{2\zeta/R_5} \ln w$. В следующей главе мы явно опишем эту дуальность.

Также чрезвычайно интересным представляется распространение полученных результатов на шестимерные теории (и соответственно эллиптические дифференциальные операторы и XYZ спиновые цепочки).

Глава 4

Спектральные дуальности в XXZ спиновых цепочках и пятимерные калибровочные теории

В этой главе, основанной на работе [74], мы покажем соответствие между подалгебрами Бете (т.е. подалгебрами коммутирующих интегралов движения) для XXZ спиновых цепочек. Заметим, что собственные значения универсальных разностных операторов (т.е. производящих операторов для коммутирующих интегралов) дают уравнение Бакстера, определяющее уравнения Бете квантовой системы. Таким образом, наш подход дает, хотя и непрямо, дуальность между решениями уравнений Бете. Для соответствия между XXX цепочками и моделями Годена, эта связь должна воспроизводить результаты работы [83, 84].

Наше рассмотрение квантовой дуальности будет состоять из двух шагов. Сначала мы докажем классическую дуальность, т.е. равенство спектральных кривых и изоморфизм пуассоновых структур. Затем мы докажем, что универсальные разностные операторы, представляющие собой квантование спектральных кривых, совпадают с нормально упорядоченными классическими выражениями (это является по сути утверждением в рамках рассмотрения одной конкретной системы, и само по себе не связано с дуальностью). Отсюда следует, что классическая дуальность сразу же поднимается на квантовый уровень. В качестве свидетельства в пользу нашей гипотезы, мы докажем дуальность в четырехмерном пределе, где она переходит в дуальность между XXX спиновой цепочкой и тригонометрической моделью Годена. В Главах 2 и 3, основанных на работах [72] и [73], мы доказали дуальность между XXX спиновой це-

почкой и *редуцированной* моделью Годена. Чтобы разрешить кажущееся противоречие, в этой главе мы докажем эквивалентность тригонометрической и редуцированной систем Годена. Для краткости мы приведем здесь только основные идеи доказательств.

Тот факт, что обычное преобразование Фурье дает *точную* спектральную дуальность между спиновыми цепочками, удивительно напоминает недавний результат, описывающий модулярное преобразование конформных блоков во всех порядках теории возмущений по родам [169, 170]. Таким образом, наши новые результаты добавляют уверенности в том, что квантовые дуальности могут оказаться проще, чем кажутся — в подходящих переменных они сводятся к преобразованию Фурье. Более того, эти переменные также являются естественными, т.е. выделенными с точки зрения каждой из дуальных интегрируемых систем.

4.1 XXZ спиновая цепочка

Мы будем рассматривать замкнутую XXZ спиновую цепочку с N узлами и спинами в симметрическом представлении квантовой группы $U_q(\mathfrak{gl}_K)$. Эти представления мы реализуем как подпространства пространства Фока, генерируемого q -Бозе операторами рождения. Антисимметрический случай полностью аналогичен, за исключением нескольких знаков. В принципе, любые представления могут быть получены с помощью процедуры слияния узлов. Матрица монодромии, или трансфер-матрица, цепочки равна произведению операторов Лакса, расположенных в цепочки и диагональной матрицы твиста $Q = \text{diag}(Q_1, \dots, Q_K)$:

$$\mathbf{T}(v) = Q \mathbf{L}^N(v/v_N) \cdots \mathbf{L}^1(v/v_1),$$

где

$$\mathbf{L}^i(v/v_i) = \sum_{a,b} E_{ab} \otimes \left(\delta_{ab} q^{\mathbf{N}_a^i + 1} + \frac{(\delta_{b>a} v + \delta_{a \geq b} v_i)(q - q^{-1})}{v - v_i} \mathbf{B}_a^i \mathbf{A}_b^i \right),$$

$a, b = 1, \dots, K$, $i = 1, \dots, N$, а \mathbf{A}_a^i , \mathbf{B}_a^i и \mathbf{N}_a^i образуют q -Бозе алгебру,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_a^i \mathbf{A}_b^j &= q^{\delta^{ij} \operatorname{sgn}(a-b)} \mathbf{A}_b^j \mathbf{A}_a^i, & [\mathbf{N}_a^i, \mathbf{A}_b^j] &= \delta^{ij} \delta_{ab} \mathbf{A}_b^j, \\ \mathbf{B}_a^i \mathbf{B}_b^j &= q^{\delta^{ij} \operatorname{sgn}(a-b)} \mathbf{B}_b^j \mathbf{B}_a^i, & [\mathbf{N}_a^i, \mathbf{B}_b^j] &= -\delta^{ij} \delta_{ab} \mathbf{B}_b^j. \\ \mathbf{A}_a^i \mathbf{B}_b^j &= q^{\delta^{ij} (\delta_{ab} - \operatorname{sgn}(a-b))} \mathbf{B}_b^j \mathbf{A}_a^i - \delta^{ij} \delta_{ab} q^{\mathbf{N}_a^i + 1}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

Все квантовые коммутирующие гамильтонианы $\mathcal{H}_m(v)$ можно компактно записать в виде *универсального разностного оператора* [171, 172, 173]:

$$\begin{aligned} \hat{D}_{N,K}(v, q^{2v\partial_v}) &= \sum_{m=0}^K (-1)^m \mathcal{H}_m(v) q^{2mv\partial_v} = \\ &= \sum_{m=0}^K \sum_{A=\{1 \leq a_1 < \dots < a_m \leq K\}} \det_{\text{col}} q \left(\mathbf{T}_{AA}(v) q^{2v\partial_v} \right), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где \mathbf{T}_{AA} — подматрица $m \times m$ матрицы \mathbf{T} , а *колоночный q -детерминант* подматрицы определяется как

$$\det_{\text{col}} q \mathbf{M}_{AA} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} (-q)^{\operatorname{inv}(\sigma)} \mathbf{M}_{a_{\sigma(1)} a_1} \cdots \mathbf{M}_{a_{\sigma(m)} a_m}. \quad (4.3)$$

Число инверсий перестановки σ равно $\operatorname{inv}(\sigma) = \sum_{a < b} \delta_{\sigma(a) > \sigma(b)}$.

4.2 Основное утверждение

Мы выдвигаем гипотезу, что универсальные дифференциальные операторы для \mathfrak{gl}_K цепочки с N узлами и \mathfrak{gl}_N цепочки с K узлами равны с точностью до множителей. Более явно

$$\prod_{i=1}^N (v - v_i) \hat{D}_{N,K}(v, q^{2v\partial_v}) = \prod_{a=1}^K (1 - w_a q^{2v\partial_v}) \hat{D}_{K,N}(q^{-2v\partial_v}, v) \quad (4.4)$$

В правой части w_a — неоднородности дуальной спиновой цепочки.

Чтобы сделать утверждение (4.4) точным, необходимо также задать изоморфизм между операторными алгебрами двух систем. Этот изоморфизм строится следующим образом. Определим «подкрученные» генераторы q -Бозе $\tilde{\mathbf{A}}_a^i, \tilde{\mathbf{B}}_a^i$:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}_a^i &= \mathbf{A}_a^i \prod_{j<i} q^{N_a^j}, \\ \tilde{\mathbf{B}}_a^i &= \prod_{j\leq i} q^{-N_a^j} \mathbf{B}_a^j.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Подкрученные генераторы удовлетворяют «подкрученной» q -Бозе алгебре, которая явно симметрична при замене индексов, нумерующих узлы, и индексов алгебры $i, j \leftrightarrow a, b$,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}_a^i \tilde{\mathbf{A}}_b^j &= q^{\delta_{ij} \operatorname{sgn}(a-b) + \delta_{ab} \operatorname{sgn}(i-j)} \tilde{\mathbf{A}}_b^j \tilde{\mathbf{A}}_a^i, \\ \tilde{\mathbf{B}}_a^i \tilde{\mathbf{B}}_b^j &= q^{\delta_{ij} \operatorname{sgn}(a-b) + \delta_{ab} \operatorname{sgn}(i-j)} \tilde{\mathbf{B}}_b^j \tilde{\mathbf{B}}_a^i, \\ \tilde{\mathbf{A}}_a^i \tilde{\mathbf{B}}_b^j &= q^{2\delta_{ij}\delta_{ab} - \delta_{ij} \operatorname{sgn}(a-b) - \delta_{ab} \operatorname{sgn}(i-j)} \tilde{\mathbf{B}}_b^j \tilde{\mathbf{A}}_a^i - \delta_{ab}\delta_{ij}q^2.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Итак, мы заключаем, что действие дуальности на подкрученные генераторы тривиально (D указывает на дуальную систему)

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}_a^i &= (\tilde{\mathbf{A}}_a^i)^D, \\ \tilde{\mathbf{B}}_a^i &= (\tilde{\mathbf{B}}_a^i)^D.\end{aligned}}\tag{4.7}$$

Сформулировав, таким образом, главное утверждение данной главы, мы переходим теперь к его доказательству в нескольких предельных случаях.

4.3 Классический предел

В классическом пределе квантовые операторы $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}$ переходят в функции \tilde{A}, \tilde{B}^1 . Универсальный разностной оператор $\hat{D}_{N,K}(q^{2v\partial_v}, v)$ переходит

¹При взятии предела необходимо правильным образом масштабировать исходные операторы, а именно $(q - q^{-1})\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}} \rightarrow \tilde{A}\tilde{B}$.

в пределе в уравнение спектральной кривой $\Gamma_{N,K}(w, v)$ интегрируемой системы, т.е. в характеристический многочлен матрицы монодромии. Дифференциал Зайберга–Виттена можно получить из квазиклассической асимптотики ядра универсального разностного оператора:

$$\hat{D}_{N,K}(v, q^{2v\partial_v}) Q(v) = 0, \quad Q(v) \rightarrow \exp \left[\int^v \lambda_{\text{SW}} + \dots \right]. \quad (4.8)$$

Более явно, дифференциал в данном случае дается выражением $\lambda_{\text{SW}} = \ln w d \ln v$.

Для классических систем дуальность сводится к равенству двух детерминантов, которое доказывается с помощью элементарной формулы: $\det W \det(X - YW^{-1}Z) = \det \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \det X \det(W - ZX^{-1}Y)$. В нашем случае блоки X , Y , Z и W — это $K \times K$, $K \times N$, $N \times K$ и $N \times N$ матрицы, равные

$$\begin{aligned} X_{ab} &= \delta_{ab}w - \delta_{a>b}w_a \sum_{a_2, \dots, a_N} (\delta_{aa_N} + \delta_{a_N>a} \tilde{B}_a^N \tilde{A}_{a_N}^N) \cdots (\delta_{a_2b} + \delta_{b>a_2} \tilde{B}_{a_2}^1 \tilde{A}_b^1), \\ W_{ij} &= \delta_{ij}(v - v_i) - \delta_{i>j} \sum_{a_i, \dots, a_j} \tilde{A}_{a_i}^i (\delta_{a_i a_{i-1}} + \delta_{a_{i-1}>a_i} \tilde{B}_{a_i}^{i-1} \tilde{A}_{a_{i-1}}^{i-1}) \cdots \\ &\quad \cdots (\delta_{a_{j+1}a_j} + \delta_{a_j>a_{j+1}} \tilde{B}_{a_{j+1}}^{j+1} \tilde{A}_{a_j}^{j+1}) \tilde{B}_{a_j}^j, \\ Y_{ai} &= w_a \sum_{a_i, \dots, a_N} (\delta_{aa_N} + \delta_{a_N>a} \tilde{B}_a^N \tilde{A}_{a_N}^N) \cdots (\delta_{a_{i+1}a_i} + \delta_{a_i>a_{i+1}} \tilde{B}_{a_{i+1}}^{i+1} \tilde{A}_{a_i}^{i+1}) \tilde{B}_{a_i}^i, \\ Z_{ia} &= \sum_{a_j, \dots, a_1} \tilde{A}_{a_j}^j (\delta_{a_j a_{j-1}} + \delta_{a_{j-1}>a_j} \tilde{B}_{a_j}^j \tilde{A}_{a_{j-1}}^{j-1}) \cdots (\delta_{a_2 a_1} + \delta_{a_1>a_2} \tilde{B}_{a_2}^2 \tilde{A}_{a_1}^1). \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали классическую дуальность между ХХЗ цепочками. В следующих разделах мы покажем, что *квантовые* универсальные разностные операторы спиновых цепочек даются нормально упорядоченными *классическими* выражениями, по крайней мере в пределе $q \rightarrow 1$. При учете этого утверждения, только что доказанные клас-

сические результаты приводят к квантовой спектральной дуальности при $q \rightarrow 1$, т.е. для XXX цепочек и систем Годена.

4.4 Дуальность между XXX цепочками и системами Годена

При $q \rightarrow 1$ спектральная дуальность между XXZ спиновыми цепочками сводится к дуальности между \mathfrak{gl}_K XXX спиновой цепочкой с N узлами и \mathfrak{gl}_N тригонометрической моделью Годена на цилиндре с $K - 2$ отмеченными точками². Чтобы получить XXX цепочку с левой стороны дуальности (4.4) необходимо положить $v = q^{2x}$, $v_i = q^{2x_i}$, а x, x_i держать постоянными при $q \rightarrow 1$. Подкрученные q -Бозе операторы $\tilde{\mathbf{A}}_a^i, \tilde{\mathbf{B}}_a^i$ при этом переходят в обычные операторы Бозе $\mathbf{a}_a^i, \mathbf{b}_a^i$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}_a^i, \mathbf{a}_b^j] &= [\mathbf{b}_a^i, \mathbf{b}_b^j] = 0, \\ [\mathbf{a}_a^i, \mathbf{b}_b^j] &= -\delta_{ab} \delta^{ij}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Универсальный разностной оператор для XXX спиновой цепочки можно компактно записать как колоночный детерминант³

$$\hat{D}_{N,K}(v, q^{2v\partial_v}) \rightarrow \det_{\text{col}} (\mathbf{1} - \mathbf{T}_{\text{XXX}}(x) e^{\partial_x}). \tag{4.10}$$

В правой части дуальности (4.4) при взятии предела нужно быть более осторожным. В отличие от спектрального параметра v , q -разностной оператор $q^{-2v\partial_v}$ не стремится к единице. Следовательно, в пределе $q \rightarrow 1$ универсальный разностной оператор $\hat{D}_{K,N}$ не сводится к обычному колоночному детерминанту. Вместо него возникает весьма сложное выражение, которое, насколько нам известно, ранее не было известно. Мы

²Цилиндр можно превратить в сферу с двумя дополнительными специальными отмеченными точками.

³Определение колоночного детерминанта получается из определения (4.3) если положить $q = 1$.

получаем следующий явный вид универсального разностного оператора для тригонометрической модели Годена:

$$\hat{D}_{K,N}(q^{-2v\partial_v}, v) \rightarrow \widetilde{\det}_{\text{col}}(x - \mathbf{L}_{\text{tG}}(e^{-\partial_x})), \quad (4.11)$$

где \mathbf{L}_{tG} — оператор Лакса для тригонометрической модели Годена, и

$$\begin{aligned} \widetilde{\det}_{\text{col}} \mathbf{M} &= \sum_{m=0}^{N-2} (-1)^m \sum_{J=\{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq N\}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (-1)^{\text{inv}(\sigma)} \prod_{\alpha=1}^m \left(\sum_{j=1}^{i_\alpha-1} \delta_{\sigma(j) > i_\alpha} \right) \cdot \\ &\cdot \mathbf{M}_{\sigma(1),1} \cdots \mathbf{M}_{\sigma(i_1-1),i_1-1} \delta_{\sigma(i_1)i_1} \mathbf{M}_{\sigma(i_1+1),i_1+1} \cdots \\ &\cdots \mathbf{M}_{\sigma(i_2-1),i_2-1} \delta_{\sigma(i_2)i_2} \mathbf{M}_{\sigma(i_2+1),i_2+1} \cdots \mathbf{M}_{\sigma(K),K}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Слагаемое с $m = 0$ дает обычный колоночный детерминант, в то время как остальные слагаемые являются поправками. Заметим также, что при $N = 1, 2$ поправки в действительности не возникают. Ниже мы докажем, что, замечательным образом, все поправочные слагаемые в точности сокращаются с поправками от нормального упорядочения детерминанта.

Теперь мы можем записать дуальность между ХХХ цепочкой и системой Годена следующим образом:

$$\boxed{\prod_{i=1}^N (x - x_i) \det_{\text{col}}(\mathbf{1} - \mathbf{T}_{\text{ХХХ}}(x)e^{-\partial_x}) = \prod_{a=1}^K (1 - Q_a e^{\partial_x}) \widetilde{\det}_{\text{col}}(x - \mathbf{L}_{\text{tG}}(e^{-\partial_x}))} \quad (4.13)$$

В следующем разделе мы используем тождества для нормального упорядочения детерминантов и классические вычисления для того, чтобы доказать эту дуальность.

