На правах рукописи

Зенкевич
Егор Андреевич

Спектральная дуальность в калибровочных теориях, конформных теориях поля и интегрируемых системах

специальность 01.04.02 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

МОСКВА — 2015

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте ядерных исследований Российской академии наук.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, академик РАН, главный научный сотрудник ИЯИ РАН
Рубаков Валерий Анатольевич.

Официальные оппоненты:
Белавин Александр Абрамович,
доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор, Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук (г. Черноголовка), главный научный сотрудник;
Исаев Алексей Петрович,
доктор физико-математических наук, профессор, Объединенный институт ядерных исследований, Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова (г. Дубна), зам. директора лаборатории.
Ведущая организация:
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН (г. Москва)

Защита состоится в часов на заседании Диссертационного совета Д 002.119.01 Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института ядерных исследований Российской академии наук (ИЯИ РАН) по адресу: 117312, г. Москва, проспект 60-летия Октября, дом 7а.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИЯИ РАН и на сайте www.inr.ru.
Автореферат разослан

Ученый секретарь Диссертационного совета Д 002.119.01
доктор физико-математических наук С. В. Троицкий

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования.

Одним из самых интересных продвижений в теоретической физике в последнее время стало открытие дуальностей в квантовой теории поля и теории струн. Дуальность — это нетривиальное соответствие между наблюдаемыми в двух моделях, такое что вычисления в обоих случаях дают одинаковые результаты. Часто (хотя и не всегда) дуальности связывают режим сильной связи в одной теории с режимом слабой связи в другой. С одной стороны, это позволяет делать неожиданные предсказания относительно непертурбативных явлений в режиме сильной связи, которые невозможно было получить стандартными методами теории возмущений. Однако, с другой стороны, это же свойство затрудняет теоретическую проверку такого рода дуальностей: чрезвычайно сложно произвести вычисления величин одновременно по обе стороны соответствия. Поэтому большинство дуальностей, делающих предсказания относительно режима сильной связи, носят пока характер гипотез и строго не обоснованы.

В данной работе мы рассмотрим пример дуальности другого типа, в которой константы связи двух теорий не обязательно находятся в обратной зависимости друг от друга. Это дает возможность произвести вычисления на обеих сторонах соответствия, проверить и во многих случаях строго доказать связь между двумя системами. Мы будем работать с суперсимметричными калибровочными теориями и двумерными конформными теориями поля, поскольку они нетривиальны, но при этом для многих наблюдаемых известны точные ответы, содержащие как пертурбативные, так и непертурбативные вклады. Также, в нашем рассмотрении естественным образом возникнут интегрируемые системы, которые связаны с описанием некоторых наблюдаемых, как в калибровочных теориях, так и в двумерных конформных теориях поля.

В калибровочных теориях поля в четырех измерениях с расширенной суперсимметрией в векторном супермультиплете присутствует комплексное скалярное поле в присоединенном представлении калибровочной группы. При низких энергиях это поле приобретает вакуумное среднее, и происходит спонтанное нарушение калибровочной симметрии до абелевой подгруппы. Вакуумные средние диагональных элементов скалярного поля при этом образуют плоские направления (модули) классического потенциала и могут принимать любые комплексные значения. Из требования суперсимметрии следует, что низкоэнергетическое эффективное действие для оставшихся степеней свободы скалярного поля задается единственной локально голоморфной функцией модулей $\mathcal{F}(a)$, называемой препотенциалом.

Препотенциал был вычислен *точно* (в том числе, с учетом непертурбативных поправок) в работе Зайберга и Виттена (Зайберг и Виттен, 1994). Процедура его определения следующая. Необходимо написать уравнение комплексной алгебраической *кривой Зайберга–Виттена* $P(y, z) = 0$ (где P — полином, коэффициенты которого определяются параметрами теории и модулями) и *дифференциал Зайберга–Виттена* на ней вида $dS = y\,dz$. Топологически комплексная кривая — это двумерная поверхность с количеством ручек равным рангу калибровочной группы. Необходимо выбрать базис одномерных циклов A_i и B_i на поверхности так, чтобы пересечения были равны $A_i \cdot A_j = B_i \cdot B_j = 0$, $A_i \cdot B_j = \delta_{ij}$. Затем надо взять интеграл от дифференциала Зайберга–Виттена по этим циклам, и тогда препотенциал $\mathcal{F}_{SW}$ как функция вакуумных средних a_i найдется из уравнений