4.5 Нормальное упорядочение универсальных разностных операторов

Введем понятие нормального упорядочения, которое понадобится нам для доказательства спектральной дуальности:

$$:F(\mathbf{b}, \mathbf{a}, x, \partial_x): = \left\{ \begin{array}{l} \text{все } \mathbf{b} \text{ и } x \text{ слева,} \\ \text{все } \mathbf{a} \text{ и } \partial_x \text{ справа} \end{array} \right\}. \quad (4.14)$$

Оказывается, что универсальный разностной оператор для ХХХ спиновой цепочки равен собственному нормальному упорядочению,

$$\boxed{\det_{\text{col}}(\mathbf{1} - \mathbf{T}_{\text{ХХХ}}(x)e^{\partial_x}) = : \det_{\text{col}}(\mathbf{1} - \mathbf{T}_{\text{ХХХ}}(x)e^{\partial_x}) :} \quad (4.15)$$

Доказательство проводится по индукции, аналогично работе [168]. Заметим, что $T(x)e^{\partial_x}$ уже нормально упорядочено. Шаг индукции дается следующим утверждением: записывая все необходимые свертки, можно показать, что для любого i

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_K} (\mathbf{1} - \mathbf{T}(x)e^{\partial_x})_{\sigma(1),1} \cdots (\mathbf{1} - \mathbf{T}(x)e^{\partial_x})_{\sigma(i),i} \cdots (\mathbf{1} - \mathbf{T}(x)e^{\partial_x})_{\sigma(K),K} = \\ & = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_K} (\mathbf{1} - \mathbf{T}(x)e^{\partial_x})_{\sigma(1),1} \cdots (\mathbf{1} - \mathbf{T}(x)e^{\partial_x})_{\sigma(i-1),i-1} \cdots (\mathbf{1} - \mathbf{T}(x)e^{\partial_x})_{\sigma(K),K} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Проходя справа налево, мы добьемся нормального упорядочения полного выражения.

Удивительным образом, похожее доказательство работает и для универсального дифференциального оператора тригонометрической модели Годена. В этом случае, однако, на каждом шаге мы получаем поправки, которые в точности сокращаются с дополнительными слагаемыми в

определении $\widetilde{\det}$. Индукция в данном случае проводится слева направо:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} : (x - \mathbf{L}(e^{-\partial_x}))_{\sigma(1),1} \cdots (x - \mathbf{L}(e^{-\partial_x}))_{\sigma(i),i} : \cdots (x - \mathbf{L}(e^{-\partial_x}))_{\sigma(N),N} = \\
& = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} : (x - \mathbf{L}(e^{-\partial_x}))_{\sigma(1),1} \cdots (x - \mathbf{L}(e^{-\partial_x}))_{\sigma(i+1),i+1} : \cdots (x - \mathbf{L}(e^{-\partial_x}))_{\sigma(N),N} + \\
& \quad + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \left(\sum_{j=1}^i \delta_{\sigma(j)>i} \right) : (x - \mathbf{L}(e^{-\partial_x}))_{\sigma(1),1} \cdots (x - \mathbf{L}(e^{-\partial_x}))_{\sigma(i),i} : \\
& \quad \cdot \delta_{\sigma(i+1),i+1} \cdots (x - \mathbf{L}(e^{-\partial_x}))_{\sigma(N),N} . \quad (4.17)
\end{aligned}$$

В конце концов, мы приходим к соотношению

$$\boxed{\prod_{a=1}^K (1 - Q_a e^{\partial_x}) \widetilde{\det}_{\text{col}} (x - \mathbf{L}_{\text{tG}}(e^{-\partial_x})) = : \prod_{a=1}^K (1 - Q_a e^{\partial_x}) \det_{\text{col}} (x - \mathbf{L}_{\text{tG}}(e^{-\partial_x})) :} \quad (4.18)$$

Заметим, что в правой части стоит обычный детерминант без поправочных слагаемых.

Мы показали, что для ХХХ цепочки и тригонометрической модели Годена, *квантовые* универсальные разностные операторы даются нормально упорядоченными *классическими* детерминантами. Можно ожидать, что аналогичное утверждение верно для более широкого класса систем. В частности, мы предполагаем, что такое же утверждение верно для ХХЗ спиновых цепочек⁴,

$$\boxed{\widehat{D}_{N,K}(v, q^{2v\partial_v}) = : \det_{\text{col}} (\mathbf{1} - \mathbf{T}_{\text{ХХЗ}}(v) q^{2v\partial_v}) :} \quad (4.19)$$

Доказательство дуальности между ХХХ цепочкой и тригонометрической моделью Годена (4.13) сводится к классическому вычислению. Мы

⁴В этом случае определение нормального упорядочения должно включать в себя лексикографическое упорядочение различных операторов $\widetilde{\mathbf{B}}$ и $\widetilde{\mathbf{A}}$.

уже произвели его в предыдущем разделе не только в пределе $q \rightarrow 1$, но и для общих значений q , т.е. для XXZ спиновых цепочек.

4.6 Тригонометрическая и редуцированная модель Годена

В этом разделе мы несколько отклонимся от рассмотрения XXZ цепочек и проясним связь между результатами данной главы и предыдущей. В Главе 3 мы доказали дуальность между XXX спиновой цепочкой и *редуцированной* моделью Годена. В данном разделе мы кратко опишем, почему эта модель эквивалентна *тригонометрической* модели Годена, по крайней мере на классическом уровне. Мы не будем здесь рассматривать квантовый случай, ограничившись замечанием, что рецепт квантования, полученный в Главе 3⁵ является формально сопряженным к уравнению (4.14)

Матрица Лакса тригонометрической системы Годена дается выражением

$$[L_{\text{tG}}]_{ij}(w) = \delta_{ij}x_i + \delta_{i>j} \sum_{a=1}^K a_a^i b_a^j + \sum_{a=1}^K \frac{w_a a_a^i b_a^j}{w - w_a}. \quad (4.20)$$

Она имеет линейные скобки Пуассона, определяемые классической тригонометрической r -матрицей. Можно явно убедиться, что редуцированная модель получается из тригонометрической с помощью калибровочного преобразования. Матрица этого калибровочного преобразования

⁵В той главе универсальные дифференциальные операторы (или, более точно, операторы Бакстера) записывались в Фурье-дуальных переменных. В наших новых обозначениях рецепт квантования состоит в том, что надо расположить все операторы x справа.

равна

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\delta_{i>j}}{x_i - x_j} \sum_{a_i, \dots, a_{j+1}} a_{a_i}^i \left(\delta_{a_i, a_{i-1}} + \frac{b_{a_i}^{i-1} a_{a_{i-1}}^{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) \dots$$

$$\dots \left(\delta_{a_{j+2}, a_{j+1}} + \frac{b_{a_{j+2}}^{j+1} a_{a_{j+1}}^{j+1}}{x_i - x_{j+1}} \right) b_{a_{j+1}}^j,$$

Две системы, таким образом полностью эквивалентны, $L_{\text{tG}}(w) = gL_{\text{redG}}g^{-1}$. Заметим, что скобки Пуассона для калибровочно преобразованной матрицы Лакса содержат квадратичную часть. При рассмотрении редуцированной системы Годена эта часть возникала из процедуры редукции Дирака.

4.7 Заключение и дальнейшие перспективы

В данной главе мы предложили гипотезу о спектральной дуальности между ХХЗ цепочками и доказали ее в классическом случае. Мы также получили явное выражение для универсального дифференциального оператора для тригонометрической системы Годена и доказали квантовую дуальность между ХХХ цепочками и моделями Годена. Мы получили компактные выражения для универсальных разностных операторов, используя понятие нормального упорядочения, и сделали предположение о связи классических и квантовых выражений. Мы также установили эквивалентность тригонометрической и редуцированной моделей Годена.

Наше доказательство дуальности довольно явное и не опирается на знание конкретных собственных (Бете) векторов квантовых гамильтонианов. Однако, для ХХХ цепочек и тригонометрических моделей Годена имеется красивая теорема, полученная Мухиным, Тарасовым и Варчен-

ко [174, 175], дающая связь между ядром универсального разностного оператора и векторами Бете. Можно надеяться, что подобная имеет место и для XXZ цепочек.

В конце концов, можно надеяться, что строгое доказательство квантовой спектральной дуальности для XXZ цепочек будет получено, если удастся доказать тождества нормального упорядочения (4.19). Вероятно, такое доказательство можно получить, воспользовавшись теми же рассуждениями, что и для тождеств (4.15) и (4.18).

С точки зрения калибровочной теории операторы **A** и **B** соответствуют некоторым операторам, расположенным на двумерных поверхностях. Универсальный разностной оператор дает условия квантования, которые определяют вакуумы теорий живущих на этих поверхностях. Более точно, вакуумному состоянию соответствует решение уравнения $\hat{D}_{N,K}(v, q^{2v\partial_v})|Q(v)\rangle = 0$ с тривиальной монодромией вокруг A -периодов спектральной кривой. С точки зрения (трехмерного расширения) гипотезы АГТ [89, 90, 91, 92] поверхностные операторы соответствуют вырожденным примарным полям в конформной теории поля, живущей на затравочной спектральной кривой. Таким образом, можно рассчитывать получить следствия спектральной дуальности для q -деформированной двумерной конформной теории поля. Интересные следствия такого сорта будут рассмотрены в Главе 6.

Можно также изучить непрерывный предел спектральной дуальности. В этом пределе должна возникать связь между непрерывным магнетиком Гейзенберга (или, в более общем случае, системами Хитчина в 1+1 измерениях [120, 176]) и пределом больших N для \mathfrak{gl}_N моделей Годена, рассмотренных в работе [177].

Было бы интересно также изучить связь между спектральной дуальностью и теорией узлов, что должно быть во многом аналогично связи между трехмерными и пятимерными теориями [178, 179]. В этом случае спектральная дуальность соответствует дуальности Хоу [180, 181], которая была недавно применена к теории гомологий узлов в работе [182, 183].

Отметим также особо работу [184], в которой аналогичная дуальность возникла с точки зрения трехмерных решеточных интегрируемых моделей. Связь наших результатов и трехмерных решеточных моделей представляется в данный момент чрезвычайно интересной и требует дальнейшего изучения.

Глава 5

Обобщенные полиномы Джека и соотношения АГТ для группы $SU(3)$

В этой главе, основанной на работе [75], мы явно найдем обобщенные полиномы Джека для группы $SU(3)$ и проверим, что их средние по мере Сельберга воспроизводят первые слагаемые разложения Некрасовских функций. Для того, чтобы вычислить средние, мы выведем W -условия для β -деформированной A_2 колчанной матричной модели. В разделе 5.1 мы вводим дифференциальный оператор, полиномиальные собственные функции которого дают обобщенные полиномы Джека, вычисляем их явно и проверяем их элементарные свойства. В разделе 5.2 мы выводим представление Доценко–Фатеева конформного блока в теории поля Тоды и демонстрируем, что АГТ соотношение в этом случае эквивалентно равенству средних от обобщенных полиномов Джека по мере Сельберга и функций Некрасова. Мы вычисляем средние с помощью W -условий и проверяем соответствующие факторизованные формулы на первых уровнях. Функции Некрасова и соотношения АГТ для группы $SU(3)$ выписаны в Дополнении А.1. W -условия приведены в Дополнении А.2.

5.1 Дифференциальный оператор

Обобщенные полиномы Джека $J_{\vec{\lambda}}(\{p_k^{(a)}\}|\beta, \{a_a\})$ нумеруются N диаграммами Юнга $\vec{\lambda} = \{\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \dots\}$. Они являются собственными функ-

циями дифференциального оператора $\hat{D} = \sum_{a=1}^N \hat{H}_a + \sum_{a<b} \hat{H}_{ab}$, где

$$2\hat{H}_a = \sum_{n,m \geq 0} \left(\beta(n+m)p_n^{(a)}p_m^{(a)} \frac{\partial}{\partial p_{n+m}^{(a)}} + nmp_{n+m}^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial p_n^{(a)} \partial p_m^{(a)}} \right) + \quad (5.1)$$

$$+ \sum_{n \geq 1} (2a_a + (1-\beta)(n-1)) np_n^{(a)} \frac{\partial}{\partial p_n^{(a)}},$$

$$\hat{H}_{ab} = (1-\beta) \sum_{n \geq 1} n^2 p_n^{(b)} \frac{\partial}{\partial p_n^{(a)}}.$$

с собственными значениями $\varkappa_{\vec{\lambda}} = \sum_{a=1}^N \sum_{(i,j) \in \lambda_a} (a_a - \beta(i-1) + (j-1))$.

Это определение позволяет найти первые несколько полиномов явно как линейные комбинации $p_k^{(a)}$. Поскольку собственные значения $\varkappa_{\vec{\lambda}}$ известны, задача нахождения собственных функций сводится к системе алгебраических уравнений. Перечислим элементарные свойства обобщенных полиномов Джека:

1. Ортогональность и нормировка.

Если положить $\tilde{J}_{\vec{A}}(p) = \prod_{a=1}^N m_{A_a}(p) + \dots$, где m_A — мономиальный симметрический полином, то семейство обобщенных полиномов Джека ортонормировано, $\langle \tilde{J}_{\vec{A}}^*, \tilde{J}_{\vec{B}} \rangle = \delta_{\vec{A}\vec{B}}$, по отношению к скалярному произведению

$$\langle f(p_k), g(p_k) \rangle = f \left(\frac{n}{\beta} \frac{\partial}{\partial p_k} \right) g(p_k) \Big|_{p_k=0}$$

Здесь сопряженные полиномы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{A_1, A_2, \dots, A_N}^*(p^{(1)}, \dots, p^{(N)} | \beta, a_1, \dots, a_N) &= \\ &= \tilde{J}_{A_N, A_{N-1}, \dots, A_1}^*(p^{(N)}, \dots, p^{(1)} | \beta, a_N, \dots, a_1). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Нам будет удобнее использовать другую нормировку

$$J_{\vec{A}}(p) = (-1)^{|\vec{A}|} \beta^{-2|\vec{A}|} \prod_{a<b} g_{A_b, A_a}(a_b - a_a) \tilde{J}_{\vec{A}}(p), \quad (5.3)$$

где g_{AB} приведены в Дополнении А.1. В этом случае нормы полиномов Джека равны векторной части функций Некрасова:

$$\langle J_{\vec{A}}^*, J_{\vec{B}} \rangle = \beta^{-4|\vec{A}|} z_{\text{vect}}(\vec{A}, \vec{a}) \delta_{\vec{A}, \vec{B}}, \quad (5.4)$$

2. «Обращение». Это соотношение можно вывести, если рассмотреть сопряженный к дифференциальному оператору \hat{D}_2 :

$$J_{\vec{A}} \left(-\frac{p_k^{(a)}}{\beta} \middle| \beta, \vec{a} \right) = (-\beta)^{(N-4)|\vec{A}|} J_{\vec{A}^T} \left(p_k^{(a)} \middle| \frac{1}{\beta}, -\frac{\vec{a}}{\beta} \right). \quad (5.5)$$

3. Тожество Коши.

$$\sum_{\vec{A}} \beta^{4|\vec{A}|} \frac{J_{\vec{A}}^*(p_k^{(a)}) J_{\vec{A}}(q_k^{(a)})}{z_{\text{vect}}(\vec{A}, \vec{a})} = \exp \left(\beta \sum_{k \geq 1} \sum_{a=1}^N \frac{p_k^{(a)} q_k^{(a)}}{k} \right). \quad (5.6)$$

При $\beta \rightarrow 1$ оператор \hat{D} становится оператором «вырезания и склейки» [185], а обобщенные полиномы Джека переходят в произведение полиномов Шура¹ $J_{\vec{\lambda}}(\{p_k^{(a)}\} | \beta \rightarrow 1, \{a_a\}) = \prod_{a=1}^N s_{\lambda^{(a)}}(\{p_k^{(a)}\})$.

Мы нашли и проверили свойства обобщенных полиномов Джека при $N = 3$ до уровня 3. Приведем здесь полиномы на уровне 1:

$$\begin{aligned} J_{\{\{1\}, \emptyset, \emptyset\}} &= \frac{(a_1 - a_2)(a_3 - a_1)p_1^{(1)}}{\beta} + \frac{(\beta - 1)(a_1 - a_3)p_1^{(2)}}{\beta} + \frac{(1 - \beta)(\beta - 1 - a_1 + a_2)p_1^{(3)}}{\beta} \\ J_{\{\emptyset, \{1\}, \emptyset\}} &= \frac{(a_3 - a_2)(\beta + a_1 - a_2 - 1)p_1^{(2)}}{\beta} + \frac{(\beta - 1)(\beta + a_1 - a_2 - 1)p_1^{(3)}}{\beta} \\ J_{\{\emptyset, \emptyset, \{1\}\}} &= -\frac{(\beta + a_1 - a_3 - 1)(\beta + a_2 - a_3 - 1)p_1^{(3)}}{\beta} \\ J_{\{\{1\}, \emptyset, \emptyset\}}^* &= \frac{(\beta - a_1 + a_2 - 1)(\beta - a_1 + a_3 - 1)p_1^{(1)}}{\beta} \\ J_{\{\emptyset, \{1\}, \emptyset\}}^* &= -\frac{(\beta - 1)(\beta - a_2 + a_3 - 1)p_1^{(1)}}{\beta} - \frac{(a_1 - a_2)(\beta - a_2 + a_3 - 1)p_1^{(2)}}{\beta} \\ J_{\{\emptyset, \emptyset, \{1\}\}}^* &= \frac{(\beta - 1)(\beta + a_2 - a_3 - 1)p_1^{(1)}}{\beta} + \frac{(\beta - 1)(a_1 - a_3)p_1^{(2)}}{\beta} + \frac{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)p_1^{(3)}}{\beta} \end{aligned}$$

¹Заметим также, что при $\beta \neq 1$ обобщенные полиномы Джека *не распадаются* в произведения полиномов Джека (как было предложено в работе [186]), а являются их линейными комбинациями.

5.2 Факторизация интегралов Доценко–Фатеева

Четырехточечный конформный блок в теории Тоды в представлении свободных полей дается интегралом Доценко–Фатеева:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= (1 - q)^{(\vec{\alpha}_2 \vec{\alpha}_3)} \times \\
&\times \left\langle \left\langle \prod_{a=1}^{N-1} \left(\prod_{i=1}^{n_+^a} (1 - qx_i^{(a)})^{v_-^a} \prod_{j=1}^{n_-^a} (1 - qy_j^{(a)})^{v_+^a} \prod_{i=1}^{n_+^a} \prod_{j=1}^{n_-^a} (1 - qx_i^{(a)} y_j^{(a)})^{2\beta} \right) \right\rangle \right\rangle \times \\
&\times \prod_{a=1}^{N-2} \prod_{i=1}^{n_+^a} \prod_{j=1}^{n_-^{a+1}} (1 - qx_i^{(a)} y_j^{(a+1)})^{-\beta} \prod_{a=1}^{N-2} \prod_{i=1}^{n_+^{a+1}} \prod_{j=1}^{n_-^a} (1 - qx_i^{(a+1)} y_j^{(a)})^{-\beta} \left. \right\rangle_{+} \left. \right\rangle_{-}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

где промежуточный импульс определяется экранирующими зарядами: $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + 2b \sum_{a=1}^N n_+^a \vec{e}_a$. Центральный заряд равен $c = (N - 1)(1 - N(N + 1)Q^2)$ а формулы для u_{\pm}^a, v_{\pm}^a приведены в Дополнении А.1. Средние по \mathfrak{sl}_N мере Сельберга определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\langle f(x) \rangle_{\pm} &= \\
&= \frac{1}{S} \int_{\mathcal{C}} \prod_{a=1}^{N-1} \left[d^{n_{\pm}^a} x^{(a)} \prod_{i=1}^{n_{\pm}^a} (x_i^{(a)})^{u_{\pm}^a} (x_i^{(a)} - 1)^{v_{\pm}^a} \prod_{1 \leq i < j \leq n_{\pm}^a} (x_i^{(a)} - x_j^{(a)})^{2\beta} \right] \times \\
&\quad \times \prod_{a=1}^{N-2} \prod_{i=1}^{n_{\pm}^a} \prod_{j=1}^{n_{\pm}^{a+1}} (x_i^{(a)} - x_j^{(a+1)})^{-\beta} f(x), \tag{5.8}
\end{aligned}$$

где S — интеграл без вставок. Соотношения АГТ требуют, чтобы размерности примарных полей, расположенных в точках $z = 1$ и $z = q$ являлись максимально вырожденными [12, 14]. Из этого следует, что $v_+^a = v_+ \delta_1^a$, $v_-^a = v_- \delta_{N-1}^a$ в сельберговских средних. Для таких значений параметров

коррелятор можно компактно записать в виде экспоненты:

$$\mathcal{B} = (1 - q)^{(\vec{\alpha}_2 \vec{\alpha}_3)} \left\langle \left\langle \exp \left[\beta \sum_{k>0} \frac{q^k}{k} \left(\sum_{a=1}^{N-2} \left(p_k^{(a+1)} - p_k^{(a)} \right) \left(q_k^{(a)} - q_k^{(a+1)} \right) + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + p_k^{(N-1)} \left(-q_k^{(N-1)} - \frac{v_-}{\beta} \right) + \left(-p_k^{(1)} - \frac{v_+}{\beta} \right) q_k^{(1)} \right) \right] \right\rangle \right\rangle_{+ -}, \quad (5.9)$$

где $p_k^{(a)} = \sum_{i=1}^{n_+^a} \left(x_i^{(a)} \right)^k$, $q_k^{(a)} = \sum_{j=1}^{n_-^a} \left(y_j^{(a)} \right)^k$.

Используя тождество Коши (5.6), мы получаем сумму факторизованных «плюс» и «минус» корреляторов:

$$Z = \sum_{\vec{A}} \frac{q^{|\vec{A}|} \beta^{4|\vec{A}|}}{z_{\text{vect}}(\vec{A}, a)} \left\langle J_{\vec{A}} \left(-p_k^{(1)} - \frac{v_+}{\beta}, p_k^{(2)} - p_k^{(1)}, \dots, p_k^{(N-1)} \right) \right\rangle_+ \\ \left\langle J_{\vec{A}}^* \left(q_k^{(1)}, q_k^{(1)} - q_k^{(2)}, \dots, -q_k^{(N-1)} - \frac{v_-}{\beta} \right) \right\rangle_-.$$

Чтобы проверить гипотезу АГТ, необходимо убедиться в том, что сельберговские средние обобщенных полиномов Джека воспроизводят отдельные слагаемые в функции Некрасова (A.1):

$$\left\langle J_{\vec{A}} \left(-p_k^{(1)} - \frac{v_+}{\beta}, p_k^{(2)} - p_k^{(1)}, \dots, p_k^{(N-1)} \right) \right\rangle_+ \stackrel{?}{=} \prod_{i=1}^N \prod_{f=1}^N f_{A_i}(m_f + a_i), \quad (5.10)$$

$$\left\langle J_{\vec{A}}^* \left(q_k^{(1)}, q_k^{(1)} - q_k^{(2)}, \dots, -q_k^{(N-1)} - \frac{v_-}{\beta} \right) \right\rangle_- \stackrel{?}{=} \prod_{i=1}^N \prod_{f=N}^{2N} f_{A_i}(m_f + a_i). \quad (5.11)$$

Для вычисления сельберговских средних для простейших диаграм необходимо использовать условия Вирасоро или W [187, 188]. Используя эту технику, мы проверили соотношения (5.10), (5.11) для $N = 3$ и диаграмм до второго порядка. Необходимые W -условия выведены в Дополнении А.2.

5.3 Заключение и перспективы

В этой главе мы нашли явно обобщенные полиномы Джека для группы $SU(3)$ и проверили соотношения АГТ для \mathfrak{sl}_3 сельберговских средних для нескольких первых уровней. Мы также вывели W -условия для бета-деформированной колчанной матричной модели, которые дают рекуррентные соотношения для корреляторов и в принципе позволяют произвести вычисления до любого уровня.

Интересно было бы рассмотреть связь между W -условиями для бета-ансамблей и семейством дифференциальных операторов, к которому принадлежит оператор \hat{D} . Также представляется вероятным, что общий вид этих операторов может быть найден с помощью методов, предложенных в работе [189].

Глава 6

Обобщенные полиномы Макдональда, спектральная дуальность для конформных блоков и АГТ соответствие в пяти измерениях

Данная глава основана на работе [76]. В разделе 6.1 мы введем обобщенный гамильтониан Макдональда, вычислим его собственные функции, т.е. обобщенные полиномы Макдональда, и проверим их элементарные свойства. В разделе 6.2 мы опишем q -деформацию интегрального представления Доценко–Фатеева для конформных блоков и введем разложение по обобщенным полиномам Макдональда. В разделе 6.3 мы выведем петлевые уравнения для соответствующего q -деформированного β -ансабля, найдем средние от обобщенных полиномов Макдональда и проверим АГТ соответствие. Мы докажем спектральную дуальность для q -деформированных конформных блоков теории Лиувилля в разделе 6.4 и сравним наши результаты с теорией топологических струн в разделе 6.5. Мы суммируем полученные результаты в разделе 6.6.

6.1 Обобщенные полиномы Макдональда

Обобщенные полиномы Макдональда — это симметрические полиномы от двух наборов переменных x_i и \bar{x}_i , нумеруемые парами диаграмм Юнга Y_1, Y_2 , и зависящие от дополнительного параметра Q . Обычные полиномы Макдональда можно получить как собственные функции гамильтонианов Рудженаарса (см. Приложение В.1). Аналогично, обобщенные полиномы Макдональда являются собственными функциями следующего обобщенного оператора Макдональда, который можно рассматри-

вать, как действие копроизведения на Динга-Иохара-Мики на обычный гамильтониан Рудженаарса [190]¹:

$$H_1^{\text{gen}} = \frac{1}{t-1} \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{dz}{z} \left[\left(e^{\sum_{n \geq 1} \frac{1-t^{-n}}{n} z^n p_n} e^{\sum_{n \geq 1} (q^n - 1) z^{-n} \frac{\partial}{\partial p_n}} - 1 \right) + \right. \\ \left. + Q \left(e^{\sum_{n \geq 1} \frac{1-t^{-n}}{n} z^n ((1-t^n q^{-n}) p_n + \bar{p}_n)} e^{\sum_{n \geq 1} (q^n - 1) z^{-n} \frac{\partial}{\partial \bar{p}_n}} - 1 \right) \right]. \quad (6.1)$$

Собственные значения обобщенного оператора Макдональда даются суммой собственных значений обычных гамильтонианов Рудженаарса:

$$H_1^{\text{gen}} M_{Y_1 Y_2}^{(q,t)}(Q|p, \bar{p}) = \left\{ \sum_{a=1}^2 Q^{a-1} \sum_{i \geq 1} (q^{Y_i^a} - 1) t^{-i} \right\} M_{Y_1 Y_2}^{(q,t)}(Q|p, \bar{p}). \quad (6.2)$$

Собственные значения H_1^{gen} невырождены, а значит собственные функции вполне определены. На практике можно найти обобщенные полиномы Макдональда решая линейные уравнения на коэффициенты полиномиальных собственных функций. Произвольный симметрический полином можно записать в виде линейной комбинации $p_Y = p_{Y_1} p_{Y_2} \cdots p_{Y_n}$, например $M_Y = \sum_{Y'} c_{Y' Y} p_{Y'}$. При действии оператора H_1^{gen} происходит сдвиг переменных p_n :

$$\exp \left(\sum_{n \geq 1} (q^n - 1) z^{-n} \frac{\partial}{\partial p_n} \right) f(p_k) = f(p_k + (q^k - 1) z^{-k}). \quad (6.3)$$

это дает рациональную функцию, так что ее вычеты легко вычисляются.

Свойства обобщенных полиномов Макдональда аналогичны свойствам обобщенных полиномов Джека, хотя и отличаются в некоторых деталях:

1. **Ортогональность сопряжение и нормировка.** Удобно нормировать обобщенные полиномы Макдональда следующим образом:

¹Мы домножаем \bar{p}_n на $(q/t)^{n/2}$ относительно обозначений в работе [190].

$M_{Y^1 Y^2}^{(q,t)}(Q|p, \bar{p}) = m_{Y^1}(p)m_{Y^2}(\bar{p}) + \sum_{\vec{W} \neq \vec{Y}} c_{\vec{Y}\vec{W}} m_{W^1}(p)m_{W^2}(\bar{p})$. Сопряженные полиномы Макдональда можно выразить как

$$M_{Y^1 Y^2}^{*(q,t)}(Q|p_n, \bar{p}_n) = M_{Y^2 Y^1}^{(q,t)}(Q^{-1}|\bar{p}_n, p_n - (1 - t^n/q^n)\bar{p}_n). \quad (6.4)$$

Заметим, что слагаемое, пропорциональное $1 - t^n/q^n$ исчезает как при $t = q$, так и в четырехмерном пределе $t = q^\beta, q \rightarrow 1$. Полиномы образуют ортогональную систему:

$$\langle M_{\vec{A}}^*, M_{\vec{B}} \rangle = \delta_{\vec{A}\vec{B}} \frac{C_{A^1} C_{A^2}}{C'_{A^1} C'_{A^2}} \quad (6.5)$$

по отношению к скалярному произведению

$$\langle f(p_k), g(p_k) \rangle = f \left(n \frac{1 - q^n}{1 - t^n} \frac{\partial}{\partial p_k} \right) g(p_k) \Big|_{p_k=0}.$$

Здесь

$$C_A = \prod_{(i,j) \in A} (1 - q^{A_i - j + 1} t^{A_j^T - i}), \quad C'_A = \prod_{(i,j) \in A} (1 - q^{A_i - j} t^{A_j^T - i + 1}). \quad (6.6)$$

Иногда удобнее использовать другую нормировку

$$\widetilde{M}_{\vec{Y}}(p) = G_{Y^2 Y^1}(Q^{-1}) \prod_{a=1,2} \prod_{(i,j) \in Y^a} (1 - q^{Y_i^a - j} t^{(Y^a)_j^T - i + 1}) \widetilde{M}_Y(p), \quad (6.7)$$

$$\widetilde{M}_{\vec{Y}}^*(p) = G_{Y^1 Y^2}(Q) \left(\frac{t}{q} \right)^{|\vec{Y}|} \prod_{a=1,2} \prod_{(i,j) \in Y^a} (1 - q^{-Y_i^a + j} t^{-(Y^a)_j^T + i - 1}) \widetilde{M}_Y^*(p), \quad (6.8)$$

где G_{AB} приведено в Приложении В.2. Эта нормировка подобрана так, чтобы нормы полиномов были равны векторной части функции Некрасова:

$$\langle \widetilde{M}_{\vec{Y}}^*(Q), \widetilde{M}_{\vec{W}}(Q) \rangle = z_{\text{vect}}(\vec{Y}, Q) \delta_{\vec{Y}, \vec{W}}, \quad (6.9)$$

Отметим также, что в этой нормировке обобщенные полиномы Макдональда зависят от параметров Q , q и t .

2. **Соотношения отражения.**

$$M_{\vec{Y}}^{(q,t)} \left(Q \left| -\frac{1-q^k}{1-t^k} p_k^{(a)} \right. \right) = (-1)^{|\vec{Y}|} \frac{C_{Y_1} C_{Y_2}}{C'_{Y_1} C'_{Y_2}} M_{\vec{Y}^T}^{(t^{-1}, q^{-1})} \left(Q \left| p_k^{(a)} \right. \right). \quad (6.10)$$

3. **Тождество Коши.** Обобщенные полиномы Макдональда образуют полный базис в пространстве симметрических функций от двух наборов переменных:

$$\begin{aligned} \sum_Y \frac{C'_{Y_1} C'_{Y_2}}{C_{Y_1} C_{Y_2}} M_{\vec{Y}}^*(Q|p_k^{(a)}) M_{\vec{Y}}(Q|q_k^{(a)}) &= \sum_{\vec{Y}} \frac{\widetilde{M}_{\vec{Y}}^*(Q|p_k^{(a)}) \widetilde{M}_{\vec{Y}}(Q|q_k^{(a)})}{z_{\text{vect}}(\vec{Y}, Q)} = \\ &= \exp \left(\sum_{k \geq 1} \sum_{a=1}^2 \frac{1-t^k}{1-q^k} \frac{p_k^{(a)} q_k^{(a)}}{k} \right). \end{aligned} \quad (6.11)$$

4. **Соотношения специализации.** При $q \rightarrow 1$, $t = q^\beta$ обобщенные полиномы Макдональда переходят в обобщенные полиномы Джека $M_{\vec{Y}}^{(q,t)}(q^{2a}|p_k) \rightarrow J_{\vec{Y}}^{(\beta)}(a|p_k)$. При $t = q$ гамильтониан H_1^{gen} переходит в сумму экранирующих операторов. Таким образом, собственные функции переходят в произведения полиномов Шура: $M_{Y_1 Y_2}^{(q,q)}(Q|p_k) = \chi_{Y_1}(p_k) \chi_{Y_2}(\bar{p}_k)$. Это согласуется с результатами работы [61, 191], где было показано, что именно базис полиномы Шура используется при доказательстве АГТ соотношений для $t = q$. Имеется следующая редукция к обычным полиномам Макдональда: $M_{Y_1 Y_2}^{(q,t)}(Q|0, \bar{p}_k) = M_{Y_2}^{(q,t)}(\bar{p}_k)$ и также $M_{Y_1 \emptyset}^{(q,t)}(Q|p_k, \bar{p}_k) = M_{Y_1}^{(q,t)}(p_k)$. Значение полиномов Макдональда на вейлевском векторе также могут быть найдены и просто выражаются через обычные

полиномы Макдональда:

$$M_{Y^1 Y^2}^{(q,t)} \left(Q \left| p_k = \frac{1 - Q^n}{1 - t^n}, \bar{p}_k = -\frac{1 - \frac{t^n}{q^n}}{1 - t^n} \right. \right) = M_{Y^1}^{(q,t)} \left(p_k = \frac{1 - Q^n}{1 - t^n} \right), \quad (6.12)$$

$$M_{Y^1 Y^2}^{(q,t)} \left(Q \left| p_k = 0, \bar{p}_k = -\frac{1 - Q^n}{1 - t^n} \right. \right) = M_{Y^2}^{(q,t)} \left(p_k = -\frac{1 - Q^n}{1 - t^n} \right). \quad (6.13)$$

Приведем здесь первые несколько обобщенных полиномов Макдональда:

$$\begin{aligned} M_{[1],\emptyset} &= p_1, \\ M_{\emptyset,[1]} &= \bar{p}_1 - \frac{p_1(q-t)}{q(Q-1)} \\ M_{[2],\emptyset} &= \frac{(q+1)(t-1)p_1^2}{2(qt-1)} + \frac{(q-1)(t+1)p_2}{2(qt-1)}, \\ M_{[1,1],\emptyset} &= \frac{p_1^2}{2} - \frac{p_2}{2}, \\ M_{[1],[1]} &= -\frac{p_1^2(q-t)(qtQ+qQ-tQ-2t+Q)}{2q(qQ-1)(Q-t)} + \\ &+ \frac{(q-1)(t+1)Qp_2(q-t)}{2q(qQ-1)(Q-t)} + \bar{p}_1 p_1, \\ M_{\emptyset,[2]} &= -\frac{(q+1)(t-1)p_1^2(q-t)(q^2+qtQ-qt-tQ)}{2q^2(Q-1)(qt-1)(q-Q)} - \\ &- \frac{(q-1)(t+1)p_2(q-t)(q^2-qtQ+qt-tQ)}{2q^2(Q-1)(qt-1)(q-Q)} \\ &+ \frac{(q+1)(t-1)\bar{p}_1 p_1(q-t)}{(qt-1)(q-Q)} + \frac{(q+1)(t-1)\bar{p}_1^2}{2(qt-1)} + \frac{(q-1)(t+1)\bar{p}_2}{2(qt-1)}, \\ M_{\emptyset,[1,1]} &= \frac{p_1^2(q-t)(q-t^2Q+tQ-t)}{2q^2(Q-1)(tQ-1)} - \\ &- \frac{p_2(q-t)(q-t^2Q-tQ+t)}{2q^2(Q-1)(tQ-1)} - \frac{\bar{p}_1 p_1(q-t)}{q(tQ-1)} + \frac{\bar{p}_1^2}{2} - \frac{\bar{p}_2}{2}. \end{aligned}$$

6.2 q -деформированные интегралы Доценко–Фатеева

В подходе Доценко–Фатеева конформные блоки записываются как многократные контурные интегралы от вставок вырожденных операторов. Специфика q -деформированного случая заключается в том, что эти интегралы можно взять по вычетам и свести к многократным q -интегралам Джексона (14). Мы будем использовать формализм q -интегралов, который оказывается более удобным, всюду в этой главе. Четырехточечный конформный блок дается следующим интегралом²

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \int_0^1 d_q^{N_+} z \int_0^{\Lambda^{-1}q/t} d_q^{N_-} z \prod_{i \neq j} \prod_{k=0}^{\beta-1} \left(1 - q^k \frac{z_i}{z_j} \right) \prod_{i=1}^{N_+ + N_-} z_i^{\alpha_0} \prod_{k=0}^{v_+ - 1} (1 - q^k z_i) \times \\
&\times \prod_{k=0}^{v_- - 1} \left(1 - q^k \Lambda \frac{t}{q} z_i \right) = C \int_0^1 d_q^{N_+} x \int_0^1 d_q^{N_-} y \Delta^{(q,t)}(x) \prod_{i=1}^{N_+} x_i^{u_+} \prod_{k=0}^{v_+ - 1} (1 - q^k x_i) \times \\
&\times \Delta^{(q,t)}(y) \prod_{i=1}^{N_-} y_i^{u_-} \prod_{k=0}^{v_- - 1} (1 - q^k y_i) \prod_{i=1}^{N_+} \prod_{j=1}^{N_-} \prod_{k=0}^{\beta-1} \left(1 - q^k \Lambda \frac{t}{q} \frac{x_i}{y_j} \right) \left(1 - q^k \Lambda \frac{x_i}{y_j} \right) \times \\
&\times \prod_{j=1}^{N_-} \prod_{n=0}^{v_+ - 1} \left(1 - \Lambda q^{-n} \frac{t}{q} \frac{1}{y_j} \right) \prod_{i=1}^{N_+} \prod_{l=0}^{v_- - 1} \left(1 - \Lambda q^l \frac{t}{q} x_i \right), \quad (6.14)
\end{aligned}$$

где $\Delta^{(q,t)}(x) = \prod_{k=0}^{\beta-1} \prod_{i \neq j} (x_i - q^k x_j)$, $u_+ = \alpha_0 + \beta(1 - N_+ - N_-)$ и $u_- = \alpha_0 + v_+ + \beta(1 + N_+ - N_-)$.

В последней строчке уравнения (6.14) можно применить тождество Коши (6.11) для обобщенных полиномов Макдональда, и получить раз-

²Мы предполагаем v_{\pm} , β натуральными, но все наши формулы имеют хорошо определенное аналитическое продолжение на нецелые значения.

ЛОЖЕНИЕ

$$\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^{N_+} \prod_{j=1}^{N_-} \prod_{k=0}^{\beta-1} \left(1 - q^k \Lambda \frac{t x_i}{q y_j} \right) \left(1 - q^k \Lambda \frac{x_i}{y_j} \right) \prod_{j=1}^{N_-} \prod_{n=0}^{v_+-1} \left(1 - \Lambda q^{-n} \frac{t}{q y_j} \right) \times \\
& \quad \times \prod_{i=1}^{N_+} \prod_{l=0}^{v_--1} \left(1 - \Lambda q^l \frac{t}{q} x_i \right) = \\
& = \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda^n}{n} \frac{1-t^n}{1-q^n} \left[\left(-p_n \frac{t^n}{q^n} - \frac{1-q^{-nv_+}}{1-t^{-n}} \right) q_{-n} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + p_n \left(-q_{-n} - \left(\frac{t}{q} \right)^n \right) \frac{1-q^{nv_-}}{1-t^n} \right] \right\} = \\
& = \sum_{A,B} \Lambda^{|A|+|B|} \frac{C_A C_B}{C'_A C'_B} M_{AB}^{*(q,t)} \left(q^{2a} \left| -\frac{t^n}{q^n} p_n - \frac{1-q^{-nv_+}}{1-t^{-n}}, p_n \right. \right) \times \\
& \quad \times M_{AB}^{(q,t)} \left(q^{2a} \left| q_{-n}, -q_{-n} - \left(\frac{t}{q} \right)^n \frac{1-q^{nv_-}}{1-t^n} \right. \right), \quad (6.15)
\end{aligned}$$

где $p_n = \sum_{i=1}^{N_+} x_i^n$, $q_n = \sum_{j=1}^{N_-} y_j^n$ и C_A, C'_A даются уравнениями (6.6). Заметим, что в формуле (6.15) возник новый параметр a . Это дополнительный параметр обобщенных полиномов Макдональда, который необходимо выбрать так, чтобы удовлетворялись соотношения (B.23) с параметрами сельберговского интеграла. Чтобы проверить АГТ соответствие (13), необходимо проверить что

$$\begin{aligned}
& \frac{C_{A^1} C_{A^2}}{C'_{A^1} C'_{A^2}} \left\langle M_{A^1 A^2}^{*(q,t)} \left(q^{2a} \left| -\frac{t^n}{q^n} p_n - \frac{1-q^{-nv_+}}{1-t^{-n}}, p_n \right. \right) \right\rangle_+ \times \\
& \quad \times \left\langle M_{A^1 A^2}^{(q,t)} \left(q^{2a} \left| q_{-n}, -q_{-n} - \frac{t^n}{q^n} \frac{1-q^{nv_-}}{1-t^n} \right. \right) \right\rangle_- = \\
& = \frac{\prod_{i=1}^2 \prod_{f=1}^2 f_{A^i}^+(m_f^+ + a_i) f_{A^i}^-(m_f^- + a_i)}{z_{\text{vect}}(A, a)} \quad (6.16)
\end{aligned}$$

где

$$\langle f(x) \rangle_{\pm} = \frac{\int d_q^{N_{\pm}} x \Delta^{(q,t)}(x) \prod_{i=1}^{N_{\pm}} x_i^{u_{\pm}} \prod_{k=0}^{v_{\pm}-1} (q^k x_i - 1) f(x)}{\int d_q^{N_{\pm}} x \Delta^{(q,t)}(x) \prod_{i=1}^{N_{\pm}} x_i^{u_{\pm}} \prod_{k=0}^{v_{\pm}-1} (q^k x_i - 1)} \quad (6.17)$$

и параметры сельберговской суммы отождествляются с параметрами калибровочной теории с помощью уравнений (В.23). В следующем разделе мы выведем петлевые уравнения для q -деформированного бета-ансамбля (6.17) для того, чтобы проверить равенство (6.16).

6.3 Петлевые уравнения для q -деформированного бета-ансамбля

Выпишем петлевые уравнения для интеграла Доценко–Фатеева. Они дают рекуррентные соотношения для средних от полиномов $p_Y = \prod_i p_{Y_i}$, и, таким образом, для средних любых симметрических функций.

Заметим, что q -интеграл от полной q -производной равен нулю зего

$$\int_0^1 d_q z \frac{1}{z} (1 - q^{z\partial_z}) g(z) = 0 \quad (6.18)$$

если $g(1) = 0$. Петлевое уравнение получается из простого тождества

$$\int d_q^N x \sum_{i=1}^N \frac{1}{x_i} (q^{x_i \partial_i} - 1) x_i \left[\frac{x_i - q}{z - x_i} \prod_{j \neq i} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j} \times \right. \\ \left. \times \prod_{k=1}^N \left(x_k^u \prod_{a=0}^{v-1} (q^a x_k - 1) \right) \Delta^{q,t}(x) f(x) \right] = 0 \quad (6.19)$$

где $f(x)$ — симметрический полином от переменных x_i , соответствующий вставке дополнительных вершинных операторов. Уравнение (6.19) в этом случае верно как ряд по отрицательным степеням³ z . q -производная от q -определителя Вандермонда дается выражением

$$q^{x_i \partial_{x_i}} \Delta^{q,t}(x) = \left[\left(\frac{t}{q} \right)^{N-1} \prod_{j \neq i} \frac{(qx_i - x_j)(tx_i - x_j)}{(x_i - x_j) \left(x_i - \frac{t}{q} x_j \right)} \right] \Delta^{q,t}(x). \quad (6.20)$$

³Положительные степени дают полные производные с исчезающими граничными значениями.

Используя это выражение, можно переписать уравнение (6.19) следующим образом:

$$\left\langle \sum_{i=1}^N \left[\frac{t^{N-1} q^{u+1} (q^v x_i - 1) (q^{x_i \partial_i} f(x))}{z - qx_i} \prod_{j \neq i} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} - \frac{(x_i - q) f(x)}{q(z - x_i)} \prod_{j \neq i} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j} \right] \right\rangle = 0, \quad (6.21)$$

где $\langle \dots \rangle$ обозначает q -сельберговское среднее. Перепишем это уравнение в более удобной форме. Во-первых, заметим, что сумму в уравнении (6.21) можно интерпретировать как сумму по вычетам:

$$\left\langle \oint_{\mathcal{C}_x} \frac{d\xi}{\xi} \left[\frac{t^{N-1} q^{u+1} (q^v \xi - 1) e^{\sum_{n>0} (q^n - 1) \xi^n \frac{\partial}{\partial p_n} f(p_n)}}{z - q\xi} \prod_{j=1}^N \frac{t\xi - x_j}{\xi - x_j} + \frac{(\xi - q) f(p_n)}{q(z - \xi)} \prod_{j=1}^N \frac{\xi - tx_j}{\xi - x_j} \right] \right\rangle = 0, \quad (6.22)$$

где контур \mathcal{C}_x обходит все точки x_i . Деформируя контур, мы получаем вычеты в точках $0, z, z/q$ и ∞ . Можно показать, что вычет в бесконечности содержит только положительные степени z и не оказывает влияния на рекуррентные соотношения для средних от p_n , а значит это слагаемое можно опустить. Другие вычеты дают

$$\begin{aligned} \xi = 0: & \quad t^N \left(\frac{q^{u+1}}{t} + 1 \right) \langle f(p_n) \rangle + \\ \xi = z: & \quad \left(\frac{z}{q} - 1 \right) \left\langle f(p_n) \exp \left[\sum_{n>0} \frac{1 - t^n}{n} z^{-n} p_n \right] \right\rangle + \\ \xi = z/q: & \quad t^{2N-1} q^{u+1} (q^{v-1} z - 1) \times \\ & \quad \times \left\langle f(p_n + (1 - q^{-n}) z^n) \exp \left[\sum_{n>0} \frac{1 - t^{-n}}{n} q^n z^{-n} p_n \right] \right\rangle = 0. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Аналогично, предполагая, что $f(x) = f(p_{-n})$ — симметрический полином из *отрицательных* степеней x_i , можно разложить уравнение (6.19) по *положительным* степеням z и получить рекуррентные соотношения для отрицательных степеней $p_{-Y} = \prod_i p_{-Y_i}$:

$$\left\langle -\frac{1}{q} (t^{2N-1} q^{u+v+1} + 1) f(p_{-n}) + \right. \\ \left. + t^N \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{z} \right) f(p_{-n}) \exp \left(\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n} (1 - t^{-n}) p_{-n} \right) + \right. \\ \left. + t^{N-1} q^{u+1} \left(q^{v-1} - \frac{1}{z} \right) f(p_{-n} + (1 - q^n) z^{-n}) \times \right. \\ \left. \times \exp \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} z^n q^{-n} (1 - t^n) p_{-n} \right) \right\rangle = 0. \quad (6.24)$$

Покажем как работают рекуррентные соотношения для простейшего примера. Рассматривая $f(p_n) = 1$ и разлагая уравнение (6.23) до нулевого порядка по z^{-1} , получаем среднее от p_1 :

$$\langle p_1 \rangle = \frac{q(t^N - 1)(t^{N-1} q^{u+1} - 1)}{(t - 1)(t^{2N-2} q^{u+v+2} - 1)}. \quad (6.25)$$

Это согласуется (при $Y = [1]$) с выражением для среднего от полиномов Макдональда [61, 191]⁴:

$$\langle M_Y(p_n) \rangle = \prod_{(i,j) \in Y} \frac{qt^{i-1}(1 - t^{N-i+1}q^{j-1})(1 - q^{u+j}t^{N-i})}{(1 - t^{Y_j^T - i + 1}q^{Y_i - j})(1 - q^{u+v+j+1}t^{2N-i-1})}, \quad (6.26)$$

$$\langle M_Y(p_{-n}) \rangle = \prod_{(i,j) \in Y} \frac{t^{i-N}(1 - t^{N-i+1}q^{j-1})(1 - q^{u+v-j+2}t^{N+i-2})}{q(1 - t^{Y_j^T - i + 1}q^{Y_i - j})(1 - q^{u-j+1}t^{i-1})}. \quad (6.27)$$

Можно показать, что средние отрицательных степеней связаны со средними от положительных степеней:

$$\langle p_{-Y} \rangle_{u,v,N} = q^{|Y|(1-v)} \langle p_Y \rangle_{-u-v-2+2\beta-2\beta N, v, N}. \quad (6.28)$$

⁴Общий масштаб отличается на $q^{|Y|(1-v)}$. Мы проверили это соотношение до четвертого уровня.

Можно проверить, что средние от обобщенных полиномов Макдональда даются факторизованными выражениями

$$\begin{aligned}
& \left\langle M_{Y^1 Y^2}^{(q,t)} \left(q^{-u_- - 1} t \left| q_{-k}, -q_{-k} - \left(\frac{t}{q} \right)^k \frac{1 - q^{kv_-}}{1 - t^k} \right. \right) \right\rangle_- = \frac{1}{G_{Y^2 Y^1}(t^{-1} q^{u_- + 1})} \times \\
& \times \prod_{(i,j) \in Y^1} \frac{q^{1-j+u_-+v_-} t^{2i-2} (t^{N_- - i + 1} q^{j-1} - 1) (t^{-N_- + 2 - i} q^{j-u_- - v_- - 2} - 1)}{q^{(Y^1)_{i-j} t^{(Y^1)_j^T - i + 1}} - 1} \times \\
& \times \prod_{(i,j) \in Y^2} \frac{(-q^{v_- - 1} t^i) (t^{N_- - i} q^{u_- + j} - 1) (t^{-N_- - i + 2} q^{j-v_- - 1} - 1)}{q^{(Y^2)_{i-j} t^{(Y^2)_j^T - i + 1}} - 1} \stackrel{(B.23)}{=} \\
& \stackrel{(B.23)}{=} (-1)^{|Y^1|} q^{\sum_{(i,j) \in Y^1} [j-2+\beta] + \sum_{(i,j) \in Y^2} [2j-3-2a+(2-i)\beta]} \times \\
& \times \prod_{k=1}^2 \prod_{(i,j) \in Y^k} \left(1 - q^{(Y^k)_{i-j} t^{(Y^k)_j^T - i + 1}} \right)^{-1} \frac{\prod_{f=1}^2 \prod_{k=1}^2 f_{Y^k}^-(m_f^- + a_k)}{G_{Y^2 Y^1}(q^{-2a})} \quad (6.29)
\end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned}
& \left\langle M_{Y^1 Y^2}^{*(q,t)} \left(q^{-u_+ - v_+ - 1} t^{1-2N_+} \left| -\frac{t^k}{q^k} p_k - \frac{1 - q^{-kv_+}}{1 - t^{-k}}, p_k \right. \right) \right\rangle_+ = \\
& = \frac{1}{G_{Y^1 Y^2}(t^{-2N_+ + 1} q^{-u_+ - v_+ - 1})} \times \\
& \times \prod_{(i,j) \in Y^1} \frac{(-q^{-3-u_+ - 2v_+ + 2j} t^{-2N_+ - i + 3}) (t^{N_+ + i - 1} q^{v_+ - j + 1} - 1) (t^{N_+ + i - 2} q^{u_+ + v_+ - j + 2} - 1)}{q^{(Y^1)_{i-j} t^{(Y^1)_j^T - i + 1}} - 1} \times \\
& \times \prod_{(i,j) \in Y^2} \frac{q^{-u_+ - v_+ - j} t^{-2N_+ + 2i} (t^{N_+ - i} q^{u_+ + j} - 1) (t^{N_+ - i + 1} q^{j-1} - 1)}{q^{(Y^2)_{i-j} t^{(Y^2)_j^T - i + 1}} - 1} \stackrel{(B.23)}{=} \\
& \stackrel{(B.23)}{=} (-1)^{|Y^2|} q^{\sum_{(i,j) \in Y^1} \beta i + \sum_{(i,j) \in Y^2} (2\beta i - \beta + 2a - j + 1)} \times \\
& \times \prod_{k=1}^2 \prod_{(i,j) \in Y^k} \left(1 - q^{(Y^k)_{i-j} t^{(Y^k)_j^T - i + 1}} \right)^{-1} \frac{\prod_{f=1}^2 \prod_{k=1}^2 f_{Y^k}^+(m_f^+ + a_k)}{G_{Y^1 Y^2}(q^{2a})} \quad (6.30)
\end{aligned}$$

Комбинируя уравнения (6.29), (6.30), мы получаем требуемый результат (6.16), с дополнительным фактором, соответствующим перенорми-

ровке константы связи $\Lambda \rightarrow \left(\frac{q}{t}\right)^2 \Lambda$:

$$\begin{aligned} & \frac{C_{A^1} C_{A^2}}{C'_{A^1} C'_{A^2}} \left\langle M_{A^1 A^2}^{*(q,t)} \left(q^{2a} \left| -\frac{t^n}{q^n} p_n - \frac{1 - q^{-nv_+}}{1 - t^n}, p_n \right. \right) \right\rangle_+ \times \\ & \quad \times \left\langle M_{A^1 A^2}^{(q,t)} \left(q^{2a} \left| q_{-n}, -q_{-n} - \frac{1 - q^{-nv_-}}{1 - t^{-n}} \right. \right) \right\rangle_- = \\ & = \left(\frac{q}{t}\right)^{2(|A^1|+|A^2|)} \frac{\prod_{i=1}^2 \prod_{f=1}^2 f_{A^i}^+(m_f^+ + a_i) f_{A^i}^-(m_f^- + a_i)}{z_{\text{vect}}(A, a)}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Это равенство дает доказательство пятимерных АГТ соотношений для четырехточечных конформных блоков для общих $q \neq t$. Однако, следует отметить, что оно основано на формулах (6.29), (6.30) для q -сельберговских средних. В Приложении В.3 мы приведем основные идеи, которые, с нашей точки зрения, могут привести к строгому доказательству этих тождеств. Мы проверили равенства (6.29) и (6.30) на первых трех уровнях.

6.4 Спектральная дуальность для конформных блоков

В данном разделе мы докажем спектральную дуальность для четырехточечных q -деформированных конформных блоков алгебры Вирасоро, используя идеи, предложенные в работе [64, 65]. Мы запишем интегралы Доценко–Фатеева как явные суммы по диаграммам Юнга, и используем комбинаторные тождества, чтобы переписать их в виде функций Некрасова.

Рассмотрим q -сельберговский интеграл, фигурирующий в представлении Доценко–Фатеева для q -деформированной конформной теории поля (6.17)

$$\int d_q^N x \Delta^{(q,t)}(x) f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^N} \Delta^{(q,t)}(x) f(x)|_{x_i = q^{k_i}}. \quad (6.32)$$

Если принять во внимание нули q -определителя Вандермонда $\Delta^{(q,t)}$, то окажется что x_i должны иметь вид $q^{R_i}t^{N-i}$ для некоторой диаграммы R . Мы, таким образом, записываем сумму в представлении Доценко–Фатеева (6.14) как сумму по диаграммам Юнга

$$\frac{\mathcal{B}}{B_{\emptyset\emptyset}} = \sum_{R_+, R_-} \frac{B_{R_+R_-}}{B_{\emptyset\emptyset}}, \quad (6.33)$$

где $B_{R_+R_-}$ — подинтегральное выражение из уравнения (6.14), вычисленное в точке $x_i = q^{R_+,i}t^{N_+-i}$, $y_j = q^{R_-,j}t^{N_--j}$. Мы нормируем сумму так, что слагаемое, соответствующее пустой диаграмме равно единице.

Используя соотношения, приведенные в Дополнении В.4, получаем компактное выражение для $B_{R_+R_-}/B_{\emptyset\emptyset}$ (в вычислениях мы умножаем все x_i и y_j на фактор q , что не сказывается на конечном ответе):

$$\begin{aligned} \frac{B_{R_+R_-}}{B_{\emptyset\emptyset}} &= \prod_{(i,j) \in R_+} \frac{q^{u_+}t^{2i-2}(1 - q^{v_++j}t^{N_+-i})(1 - q^{j-1}t^{N_+-i+1})}{(q^{R_+,i-j}t^{R_+,j}^{T_{+,-i+1}} - 1)(q^{R_+,i-j+1}t^{R_+,j}^{T_{+,-i}} - 1)} \times \\ &\quad \times (1 - \Lambda q^{j-2}t^{N_++2-i})(1 - \Lambda q^{j+v_- - 1}t^{N_+-i+1}) \times \\ &\quad \times \prod_{(i,j) \in R_-} \frac{q^{u_-}t^{2i-2}(1 - q^{j+v_-}t^{N_--i})(1 - q^{j-1}t^{N_--i+1})}{(q^{R_-,i-j}t^{R_-,j}^{T_{-,-i+1}} - 1)(q^{R_-,i-j+1}t^{R_-,j}^{T_{-,-i}} - 1)} \times \\ &\quad \times (1 - \Lambda q^{-j}t^{i-N_-})(1 - \Lambda q^{-j-v_+ - 1}t^{i-N_-+1}) \times \\ &\quad \times \frac{1}{G_{R_+R_-} \left(\Lambda \frac{t}{q} t^{N_+-N_-} \right) G_{R_+R_-} (\Lambda t^{N_+-N_-})} = \\ &= (\Lambda^\vee)^{|R_+|+|R_-|} \frac{\prod_{k=\pm} \prod_{f=1}^2 f_{R_k}^+(a_k^\vee + m_f^{\vee,+}) f_{R_k}^-(a_k^\vee + m_f^{\vee,-})}{z_{\text{vect}}(R_+, R_-, a_k^\vee)}, \quad (6.34) \end{aligned}$$

где f^\pm , G_{AB} и z_{vect} приведены в Дополнении В.2,

$$\begin{aligned}
a_+^\vee &= -a_-^\vee = a^\vee \\
\Lambda^\vee &= \Lambda^{-1} q^{u_++v_++1} t^{N_++N_- - 2} = \Lambda^{-1} q^{u_-+1} t^{N_- - N_+ - 2} = \Lambda^{-1} q^{m_2^- - m_2^+} t^{-1}, \\
2a^\vee &= \tau - 1 + \beta(N_+ - N_- + 1), \\
m_1^{\vee,+} &= a^\vee + v_- + 1 + \beta(N_- - 1), \\
m_2^{\vee,+} &= a^\vee + \beta N_-, \\
m_1^{\vee,-} &= a^\vee - \tau + 1 + \beta N_- - \beta, \\
m_2^{\vee,-} &= a^\vee - \tau + v_+ + 2 + \beta N_- - 2\beta,
\end{aligned} \tag{6.35}$$

и $\tau = \frac{\ln \Lambda}{\ln q}$. Последняя строчка в уравнении (6.34) явно равна спектрально дуальной функции Некрасова.

Поскольку мы доказали как горизонтальные, так и вертикальные равенства в уравнении (19), диагональное соотношение тоже должно выполняться. Итак, мы получили (непрямое) доказательство спектральной дуальности для $SU(2)$ статсумм Некрасова. В итоге, из этого следует, что все дуальности на диаграмме (20) верны.

6.5 Соответствие с теорией топологических струн

В данном разделе мы кратко опишем значение проведенных нами вычислений с точки зрения теории топологических струн. В этом разделе мы ограничимся здесь случаем $t = q$.

Во-первых, заметим, что вертикальная половинка диаграммы с Рис. в действительности соответствует среднему обобщенного полинома Макдональда (который при $t = q$ является просто произведением полиномов

Шура):

$$= \prod_{k=1}^2 \prod_{(i,j) \in Y_k} \frac{q^{2i+m_2^-+a_k-j}}{1 - q^{(Y^k)_i-j+(Y^2)_j-i+1}} \frac{\prod_{f=1}^2 f_{Y_k}^-(m_f^- + a_k)}{G_{Y_1 Y_2}(q^{2a})} =$$

$$= (-1)^{|Y_1|} q^{3 \sum_{(i,j) \in Y_1} (i-j) + 2 \sum_{(i,j) \in Y_2} (i-j)} Q_1^{|Y_1|+|Y_2|} \langle M_{Y_1 Y_2}^* \rangle_- \quad (6.36)$$

где

$$Q_F = q^{2a}, \quad Q_1^- = q^{-m_1^- - a}, \quad Q_2^- = q^{m_2^- - a} \quad (6.37)$$

Это равенство говорит нам, что вертикальную половинку торической диаграммы можно отождествить с вертексным оператором, расположенным в точке $z = 1$ в конформном блоке, как мы и предполагали в уравнении (21).

Конечно, вычисления для горизонтальных половинок, которые соответствуют подинтегральным выражениям в интегралах Доценко–Фатеева (см. уравнение (22)):

$$= \frac{\prod_{k=\pm} \prod_{f=1}^2 f_{R_k}^+(a_k^v + m_f^{v,+}) f_{R_k}^+(a_k^v + m_f^{v,-})}{z_{\text{vect}}(R_+, R_-, a_k^v)}$$

6.6 Заключение

В этой главе мы развили формализм, позволяющий изучать q -деформированные бета-ансамбли и нашли замечательные факторизованные формулы для средних от обобщенных полиномов Макдональда. Мы доказали, спектральную дуальность для $SU(2)$ функций Некрасова и четырехточечных конформных блоков, исследовав явные выражения для интегралов Доценко–Фатеева. Мы также получили связь между частями статсуммы топологических струн и вершинными операторами теории Лиувилля.

Заключение

Перечислим основные результаты, полученные в диссертации:

1. Получено пертурбативное решение уравнения Бакстера для XXX спиновой цепочки Гейзенберга с N узлами. В первых нескольких порядках разложения по константе связи и квазиклассического разложения проверено, что периоды решения воспроизводят инстантонные поправки к препотенциалу $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории с калибровочной группой $SU(N)$ и $2N$ гипермультиплетами в фундаментальном представлении. Для $N = 2$ совпадение также проверено для пертурбативной части во всех порядках квазиклассического разложения.
2. Доказана точная эквивалентность (спектральная дуальность) \mathfrak{gl}_K XXX спиновой цепочки Гейзенберга с N узлами и редуцированной модели Годена с алгеброй \mathfrak{gl}_N и $K + 2$ отмеченными точками на сфере как в классическом, так и в квантовом случае. Выяснена связь между параметрами дуальных систем.
3. Доказана спектральная дуальность между \mathfrak{gl}_K XXZ спиновой цепочкой с N узлами и \mathfrak{gl}_N XXZ спиновой цепочкой с K узлами в классическом пределе. Выведено новое выражение для квантовых гамильтонианов тригонометрической модели Годена. Доказаны тождества нормального упорядочения для производящих операторов квантовых гамильтонианов XXX цепочек и тригонометрических моделей Годена. Доказана точная эквивалентность между тригонометрической и редуцированной моделями Годена.
4. Получены выражения для обобщенных полиномов Джека для группы $SU(3)$. Выведены петлевые уравнения для \mathfrak{sl}_3 интегралов

Сельберга. Вычислены средние от нескольких низших обобщенных полиномов Джека по \mathfrak{sl}_3 мере Сельберга. Проверено, что эти средние воспроизводят функции Некрасова для группы $SU(3)$.

5. Получены выражения для обобщенных полиномов Макдональда. Выведены петлевые уравнения для q -деформированного β -ансамбля. Вычислены средние от нескольких низших обобщенных полиномов Макдональда. Проверено, что средние воспроизводят пятимерные функции Некрасова для группы $SU(2)$. Доказана спектральная дуальность для четырехточечных конформных блоков q -деформированной алгебры Вирасоро, а также для функций Некрасова для группы $SU(2)$. Выяснена связь между частями q -деформированного конформного блока и элементами частями статсуммы топологических струн на торическом многообразии Калаби-Яу.

В заключение я хотел бы выразить свою искреннюю признательность научному руководителю В. А. Рубакову за поддержку и внимание к работе.

Я признателен своим коллегам и соавторам А. Морозову, Анд. Морозову, А. Миронову, С. Миронову, А. Зотову и Б. Рунову за плодотворную совместную работу.

Я хотел бы отметить гостеприимство Международного института физики Университета Риу Гранде до Норте, где была выполнена часть расчетов, вошедших в диссертацию.

Я благодарен всем сотрудникам и аспирантам Отдела теоретической физики ИЯИ РАН и ИТЭФ за прекрасную творческую атмосферу и доброжелательность.

Также я хотел бы поблагодарить учителей и преподавателей, которые на протяжении моего обучения щедро и бескорыстно делились со мной своими знаниями, и таким образом сделали мою научную работу возможной.

Приложение А

Функции Некрасова и петлевые уравнения для группы $SU(3)$

А.1 Функции Некрасова и соотношения АГТ для группы $SU(3)$

Функции Некрасова для $U(N)$ калибровочной теории с $N_f = 2N$ гипермультиплетами в фундаментальном представлении равна

$$Z_{\text{Nek}} = \sum_{\vec{A}} q^{|\vec{A}|} \frac{\prod_{i=1}^N \prod_{f=1}^{2N} f_{A_i}(m_f + a_i)}{z_{\text{vect}}(\vec{A}, \vec{a})}, \quad (\text{A.1})$$

где $f_A(x) = \prod_{(i,j) \in A} (x + \epsilon_1(i-1) + \epsilon_2(j-1))$, $z_{\text{vect}}(\vec{A}, \vec{a}) = \prod_{i,j=1}^N g_{A_i A_j}(a_i - a_j)$ и

$$g_{AB}(x) = \prod_{s \in A} (x + \epsilon_1 \text{Arm}_A(s) - \epsilon_2 \text{Leg}_B(s) + \epsilon_1) \times \\ \times (x + \epsilon_1 \text{Arm}_A(s) - \epsilon_2 \text{Leg}_B(s) - \epsilon_2).$$

Соотношения АГТ для $N = 3$ записываются следующим образом:

$$b(\vec{\alpha}_1 \cdot \vec{e}_a) = u_+^a = m_a - m_{a+1} - 1 + \beta, \quad b(\vec{\alpha}_3 \cdot \vec{e}_a) = v_-^a = -\delta_a^{N-1} \sum_{b=1}^N \tilde{m}_b, \\ b(\vec{\alpha}_4 \cdot \vec{e}_a) = u_-^a = \tilde{m}_a - \tilde{m}_{a+1} - 1 + \beta, \quad b(\vec{\alpha}_2 \cdot \vec{e}_a) = v_+^a = -\delta_a^1 \sum_{b=1}^N m_b, \\ \beta n_+^1 = a_2 + a_3 + m_2 + m_3, \quad \beta n_+^2 = a_3 + m_3,$$

где $\tilde{m}_a = m_{N+a}$ и $a = 1, 2$. Массы m_a , вакуумное среднее значение a_i и $\epsilon_{1,2}$ все имеют размерность массы. В этой главе мы полагаем общий масштаб масс таким, чтобы $\epsilon_1 = -b^2$, $\epsilon_2 = 1$. В выражениях, содержащих полиномы Джекка мы также используем параметр $\beta = b^2$.

А.2 Условия W_3 и Вирасоро для \mathfrak{sl}_3 сельберговских средних

Условия Вирасоро для интегралов Сельберга записываются следующим образом

$$\begin{aligned} & \left\langle \left[\hat{A}(z) - \hat{B}(z) - \beta \rho_1(z) \rho_2(z) \right] \Phi(w, \bar{w}) \right\rangle = 0, \quad \text{где} \quad (\text{A.2}) \\ \hat{A}(z) \Phi(w, \bar{w}) &= \left[(\beta - 1) \partial_z \rho_1(z) + \beta \rho_1^2(z) + \frac{u_1 \rho_1(z)}{z} + \frac{v_1 \rho_1(z)}{z-1} - \frac{u_1 \rho_1(0)}{z} - \frac{v_1 \rho_1(1)}{z-1} + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{l=1}^m \frac{1}{\rho_1(w_l)} \partial_{w_l} \left(\frac{\rho_1(z) - \rho_1(w_l)}{z - w_l} \right) \right] \Phi(w, \bar{w}), \\ \hat{B}(z) \Phi(w, \bar{w}) &= \left[(1 - \beta) \partial_z \rho_2(z) - \beta \rho_2^2(z) - \frac{u_2 \rho_2(z)}{z} + \frac{u_2 \rho_2(0)}{z} - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{\bar{l}=1}^{\bar{m}} \frac{1}{\rho_2(\bar{w}_{\bar{l}})} \partial_{\bar{w}_{\bar{l}}} \left(\frac{\rho_2(z) - \rho_2(\bar{w}_{\bar{l}})}{z - \bar{w}_{\bar{l}}} \right) \right] \Phi(w, \bar{w}). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

где $\rho_a(z) = \sum_{i=1}^{N_a} \frac{1}{z - x_i^{(a)}}$, и $\Phi(w, \bar{w}) = \prod_{k=1}^m \rho_1(w_k) \prod_{\bar{k}=1}^{\bar{m}} \rho_2(\bar{w}_{\bar{k}})$. W -условия даются выражениями

$$\begin{aligned} & \left\langle \left[\beta \rho_1(z) \rho_2(z) (\rho_1(z) - \rho_2(z)) + (\beta - 1) \rho_2(z) \partial_z \rho_1(z) + \frac{\beta - 1}{\beta} \partial_z \hat{B}(z) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(\frac{u_1 + u_2}{\beta z} + \frac{v_1}{\beta(z-1)} \right) \hat{B}(z) + \left(\frac{u_1}{z} + \frac{v_1}{z-1} \right) \rho_1(z) \rho_2(z) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{\beta} \sum_{l=1}^m \frac{1}{\rho_1(w_l)} \partial_{w_l} \left(\frac{\hat{B}(z) + \beta \rho_1(z) \rho_2(z) - \hat{B}(w_l) - \beta \rho_1(w_l) \rho_2(w_l)}{z - w_l} \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{\beta} \sum_{\bar{l}=1}^{\bar{m}} \frac{1}{\rho_2(\bar{w}_{\bar{l}})} \partial_{\bar{w}_{\bar{l}}} \left(\frac{\hat{B}(z) - \hat{B}(\bar{w}_{\bar{l}})}{z - \bar{w}_{\bar{l}}} \right) - \frac{u_1}{\beta z} \hat{A}(0) - \frac{u_2}{\beta z} \hat{B}(0) - \frac{v_1}{\beta(z-1)} \hat{A}(1) \right] \Phi(w, \bar{w}) \right\rangle = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Разлагая условия W и Вирасоро в ряд по z^{-1} , w^{-1} , \bar{w}^{-1} мы найдем рекуррентные соотношения на корреляторы $p_k^{(a)}$. Коэффициенты перед степенями z^{-1} , z^{-2} , z^{-3} позволяют зафиксировать корреляторы $\rho_{1,2}(0)$, $\rho_1(1)$, $\hat{A}(0)$, $\hat{B}(0)$ и $\hat{A}(1)$.

Приложение В

Полиномы Макдональда и гамильтонианы Рудженаарса и пятимерные функции Некрасова

В.1 Гамильтонианы Рудженаарса

В этом дополнении мы кратко напомним важнейшие свойства (тригонометрических) гамильтонианов Рудженаарса и приведем для них полезные выражения.

Полиномы Макдональда являются собственными функциями системы коммутирующих гамильтонианов Рудженаарса H_k , которую можно понимать как максимальную коммутирующую подалгебру в алгебре Динга-Иохара-Мики [190]:

$$H_k M_Y = e_k(\{(q^{Y_i} - 1)t^{N-i}\}) M_Y \quad (\text{B.1})$$

где e_k — элементарные симметрические полиномы N переменных и

$$\begin{aligned} H_k &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} \frac{1}{\Delta(x)} t^{\sum_a x_{i_a} \partial_{i_a}} \Delta(x) \left(\frac{q}{t}\right)^{\sum_a x_{i_a} \partial_{i_a}} = \\ &= t^{\frac{k(k-1)}{2}} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} \prod_{a=1}^k \prod_{j \neq i_1 \dots i_k} \frac{tx_{i_a} - x_j}{x_{i_a} - x_j} q^{\sum_a x_{i_a} \partial_{i_a}}, \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

Отметим, что для q и t общего вида спектр H_1 невырожден и высшие гамильтонианы H_k для однозначного определения собственных функций не требуются. Тем не менее, мы приведем выражения для старших H_k для полноты изложения.

Выведем компактное выражение для гамильтонианов Рудженаарса, при их действии на симметрические функции, в терминах переменных «сумм степеней» $p_n = \sum_{i=1}^N x_i^n$. Оператор сдвига $q^{x_i \partial_i}$ в терминах этих

переменных запишется в виде

$$q^{x_i \partial_i} f(p_n) = f(p_n + (q^n - 1)x_i^n) = e^{\sum_{n \geq 1} (q^n - 1)x_i^n \frac{\partial}{\partial p_n}} f(p_n). \quad (\text{B.3})$$

Операторы сдвига коммутируют, и мы получаем

$$H_k = t^{\frac{k(k-1)}{2}} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} \prod_{a=1}^k \prod_{j \neq i_1 \dots i_k} \frac{tx_{i_a} - x_j}{x_{i_a} - x_j} \prod_{a=1}^k e^{\sum_{n \geq 1} (q^n - 1)x_{i_a}^n \frac{\partial}{\partial p_n}}. \quad (\text{B.4})$$

Можно заметить, что данная сумма может быть представлена как сумма по вычетам¹:

$$H_k = \frac{t^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(t-1)^k [k]_t!} \oint_{\mathcal{C}_x} \prod_{a=1}^k \frac{dz_a}{z_a} \prod_{a < b} \frac{z_a - z_b}{z_a - tz_b} \prod_{i=1}^N \prod_{a=1}^k \frac{tz_a - x_i}{z_a - x_i} e^{\sum_{a=1}^k \sum_{n \geq 1} (q^n - 1)z_a^n \frac{\partial}{\partial p_n}}, \quad (\text{B.5})$$

где все k интегралов берутся по одному и тому же контуру, обходящему вокруг точек x_i . t -деформированные факториалы возникают при применении формулы симметризации

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \prod_{i < j} \frac{tx_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}}{x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}} = [k]_t! \quad (\text{B.6})$$

Используя (B.6) еще раз для переменных z_a , получаем

$$H_k = \frac{t^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(t-1)^k k!} \oint_{\mathcal{C}_x} \prod_{a=1}^k \frac{dz_a}{z_a} \prod_{a \neq b} \frac{z_a - z_b}{z_a - tz_b} \prod_{i=1}^N \prod_{a=1}^k \frac{tz_a - x_i}{z_a - x_i} e^{\sum_{a=1}^k \sum_{n \geq 1} (q^n - 1)z_a^n \frac{\partial}{\partial p_n}}. \quad (\text{B.7})$$

Разложим рациональные факторы, содержащие x_i в терминах «сумм степеней»

$$H_k = \frac{t^{\frac{k(k-1)}{2} + kN}}{(t-1)^k k!} \oint_{\mathcal{C}_x} \prod_{a=1}^k \frac{dz_a}{z_a} \prod_{a \neq b} \frac{z_a - z_b}{z_a - tz_b} e^{\sum_{a=1}^k \sum_{n \geq 1} \frac{1-t^{-n}}{n} z_a^{-n} p_n} e^{\sum_{a=1}^k \sum_{n \geq 1} (q^n - 1)z_a^n \frac{\partial}{\partial p_n}}. \quad (\text{B.8})$$

¹Мы будем всюду включать множитель $\frac{1}{2\pi i}$ в определение контурного интеграла.

Теперь деформируем контуры интегрирования так, чтобы они охватывали точки $z = \infty$ и $z = 0$. При этом возникают дополнительные вычеты при $z_a = tz_b$. Для первых нескольких интегралов H_k имеем:

$$H_1 = h_{[1]}, \quad (\text{B.9})$$

$$H_2 = \frac{1}{2}h_{[1,1]} - \frac{1}{2}h_{[2]}, \quad (\text{B.10})$$

$$H_3 = \frac{1}{6}h_{[1,1,1]} - \frac{1}{2}h_{[2,1]} + \frac{1}{3}h_{[3]}. \quad (\text{B.11})$$

где²

$$h_{[1^k]} = \frac{t^{kN + \frac{k(k-1)}{2}}}{(t-1)^k} \left(\oint_{\mathcal{C}_\infty} - \oint_{\mathcal{C}_0} \right)^k \prod_{a=1}^k \frac{dz_a}{z_a} \prod_{a < b} \frac{(z_a - z_b)^2}{(tz_a - z_b)(z_a - tz_b)} \times \\ \times e^{\sum_{a=1}^k (\phi_-(z_a) - \phi_-(tz_a))} e^{\sum_{a=1}^k (\phi_+(qz_a) - \phi_+(z_a))}, \quad (\text{B.12})$$

$$h_{[k]} = \frac{t^{kN}}{(t^k - 1)} \left(\oint_{\mathcal{C}_\infty} - \oint_{\mathcal{C}_0} \right) \frac{dz}{z} e^{\phi_-(z) - \phi_-(t^k z)} e^{\sum_{a=0}^{k-1} (\phi_+(qt^a z) - \phi_+(t^a z))} \quad (\text{B.13})$$

$$h_{[2,1]} = \frac{t^{3N+1}}{(t-1)(t^2-1)} \left(\oint_{\mathcal{C}_\infty} - \oint_{\mathcal{C}_0} \right)^2 \frac{dz_1}{z_1} \frac{dz_2}{z_2} \frac{(z_1 - z_2)(tz_1 - z_2)}{(z_1 - tz_2)(t^2 z_1 - z_2)} \times \\ \times e^{\phi_-(z_1) - \phi_-(t^2 z_1) + \phi_-(z_2) - \phi_-(tz_2)} e^{\phi_+(qz_1) - \phi_+(z_1) + \phi_+(qtz_1) - \phi_+(tz_1) + \phi_+(qz_2) - \phi_+(z_2)} \quad (\text{B.14})$$

где $\phi_+(z) = \sum_{n \geq 1} z^n \frac{\partial}{\partial p_n}$ и $\phi_-(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^{-n}}{n} p_n$.

В.1.1 Случай $t = q$. Операторы Казимира группы $GL(\infty)$.

В пределе $q = t$ полиномы Макдональда вырождаются в полиномы Шура, которые не зависят от q . В этом пределе все гамильтонианы могут

²Для того, чтобы ряды разложений в действительности сходились, необходимо считать, что переменные z_a радиально упорядочены, т.е. $|z_1| < \dots < |z_k|$.

быть явно выражены через первый из них. Например:

$$h_{[1^k]}(q) = (h_{[1]}(q))^k, \quad (\text{B.15})$$

$$h_{[k]}(q) = h_{[1]}(q^k), \quad (\text{B.16})$$

$$h_{[2,1]}(q) = h_{[1]}(q^2)h_{[1]}(q). \quad (\text{B.17})$$

Первый интеграл упрощается и записывается в виде

$$h_{[1]}(q) = \oint_{\mathcal{C}_\infty} \frac{dz}{z} : e^{\phi(z)} \frac{q^{N+zd_z} - 1}{q - 1} e^{-\phi(z)} : \quad (\text{B.18})$$

где $\phi(z) = \phi_-(z) - \phi_+(z)$ и нормальное упорядочение действует на p_n и $\frac{\partial}{\partial p_n}$ ³. Заметим также, что $h_{[1]}(q)$ коммутируют при разных значениях q :

$$[h_{[1]}(q), h_{[1]}(q')] = 0. \quad (\text{B.19})$$

Собственные значения $h_{[1]}(q)$ выражаются через операторы Казимира группы $GL(\infty)$:

$$h_{[1]}(q)\chi_R = \left(q^{N-\frac{1}{2}}C_R(q) + \frac{q^N - 1}{q - 1} \right) \chi_R, \quad (\text{B.20})$$

где $C_R(e^{\hbar}) = \sum_{i \geq 1} \left(e^{\hbar(R_i - i + \frac{1}{2})} - e^{\hbar(-i + \frac{1}{2})} \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{\hbar^n}{n!} C_R(n)$ — производящая функция инвариантов Казимира

$$C_R(n) = \sum_{i \geq 1} \left[\left(R_i - i + \frac{1}{2} \right)^n - \left(-i + \frac{1}{2} \right)^n \right].$$

В.2 Пятимерные функции Некрасова и соотношения АГТ

Статсуммы Некрасова для $U(N)$ калибровочной теории с $N_f = 2N$ гипермультиплетами в фундаментальном представлении на $\mathbb{R}^4 \times S_{R_5}^1$ равна

$$Z_{\text{Nek}}^{5d} = \sum_{\vec{A}} \Lambda^{|\vec{A}|} \frac{\prod_{i=1}^N \prod_{f=1}^N f_{A_i}^+(m_f^+ + a_i) f_{A_i}^-(m_f^- + a_i)}{z_{\text{vect}}(\vec{A}, \vec{a})}, \quad (\text{B.21})$$

³Можно также фермионизовать бозонные операторы так, что $: e^{\phi(z)} : \sim \bar{\psi}(z)$, $: e^{-\phi(z)} : \sim \psi(z)$. Это дает фермионную конструкцию операторов Казимира группы $GL(\infty)$.

где $f_A^\pm(x) = \prod_{(i,j) \in A} (1 - q^{\pm x} t^{\pm(i-1)} q^{\mp(j-1)})$, $z_{\text{vect}}(\vec{A}, \vec{a}) = \prod_{i,j=1}^N G_{A_i A_j}^{(q,t)}(a_i - a_j)$ и

$$\begin{aligned} G_{AB}^{(q,t)}(x) &= \prod_{(i,j) \in A} \left(1 - q^x q^{A_i - j} t^{B_j^T - i + 1}\right) \prod_{(i,j) \in B} \left(1 - q^x q^{-B_i + j - 1} t^{-A_j^T + i}\right) = \\ &= \prod_{(i,j) \in B} \left(1 - q^x q^{A_i - j} t^{B_j^T - i + 1}\right) \prod_{(i,j) \in A} \left(1 - q^x q^{-B_i + j - 1} t^{-A_j^T + i}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Соотношения АГТ для $N = 2$ записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_+ &= m_1^+ - m_2^+ - 1 + \beta, & u_- &= -1 + \beta - 2a, \\ v_+ &= -m_1^+ - m_2^+, & v_- &= -m_1^- - m_2^-, \\ \beta n_+ &= -a + m_2^+, & \beta n_- &= a + m_2^-, \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

где $a_1 = -a_2 = a$. Массы m_a , вакуумные средние значения a_i , радиус R_5 пятого измерения и $\epsilon_{1,2}$ все имеют размерность массы. В этой главе мы выбираем общий масштаб масс так, что $\epsilon_1 = -b^2$, $\epsilon_2 = 1$ и $q = e^R$. Параметр t в полиномах Макдональда связан с q с помощью соотношения $t = q^\beta$, где $\beta = b^2$.

В.3 Гамильтониан Ружденаарса и петлевые уравнения

Перепишем петлевые уравнения (6.21) в терминах гамильтониана Ружденаарса (В.2).

Во-первых, воспользуемся полезным соотношением:

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{z - x_i} \prod_{j \neq i} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} = \frac{1}{(1-t)z} \left[1 - \prod_{j=1}^N \frac{tz - x_j}{z - x_j} \right], \quad (\text{B.24})$$

которое доказывается разложением правой части в сумму по полюсам по z .

Используя уравнение (В.24), можно переписать уравнение (6.21) следующим образом

$$\left\langle -\frac{t^{N-1}q^{u+1}}{z}H_1f(x) + t^{N-1}q^{u+1}(zq^{v-1} - 1) \left[H_1, \sum_{n \geq 1} \frac{q^n z^{-n-1}}{q^n - 1} p_n \right] f(x) + \right. \\ \left. + \frac{z - qt^N}{qz(1-t)}f(x) - \frac{z - q}{qz(1-t)} \prod_{j=1}^N \frac{z - tx_j}{z - x_j} f(x) \right\rangle = 0, \quad (\text{В.25})$$

где H_1 — первый гамильтониан Рудженаарса⁴. Разложение уравнения (В.25) по отрицательным степеням переменной z дает бесконечный набор условий q -Вирасоро, которые определяют средние любого симметрического полинома от переменных x_i . В действительности, необходимы только два из бесконечного семейства условий. В самом деле, генераторы Вирасоро L_n с положительными n получаются коммутацией L_1 и L_2 . То же самое верно и в q -деформированном случае. Таким образом, достаточно рассмотреть только уравнения, получающиеся при степенях z^{-1} и z^{-2} :

$$\left\langle -t^{N-1}q^{u+v}H_1f(x) + \frac{t^{N-1}q^{u+v+1}}{q-1} [H_1, p_1] f(x) + \right. \\ \left. + \frac{1-t^N}{1-t}f(x) - q^{-1}p_1f(x) \right\rangle = 0, \quad (\text{В.26})$$

$$\left\langle \frac{t^{N-1}q^{u+2}}{(q-1)^2} [H_1, q^v p_2 - q(q-1)p_1] f(x) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2q}((1+t)p_2 + (1-t)p_1^2 + 2qp_1)f(x) \right\rangle = 0. \quad (\text{В.27})$$

Если $f(x)$ является полиномом Макдональда, то гамильтониан H_1 действует на него диагонально. Однако, умножение на p_n дает сумму

⁴Интересно отметить, что в данной формуле возникает функция квантового дилогарифма $\phi_q(x)$: в самом деле, $\sum_{n \geq 1} \frac{q^n z^{-n-1}}{q^n - 1} p_n = -\partial_z \sum_{i=1}^N \ln \phi_q\left(\frac{qx_i}{z}\right)$.

различных полиномов Макдональда. Чтобы это увидеть, необходимо использовать соотношение Пьери:

$$\begin{aligned}
e_k(p)M_Y(p) &= \chi_{[1^k]}(p)M_Y(p) = M_{[1^k]}(p)M_Y(p) = \\
&= \sum_W \prod_{(i,j) \in (C_{W \setminus Y}) \setminus (R_{W \setminus Y})} \frac{b_W(i,j)}{b_Y(i,j)} M_W(p) \quad (\text{B.28})
\end{aligned}$$

где сумма производится по диаграммам W , таким что $W \setminus Y$ является горизонтальной полосой (т.е. в каждом столбце имеется не более одной клетки) из k клеток; $C_{W \setminus Y}$ ($R_{W \setminus Y}$) — набор столбцов (строк), пересекающихся с $W \setminus Y$ и

$$b_Y(i,j) = \begin{cases} \frac{1-q^{Y_i-j}t^{Y_j^T-i+1}}{1-q^{Y_i-j+1}t^{Y_j^T-i}} & \text{if } (i,j) \in Y, \\ 1 & \text{else.} \end{cases} \quad (\text{B.29})$$

Применяя соотношение Пьери для $k = 1, 2$ можно переписать уравнения (B.3), (B.27) как рекуррентные соотношения на средние полиномов Макдональда. Мы убеждены, что таким способом можно получить доказательство равенств (6.26), (6.27), (6.29), (6.30), однако нам не удалось это сделать.

В.4 Полезные тождества

В этом приложении мы приведем полезные комбинаторные тождества, связанные с функциями Некрасова:

$$\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^N \prod_{k=0}^{v-1} \frac{1 - Qq^{k+R_i}t^{-i}}{1 - Qq^k t^{-i}} = \prod_{(i,j) \in R} \frac{1 - Qq^{v+j-1}t^{-i}}{1 - Qq^{j-1}t^{-i}} \\
& \frac{\Delta^{(q,t)}(q^{R_i}t^{-i})}{\Delta^{(q,t)}(t^{-i})} = \prod_{k=0}^{\beta-1} \prod_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{q^{k+R_i}t^{-i} - q^{R_j}t^{-j}}{q^k t^{-i} - t^{-j}} = \\
& = \prod_{(i,j) \in R} \frac{t^{2(i-1)}(1 - t^{N-i}q^j)(1 - t^{N-i+1}q^{j-1})}{(1 - q^{R_i-j}t^{R_j^T-i+1})(1 - q^{R_i-j+1}t^{R_j^T-i})} = \\
& = M_R^{(q,t)} \left(\frac{1 - t^{nN}}{1 - t^n} \right) M_{R^T}^{(t,q)} \left(\frac{1 - t^{n(1-N)}q^{-n}}{1 - q^n} \right) \\
& \prod_{k=0}^{\beta-1} \prod_{i=1}^{N_+} \prod_{j=1}^{N_-} \frac{1 - Qq^{k+R_i-P_j}t^{j-i}}{1 - Qq^k t^{j-i}} = \\
& = \frac{\prod_{(i,j) \in R} (1 - Qq^{j-1}t^{N_++1-i}) \prod_{(i,j) \in P} (1 - Qq^{-j}t^{-N_++i})}{G_{RP}^{(q,t)}(Q)} \\
& \prod_{(i,j) \in R} (1 - q^{R_i-j+1}t^{R_j^T-i})(1 - q^{R_i-j}t^{R_j^T-i+1}) = G_{RR}(1) \prod_{(i,j) \in R} (-q^j t^{i-1}) \\
& G_{AB}(Q) = G_{BA} \left(\frac{q}{tQ} \right) \prod_{(i,j) \in A} (-Qq^{j-1}t^{1-i}) \prod_{(i,j) \in B} (-Qq^{-j}t^i)
\end{aligned}$$

где G_{RP} дается равенством (В.22).

Литература

1. N. Seiberg and E. Witten, “Electric - magnetic duality, monopole condensation, and confinement in N=2 supersymmetric Yang-Mills theory” // Nucl. Phys. B **426** (1994) 19.
2. N. Seiberg and E. Witten, “Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in N=2 supersymmetric QCD” // Nucl. Phys. B **431** (1994) 484.
3. A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov and A. Morozov, “Integrability and Seiberg-Witten exact solution” // Phys. Lett. B **355** (1995) 466.
4. R. Donagi and E. Witten, “Supersymmetric Yang-Mills theory and integrable systems” // Nucl. Phys. B **460** (1996) 299.
5. N. A. Nekrasov, “Seiberg-Witten prepotential from instanton counting” // [hep-th/0306211].
6. N. A. Nekrasov, S. L. Shatashvili, “Quantization of Integrable Systems and Four Dimensional Gauge Theories” // arXiv:0908.4052 [hep-th].
7. A. Mironov and A. Morozov, “Nekrasov Functions and Exact Bohr-Sommerfeld Integrals” // JHEP **1004**, 040 (2010).
8. A. Mironov and A. Morozov, “Nekrasov Functions from Exact BS Periods: the Case of SU(N)” // J. Phys. A **43**, 195401 (2010).
9. A. Popolitov, “On relation between Nekrasov functions and BS periods in pure SU(N) case” // arXiv:1001.1407 [hep-th].
10. D. Gaiotto, “N=2 dualities” // JHEP **1208** (2012) 034.

11. L. F. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa, “Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories” // *Lett. Math. Phys.* **91**, 167-197 (2010).
12. N. Wyllard, “A(N-1) conformal Toda field theory correlation functions from conformal $N = 2$ SU(N) quiver gauge theories” // *JHEP* **0911** (2009) 002.
13. A. Mironov and A. Morozov, “The Power of Nekrasov Functions” // *Phys. Lett. B* **680** (2009) 188.
14. A. Mironov and A. Morozov, “On AGT relation in the case of U(3)” // *Nucl. Phys. B* **825** (2010) 1.
15. A. Braverman, B. Feigin, M. Finkelberg and L. Rybnikov, “A Finite analog of the AGT relation I: Finite W -algebras and quasimaps’ spaces” // *Commun. Math. Phys.* **308** (2011) 457.
16. A. Braverman and P. Etingof, “Instanton counting via affine Lie algebras II: from Whittaker vectors to the Seiberg-Witten prepotential” // *arXiv:math/0409441*.
17. V. A. Fateev and A. V. Litvinov, “On AGT conjecture” // *JHEP* **1002** (2010) 014.
18. C. Kozcaz, S. Pasquetti and N. Wyllard, “A & B model approaches to surface operators and Toda theories” // *JHEP* **1008** (2010) 042.
19. R. Dijkgraaf and C. Vafa, “Toda Theories, Matrix Models, Topological Strings, and N=2 Gauge Systems” // *arXiv:0909.2453 [hep-th]*.
20. H. Itoyama, K. Maruyoshi and T. Oota, “Notes on the Quiver Matrix Model and 2d-4d Conformal Connection” // *Prog. Theor. Phys.* **123** (2010) 957-987, *arXiv:0911.4244*.

21. T.Eguchi and K.Maruyoshi, “Penner Type Matrix Model and Seiberg-Witten Theory” // JHEP 1002 (2010) 022.
22. T. Eguchi and K. Maruyoshi, “Seiberg-Witten theory, matrix model and AGT relation” // JHEP **1007** (2010) 081.
23. R. Schiappa and N. Wyllard, “An $A(r)$ threesome: Matrix models, 2d CFTs and 4d $N=2$ gauge theories” // J. Math. Phys. **51** (2010) 082304.
24. A. Mironov, A. Morozov, S. .Shakirov, “Matrix Model Conjecture for Exact BS Periods and Nekrasov Functions” // JHEP **1002**, 030 (2010).
25. A. Mironov, A. Morozov and S. Shakirov, “Conformal blocks as Dotsenko-Fateev Integral Discriminants” // Int. J. Mod. Phys. A **25** (2010) 3173.
26. K. Maruyoshi, M. Taki, “Deformed Prepotential, Quantum Integrable System and Liouville Field Theory” // Nucl. Phys. **B841**, 388-425 (2010).
27. A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, “On AGT Relations with Surface Operator Insertion and Stationary Limit of Beta-Ensembles” // arXiv:1011.4491 [hep-th].
28. F. Fucito, J. F. Morales, R. Poghossian and D. R. Pacifici, “Gauge theories on Ω -backgrounds from non commutative Seiberg-Witten curves” // arXiv:1103.4495 [hep-th].
29. W. He and Y. G. Miao, “Magnetic expansion of Nekrasov theory: the $SU(2)$ pure gauge theory” // Phys. Rev. D **82** (2010) 025020.
30. Y. Zenkevich, “Nekrasov prepotential with fundamental matter from the quantum spin chain” // Phys. Lett. B **701** (2011) 630.
31. N. Dorey, S. Lee and T. J. Hollowood, “Quantization of Integrable Systems and a 2d/4d Duality” // JHEP **1110** (2011) 077.

32. M. Aganagic, M. C. N. Cheng, R. Dijkgraaf, D. Krefl and C. Vafa, “Quantum Geometry of Refined Topological Strings” // JHEP **1211** (2012) 019.
33. Y. Yamada, “A quantum isomonodromy equation and its application to $N=2$ $SU(N)$ gauge theories” // J. Phys. A **44** (2011) 055403.
34. A. Mironov, A. Morozov and S. Shakirov, “Towards a proof of AGT conjecture by methods of matrix models” // Int. J. Mod. Phys. A **27** (2012) 1230001.
35. K. Muneyuki, T. S. Tai, N. Yonezawa and R. Yoshioka, “Baxter’s T-Q equation, $SU(N)/SU(2)^{N-3}$ correspondence and Ω -deformed Seiberg-Witten prepotential” // JHEP **1109** (2011) 125.
36. T. S. Tai, “Uniformization, Calogero-Moser/Heun duality and Sutherland/bubbling pants” // JHEP **1010** (2010) 107.
37. R. Garnier, “Sur une classe de systèmes différentiels abéliens déduits de la théorie des équations linéaires” // Rend. Circ. Mat. Palermo **43**, 155-191, (1918)
38. M. Gaudin, “Diagonalisation d’une classe d’hamiltoniens de spin” // Journal de Physique **37** (10) 1087 (1976)
39. A. Gorsky, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, “ $N=2$ supersymmetric QCD and integrable spin chains: Rational case $N(f) < 2N(c)$ ” // Phys. Lett. **B380**, 75-80 (1996).
40. A. Gorsky, A. Marshakov, A. Mironov and A. Morozov, “A Note on spectral curve for the periodic homogeneous XYZ spin chain” // hep-th/9604078.
41. W. Heisenberg, “Zur Theorie des Ferromagnetismus Zeitschrift für Physik” // **49** (9-10) (1928) 619.

42. M. Adams, J. P. Harnad and J. Hurtubise, “Dual Moment Maps Into Loop Algebras” // *Lett. Math. Phys.* **20** (1990) 299.
43. J. P. Harnad, “Dual isomonodromic deformations and moment maps to loop algebras” // *Commun. Math. Phys.* **166** (1994) 337.
44. M. Bertola, B. Eynard and J. P. Harnad, “Duality, biorthogonal polynomials and multimatrix models” // *Commun. Math. Phys.* **229** (2002) 73.
45. G. Wilson, “Bispectral Commutative Ordinary Differential Operators” // *J. reine angew Math.* 442 (1993), 177–204.
46. A. Gorsky, S. Gukov and A. Mironov, “Multiscale N=2 SUSY field theories, integrable systems and their stringy / brane origin. 1.” // *Nucl. Phys. B* **517** (1998) 409.
47. A. Gorsky and A. Mironov, “Integrable many body systems and gauge theories” // In *Aratyn, H. (ed.) et al.: Integrable hierarchies and modern physical theories* 33-176.
48. I. M. Krichever and D. H. Phong, “Symplectic forms in the theory of solitons” // hep-th/9708170.
49. N. Nekrasov, A. Rosly and S. Shatashvili, “Darboux coordinates, Yang-Yang functional, and gauge theory” // *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **216** (2011) 69.
50. A. Losev, N. Nekrasov and S. L. Shatashvili, “Issues in topological gauge theory” // *Nucl. Phys. B* **534** (1998) 549.
51. A. Losev, N. Nekrasov and S. L. Shatashvili, “Testing Seiberg-Witten solution” // In *Cargese 1997, Strings, branes and dualities* 359-372.
52. G. W. Moore, N. Nekrasov and S. Shatashvili, “Integrating over Higgs branches” // *Commun. Math. Phys.* **209** (2000) 97.

53. G. W. Moore, N. Nekrasov and S. Shatashvili, “D particle bound states and generalized instantons” // Commun. Math. Phys. **209** (2000) 77.
54. R.J. Baxter, “Exactly Solved Models in Statistical Mechanics” // Academic Press, London (1982).
55. K. Bulycheva, H. Y. Chen, A. Gorsky and P. Koroteev, “BPS States in Omega Background and Integrability” // JHEP **1210** (2012) 116.
56. D. Gaiotto and P. Koroteev, “On Three Dimensional Quiver Gauge Theories and Integrability” // JHEP **1305** (2013) 126.
57. H. Y. Chen, P. S. Hsin and P. Koroteev, “On the Integrability of Four Dimensional N=2 Gauge Theories in the Omega Background” // JHEP **1308** (2013) 076.
58. V. A. Alba, V. A. Fateev, A. V. Litvinov and G. M. Tarnopolskiy, “On combinatorial expansion of the conformal blocks arising from AGT conjecture” // Lett. Math. Phys. **98**, 33 (2011).
59. V. A. Fateev and A. V. Litvinov, “Integrable structure, W-symmetry and AGT relation” // JHEP **1201**, 051 (2012).
60. A. Belavin and V. Belavin, “AGT conjecture and Integrable structure of Conformal field theory for $c=1$ ” // Nucl. Phys. B **850** (2011) 199.
61. A. Mironov, A. Morozov and S. Shakirov, “A direct proof of AGT conjecture at $\beta = 1$ ” // JHEP **1102** (2011) 067.
62. A. Morozov, A. Smirnov, “Towards the Proof of AGT Relations with the Help of the Generalized Jack Polynomials” // Lett. Math. Phys. **104**, no. 5, 585 (2014).
63. Y. Ohkubo, “Existence and Orthogonality of Generalized Jack Polynomials and Its q -Deformation” // [arXiv:1404.5401 [math-ph]].

64. M. Aganagic, N. Haouzi, C. Kozcaz and S. Shakirov, “Gauge/Liouville Triality” // arXiv:1309.1687 [hep-th].
65. M. Aganagic, N. Haouzi and S. Shakirov, “ A_n -Triality” // arXiv:1403.3657 [hep-th].
66. S. H. Katz, A. Klemm and C. Vafa, “Geometric engineering of quantum field theories” // Nucl. Phys. B **497**, 173 (1997).
67. S. Katz, P. Mayr and C. Vafa, “Mirror symmetry and exact solution of 4-D $\mathcal{N} = 2$ gauge theories: 1.” // Adv. Theor. Math. Phys. **1**, 53 (1998).
68. A. Iqbal, C. Kozcaz and C. Vafa, “The Refined topological vertex” // JHEP **0910**, 069 (2009).
69. M. Taki, “Refined Topological Vertex and Instanton Counting” // JHEP **0803**, 048 (2008).
70. A. Iqbal, “All genus topological string amplitudes and five-brane webs as Feynman diagrams” // [hep-th/0207114].
71. M. Aganagic, A. Klemm, M. Marino and C. Vafa, “The Topological vertex” // Commun. Math. Phys. **254**, 425 (2005).
72. A. Mironov, A. Morozov, Y. Zenkevich and A. Zotov, “Spectral Duality in Integrable Systems from AGT Conjecture” // JETP Lett. **97** (2013) 45.
73. A. Mironov, A. Morozov, B. Runov, Y. Zenkevich and A. Zotov, “Spectral Duality Between Heisenberg Chain and Gaudin Model” // Letters in Mathematical Physics: Volume 10 **3** (2013) , 299.
74. A. Mironov, A. Morozov, B. Runov, Y. Zenkevich and A. Zotov, “Spectral dualities in XXZ spin chains and five dimensional gauge theories” // JHEP **1312** (2013) 034.

75. S. Mironov, A. Morozov and Y. Zenkevich, “Generalized Jack polynomials and the AGT relations for the $SU(3)$ group” // JETP Lett. **99** (2014) 109.
76. Y. Zenkevich, JHEP **1505** (2015) 131
77. P. C. Argyres, M. R. Plesser and A. D. Shapere, “The Coulomb phase of $N=2$ supersymmetric QCD” // Phys. Rev. Lett. **75**, 1699 (1995).
78. I. M. Krichever, D. H. Phong, “On the integrable geometry of soliton equations and $N=2$ supersymmetric gauge theories” // J. Diff. Geom. **45**, 349-389 (1997).
79. W. He, “Sine-Gordon quantum mechanics on the complex plane and $N=2$ gauge theory” // Phys. Rev. **D81**, 105017 (2010).
80. E. D’Hoker, I. M. Krichever, D. H. Phong, “The Effective prepotential of $N=2$ supersymmetric $SU(N(c))$ gauge theories” // Nucl. Phys. **B489**, 179-210 (1997).
81. L. F. Alday, D. Gaiotto, S. Gukov, Y. Tachikawa and H. Verlinde, “Loop and surface operators in $N=2$ gauge theory and Liouville modular geometry” // JHEP **1001** (2010) 113.
82. L. Bao, E. Pomoni, M. Taki and F. Yagi, “M5-Branes, Toric Diagrams and Gauge Theory Duality” // JHEP **1204** (2012) 105.
83. E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, “Bispectral and $(\mathfrak{gl}_N, \mathfrak{gl}_M)$ Dualities” // arXiv:math/0510364.
84. E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, “Bispectral and $(\mathfrak{gl}_N, \mathfrak{gl}_M)$ Dualities” // Discrete Versus Differential Advances in Mathematics, 218 (2008) 216-265.
85. B. Feigin, E. Frenkel and N. Reshetikhin, “Gaudin model, Bethe ansatz and critical level” // Comm. Math. Phys. 166 (1994) 27-62.

86. D.Talalaev, “The Quantum Gaudin System” // *Func.Anal.Appl.* 40 (2006) 73-77.
87. A. Chervov and D. Talalaev, “Quantum spectral curves, quantum integrable systems and the geometric Langlands correspondence” // *hep-th/0604128*.
88. T.Tsuda, “UC hierarchy and monodromy preserving deformation” // *Comm.Math.Phys.* 248 (2004) 501-526.
89. H. Awata and Y. Yamada, “Five-dimensional AGT Conjecture and the Deformed Virasoro Algebra” // *JHEP* **1001** (2010) 125.
90. H. Awata and Y. Yamada, “Five-dimensional AGT Relation and the Deformed beta-ensemble” // *Prog. Theor. Phys.* **124** (2010) 227.
91. S. Yanagida, “Five-dimensional SU(2) AGT conjecture and recursive formula of deformed Gaiotto state” // *J. Math. Phys.* **51** (2010) 123506.
92. A. Mironov, A. Morozov, S. Shakirov and A. Smirnov, “Proving AGT conjecture as HS duality: extension to five dimensions” // *Nucl. Phys. B* **855** (2012) 128.
93. A. Gorsky, S. Gukov and A. Mironov, “SUSY field theories, integrable systems and their stringy / brane origin. 2.” // *Nucl. Phys. B* **518** (1998) 689.
94. A. Marshakov and A. Mironov, “5-d and 6-d supersymmetric gauge theories: Prepotentials from integrable systems” // *Nucl. Phys. B* **518** (1998) 59.
95. P.Painlevé “Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes” // *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* 143, 1111-1117, (1906).

96. Yu.Manin, “Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of P2P” // AMS Transl. (2) 186 (1998) 131–151
97. V.I. Inozemtsev, “Lax representation with spectral parameter on a torus for integrable particle systems” // Lett. Math. Phys., 17, (1989) 11–17.
98. A. Zotov, “Elliptic linear problem for Calogero-Inozemtsev model and Painleve VI equation” // Lett. Math. Phys. **67** (2004) 153.
99. A. Levin, M. Olshanetsky and A. Zotov, “Painleve VI, rigid tops and reflection equation” // Commun. Math. Phys. **268** (2006) 67.
100. A. Levin and A. Zotov, “On Rational and Elliptic Forms of Painleve VI Equation” // Am. Math. Soc. Transl. **221** (2007) 173.
101. A. Zabrodin and A. Zotov, “Quantum Painleve-Calogero Correspondence” // J. Math. Phys. **53** (2012) 073507.
102. L.Faddeev, L.Takhtajan, “Hamiltonian approach to solitons theory” // Berlin: Springer-Verlag. 1987.
103. P.A.M. Dirac, “Generalized Hamiltonian dynamics” // Proc. Roy. Soc. London, ser. A, 246, 326 (1950).
104. M.Henneaux and C.Teitelboim, “Quantization of Gauge Systems” // Princeton University Press (1994).
105. H. W. Braden, V. A. Dolgushev, M. A. Olshanetsky and A. V. Zotov, “Classical R matrices and the Feigin-Odesskii algebra via Hamiltonian and Poisson reductions” // J. Phys. A **36** (2003) 6979.
106. L.Fehér, A.Gábor and B.G.Pusztai, “On dynamical r-matrices obtained from Dirac reduction and their generalizations to affine Lie algebras” // J. Phys. A: Math. Gen. 34 7235 (2001).
107. N.J.Hitchin, G.B.Segal, R.S.Ward, “Integrable systems: Twistors, loop groups, and Riemann surfaces” // Clarendon Press, Oxford (1999).

108. V.Arnold, "Mathematical Methods in Classical Mechanics" // Springer, 1978.
109. E.Sklyanin, "Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation" // Functional Analysis and Its Applications Vol. 16, Num. 4, 263-270 (1982).
110. M.A.Semenov-Tyan-Shanskii, "What is a classical r-matrix?" // Functional Analysis and Its Applications Vol. 17, Num. 4 (1983), 259-272.
111. P.P.Kulish, N.Yu.Reshetikhin and E.K.Sklyanin, "Yang-Baxter equation and representation theory: I" // Lett.Math.Phys. Vol. 5, Num. 5 (1981), 393-403.
112. I.Krichever, "Methods of algebraic geometry in the theory of non-linear equations" // Russ.Math.Surv., 32, 185 (1977).
113. B.A.Dubrovin, I.M.Krichever, S.P.Novikov, "Integrable systems. I, Current Problems in Mathematics. Fundamental Directions" // Vol. 4, Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1985, 179-284 (in Russian).
114. E. K. Sklyanin, "Separation of variables - new trends" // Prog. Theor. Phys. Suppl. **118** (1995) 35.
115. H.Flaschka, D.W.McLaughlin, "Canonically conjugate variables for Korteweg-de Vries equation and Toda lattices with periodic boundary conditions" // Progr.Theor.Phys., 55, 438-456 (1976).
116. I.M.Gel'fand, L.A.Diki, "Integrable nonlinear equations and the Liouville theorem" // Funct.Anal.Appl., 13, 8-20 (1979).
117. S.P.Novikov, A.P.Veselov, "Poisson brackets and complex tori" // Proc. Steklov Inst. Math., 3, 53-65 (1985).

118. O.Babelon, “A short introduction to classical and quantum integrable systems” // Lecture course notes (2007).
119. A.V.Tsiganov, “Separation of variables in integrable systems” // Izhevsk (2005).
120. A. Levin, M. A. Olshanetsky and A. Zotov, “Hitchin systems–symplectic hecke correspondence and two-dimensional version” // Commun. Math. Phys. **236** (2003) 93.
121. A. Levin, M. Olshanetsky, A. Smirnov and A. Zotov, “Characteristic Classes and Integrable Systems. General Construction” // arXiv:1006.0702 [math-ph].
122. A. Levin, M. Olshanetsky, A. Smirnov and A. Zotov, “Characteristic Classes and Integrable Systems for Simple Lie Groups” // arXiv:1007.4127 [math-ph].
123. E.Sklyanin, L.Takhtajan, L.Faddeev, “Quantum inverse scattering method” // Theor. Math. Phys. 40 (1979) 194.
124. P.Kulish, E.Sklyanin, “Quantum inverse scattering method and the Heisenberg ferromagnet” // Phys. Lett. A, Vol. 70, Iss.5-6, 461-463 (1979).
125. A.Izergin, V.Korepin, “The inverse scattering method approach to the quantum Shabat-Mikhailov model” // Comm.Math.Phys. Vol. 79, Num. 3, 303-316 (1981).
126. L.D. Faddeev, “Lectures on quantum inverse scattering method” // World Scientific, Singapore, 1990.
127. E. K. Sklyanin, “Quantum inverse scattering method. Selected topics” // hep-th/9211111.

128. B. Feigin, E. Frenkel and N. Reshetikhin, “Gaudin model, Bethe ansatz and correlation functions at the critical level” // Commun. Math. Phys. **166** (1994) 27.
129. F.A.Grünbaum, “The limited angle reconstruction problem in computed tomography” // Proc.Symp.Appl.Math., Vol. 27, AMS, L. Shepp (ed.), pp. 43-61 (1982)
130. F.A.Grünbaum, “A new property of reproducing kernels for classical orthogonal polynomials” // J. Math. Anal. Appl. 95, 491-500 (1983).
131. J.J.Duistermaat, F.A.Grünbaum, “Differential equations in the spectral parameter” // Comm.Math.Phys., Vol. 103, Num. 2, 177-240 (1986).
132. H.Airault, H.P.McKean, J.Moser, “Rational and elliptic solutions of the Korteweg-de Vries equation and a related many-body problem” // Comm.Pure Appl.Math. 30, 95-148 (1977).
133. G.Wilson, “Collisions of Calogero-Moser particles and an adelic Grassmannian (With an Appendix by I.G. Macdonald)” // Invent. math. 133, 1-41 (1998).
134. A.Kasman, “Bispectral KP solutions and linearization of Calogero-Moser particle systems” // Commun.Math.Phys. 172, 427-448 (1995).
135. B.Bakalov, E.Horozov, M.Yakimov, “General methods for constructing bispectral operators” // Phys.Lett.A, Vol. 222, Issues 1-2, 21, 59-66 (1996).
136. V.M.Buchstaber, V.Z.Enolskii, D.V.Leykin, “Rational analogs of abelian functions” // Functional Analysis and Its Applications, Vol. 33, Num. 2, 83-94 (1999).

137. J.P.Zubelli, F.Magri, “Differential equations in the spectral parameter, Darboux transformations and a hierarchy of master symmetries for KdV” // *Comm.Math.Phys.*, Vol. 141, Num. 2, 329-351 (1991).
138. V.Spiridonov, A.Zhedanov, “Discrete Darboux transformations, the discrete-time Toda lattice, and the Askey-Wilson polynomials” // *Methods and Applications of Analysis* 2 (4), 369-398 (1995).
139. B.Bakalov, E.Horozov, M.Yakimov, “Bispectral Algebras of Commuting Ordinary Differential Operators” // *Comm.Math.Phys.*, Vol. 190, 331-373 (1997).
140. “The bispectral problem” // J.Harnad, A.Kasman (eds.), *CRM Proc. Lecture Notes* 14, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1998).
141. A. Mironov and A. Morozov, “Commuting Hamiltonians from Seiberg-Witten theta functions” // *Phys. Lett. B* **475** (2000) 71.
142. A. Mironov and A. Morozov, “Double elliptic systems: Problems and perspectives” // [hep-th/0001168](https://arxiv.org/abs/hep-th/0001168).
143. A. Mironov and A. Morozov, “p,q duality and Hamiltonian flows in the space of integrable systems or integrable systems as canonical transforms of the free ones” // *Phys. Lett. B* **524** (2002) 217.
144. S.N.M.Ruijsenaars, “Action-Angle Maps and Scattering Theory for Some Finite-Dimensional Integrable Systems” // *Comm.Math.Phys.* 115, 127-165 (1988).
145. H.W.Braden, A.Marshakov, A.Mironov, A. Morozov, “On double-elliptic integrable systems: 1. A duality argument for the case of $SU(2)$ ” // *Nucl.Phys. B*, Vol. 573, Issues 12, 1, 553-572 (2000).
146. V.Fock, A.Gorsky, N.Nekrasov, V.Rubtsov, “Duality in integrable systems and gauge theories” // *JHEP* 07 (2000) 028.

147. L Fehér and C Klimcik, “On the duality between the hyperbolic Sutherland and the rational Ruijsenaars-Schneider models” // J. Phys. A: Math. Theor. 42 185202 (2009).
148. M.Jimbo, T.Miwa, Y.Mori, M.Sato, “Density Matrix of an Impenetrable Bose Gas and the Fifth Painleve Transcendent” // Physica 1D, 80-158 (1980).
149. I.Krichever, O.Babelon, E.Billey, M.Talon, “Spin generalization of the Calogero-Moser system and the Matrix KP equation” // AMS Transl. (2), Vol. 221, 83-120 (1995).
150. N.Nekrasov, “Infinite-dimensional algebras, many-body systems and gauge theories” // AMS Transl. (2), Vol. 191 (1999).
151. W.Feller, “An introduction to the theory of probability and its applications” // Wiley, New York, 1967.
152. Yu.Chernyakov, A.Levin, M.Olshanetsky and A.Zotov, “Elliptic Schlesinger system and Painlevé VI” // J. Phys. A: Math. Gen. 39 12083 (2006).
153. P.Painlevé, “Sur les équations différentielles du second ordre et d’ordre supérieur dont l’intégrale générale est uniforme” // Acta Math., 21 (1902) 1-85.
154. R.Fuchs, “Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre” // C. R. Acad. Sci. (Paris) 141 (1905) 555-558.
155. B.Gambier, “Sur les équations différentielles du second ordre dont l’intégrale générale est uniforme” // C. R. Acad. Sci. (Paris), 142, 266-269, (1906).

156. L.Schlesinger, “Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebiger Ordnung mit feten kritischen Punkten” // J. Reine u. Angew. Math. ,141, 96-145 (1912).
157. M.Jimbo and T.Miwa, “Monodromy Preserving Deformations Of Linear Differential Equations With Rational Coefficients. 1.” // Physica D, 2, 407-448 (1981).
158. N.Reshethikin, “The Knizhnik-Zamolodchikov system as a deformation of the isomonodromic problem” // Lett. Math. Phys. 26 (1992) 167.
159. M. Jimbo, T.Miwa and K.Ueno, “Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients” // Physica 2D (1981) 306.
160. M. Jimbo, T.Miwa, Y.Mori and M. Sato, “Density matrix of an impenetrable Bose gas and the fifth Painlevé transcendent” // Physica 1D (1980) 80.
161. J. P. Harnad, “Quantum isomonodromic deformations and the Knizhnik-Zamolodchikov equations” // Symmetries and Integrability of Difference Equations CRM Conference and Lecture Note Series 9, (eds. D. Levi, L. Vinet and P. Winternitz (1996).
162. D. A. Korotkin and J. A. H. Samtleben, “On the quantization of isomonodromic deformations on the torus” // Int. J. Mod. Phys. A **12** (1997) 2013.
163. J. Teschner, “Quantization of the Hitchin moduli spaces, Liouville theory, and the geometric Langlands correspondence I” // Adv. Theor. Math. Phys. **15** (2011) 471.
164. B. Feigin, E. Frenkel and V. Toledano Laredo, “Gaudin models with irregular singularities” // Adv. Math. **223** (2010) 873.

165. V. V. Bazhanov and V. V. Mangazeev, “Eight-vertex model and non-stationary Lamé equation” // J. Phys. A **38** (2005) L145.
166. A. Mironov, A. Morozov, Y. Zenkevich, A. Zotov, “Spectral Duality in Integrable Systems from AGT Conjecture” // JETP Lett. **97** (2013) 45.
167. A. Mironov, A. Morozov, B. Runov, Y. Zenkevich, A. Zotov, “Spectral Duality Between Heisenberg Chain and Gaudin Model” // Lett. Math. Phys., **103** (3) (2013) 299–329.
168. E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, “A generalization of the Capelli identity” // arXiv:math/0610799.
169. D. Galakhov, A. Mironov and A. Morozov, “S-duality as a beta-deformed Fourier transform” // JHEP **1208** (2012) 067.
170. N. Nemkov, “S-duality as Fourier transform for arbitrary ϵ_1, ϵ_2 ” // J. Phys. A: Math. Theor. **47** (2014) 105401.
171. E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, “Bethe Eigenvectors of Higher Transfer Matrices” // J. Stat. Mech. Theory Exp. **8** (2006) P08002.
172. M. Hopkins, A. Molev, “A q -Analogue of the Centralizer Construction and Skew Representations of the Quantum Affine Algebra” // SIGMA **2** (2006) 092.
173. A. Chervov, G. Falqui, V. Rubtsov, “Algebraic properties of Manin matrices I” // arXiv:0901.0235.
A. Chervov, G. Falqui, V. Rubtsov, A. Silantyev, “Algebraic properties of Manin matrices II: q -analogues and integrable systems” // arXiv:1210.3529.
174. E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, “Generating Operator of XXX or Gaudin Transfer Matrices Has Quasi-Exponential Kernel” // SIGMA **3** (2007), 060.

175. E. Mukhin, A. Varchenko, “Quasi-polynomials and the Bethe Ansatz”
// , *Geom. Topol. Monogr.* **13** (2008) 385-420.
176. A. V. Zotov, “1+1 Gaudin Model” // *SIGMA* **7** (2011) 067.
177. G. Aminov, S. Arthamonov, A. Levin, M. Olshanetsky and A. Zotov,
“Painleve Field Theory” // arXiv:1306.3265 [math-ph].
178. T. Dimofte, S. Gukov, L. Hollands, “Vortex Counting and Lagrangian
3-manifolds” // *Lett. Math. Phys.* **98** (2011) 225.
179. A. Mironov, A. Morozov, “Equations on knot polynomials and 3d/5d
duality” // *AIP Conf. Proc.* **1483** (2012) 189.
180. R. Howe, “Remarks on Classical Invariant Theory” // *Transactions of
American Mathematical Society*, **313** (2) 1989.
181. R. Howe, “Transcending Classical Invariant Theory” // *Journal of
American Mathematical Society*, **2** (3) 1989.
182. S. Cautis, J. Kamnitzer, S. Morrison, “Webs and quantum skew Howe
duality” // arXiv:1210.6437.
183. M. Mackaay, Y. Yonezawa, “The $\mathfrak{sl}(N)$ web categories and categorified
skew Howe duality” // arXiv:1306.6242.
184. V. V. Bazhanov, S. M. Sergeev, “Zamolodchikov’s tetrahedron equation
and hidden structure of quantum groups” // *J. Phys. A* **39** (2006) 3295.
185. A. Mironov, A. Morozov and S. Natanzon, “Complete Set of Cut-and-
Join Operators in Hurwitz-Kontsevich Theory” // *Theor. Math. Phys.*
166, 1 (2011).
186. H. Zhang and Y. Matsuo, “Selberg Integral and $SU(N)$ AGT
Conjecture” // *JHEP* **1112**, 106 (2011).
187. H. Itoyama and T. Oota, “ $An(1)$ Affine Quiver Matrix Model” // *Nucl.
Phys. B* **852**, 336 (2011).

188. H. Itoyama, T. Oota and R. Yoshioka, “2d-4d Connection between q -Virasoro/W Block at Root of Unity Limit and Instanton Partition Function on ALE Space” // Nucl. Phys. B **877** (2013) 506.
189. M. Nazarov and E. Sklyanin, Integrable Hierarchy of the Quantum Benjamin-Ono Equation, SIGMA **9**, 078 (2013).
190. H. Awata, B. Feigin, A. Hoshino, M. Kanai, J. Shiraishi and S. Yanagida, “Notes on Ding-Iohara algebra and AGT conjecture” // arXiv:1106.4088 [math-ph].
191. A. Mironov, A. Morozov, S. Shakirov and A. Smirnov, “Proving AGT conjecture as HS duality: extension to five dimensions” // Nucl. Phys. B **855**, 128 (2012).