$$\begin{aligned} a_i &= \oint_{A_i} dS\,, \\ \frac{\partial \mathcal{F}_{SW}}{\partial a_i} &= \oint_{B_i} dS\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Аналогичная конструкция, включающая в себя комплексную кривую, встречается в классических алгебраических интегрируемых системах. Интегрируемые механические системы имеют столько же интегралов движения, сколько и степеней свободы. Довольно часто уравнения движения для интегрируемой модели можно записать в форме Лакса:

$$\frac{dL(z)}{dt} = [M, L(z)],$$

где $L(z)$ — матрица Лакса, зависящая от динамических переменных системы, а также от дополнительного *спектрального параметра* z. Очевидно, что в этом случае собственные значения матрицы $L(z)$ дают интегралы движения. Таким образом, можно записать производящую функцию для интегралов движения как характеристический полином матрицы $L(z)$, т. е. $P(y,z) = \det(y - L(z))$. Алгебраическая кривая $P(y,z) = 0$ в теории интегрируемых систем называется *спектральной кривой.*

Оказывается, что для широкого класса калибровочных теорий, кривые Зайберга–Виттена совпадают со спектральными кривыми для известных интегрируемых систем (Горский и др., 1995, Донаги и Виттен, 1995). Например, калибровочной теории с группой $SU(N)$ и $2N$ дополнительными мультиплетами (т. н. гипермультиплетами) материи в фундаментальном представлении соответствует интегрируемая замкнутая XXX цепочка Гейзенберга с N узлами. Коэффициенты в уравнении кривой — это с одной стороны интегралы движения механической системы, а с другой — параметры и вакуумные модули калибровочной теории.

Препотенциал Зайберга–Виттена был изначально получен путем весьма непрямых рассуждений, использующих свойства аналитичности и предположения о структуре сингулярностей в пространстве вакуумных модулей. Задача *прямого* вычисления эффективного действия была решена Некрасовым (Некрасов, 2003). Для суперсимметричной регуляризации интегралов по пространствам модулей инстантонов, он ввел два параметра деформации ϵ_1 и ϵ_2, соответствующие поворотам в двух кооординатных плоскостях в четырехмерном пространстве. Деформированная статсумма Z_{Nek} представляет собой (помимо тривиальной однопетлевой пертурбативной части) ряд по количеству инстантонов, причем для калибровочной группы $SU(N)$ инстантоны «нумеруются» наборами из N диаграмм Юнга — невозрастающих последовательностей натуральных чисел, таких как, например, $A = (4, 3, 2, 2, 1)$. В пределе $\epsilon_{1,2} \to 0$ асимптотика статсуммы воспроизводит препотенциал Зайберга–Виттена: $Z_{\mathrm{Nek}} \xrightarrow{\epsilon_{1,2}\to 0} \exp\left(\frac{1}{\epsilon_1\epsilon_2}\mathcal{F}_{\mathrm{SW}}\right)$.

Существует гипотеза относительно поведения статсуммы Некрасова при стремлении только одного из параметров деформации, ϵ_2, к нулю (предел Некрасова–Шаташвили) (Некрасов и Шаташвили, 2009). Считается, что при этом деформированный препотенциал $\mathcal{F}_{\mathrm{NS}}$ задается *квантованием* соответствующей классической интегрируемой системы Зайберга–Виттена. Квантование интегрируемой системы можно понимать как замену переменных в спектральной кривой $P(x, y) = 0$ на некоммутирующие операторы $\hat{x}$ и $\hat{y}$. Полученный оператор — дифференциальный или разностной *оператор Бакстера* действует на волновую функцию $Q(x)$ в разделенных переменных $P(\hat{x}, \hat{y})Q(x) = 0$. Периоды *квантового* дифференциала $dS = d\ln Q(x)$ (или монодромии $Q(x)$) определяют деформированный препотенциал $\mathcal{F}_{\mathrm{NS}}$ аналогично тому, как уравнения (1) определяют классический препотенциал Зайберга–Виттена (Миронов и Морозов, 2009). Гипотеза подвергалась усиленной проверке в случае $SU(N)$ калибровочной теории без материи в работах (Миронов и Морозов, 2009) и (Пополитов, 2010). В данной диссертации мы рассмотрим теорию с дополнительными $2N$ мультиплетами материи в фундаментальном представлении. В работе (Маруйоши и Таки, 2010)были получены некоторые результаты для $SU(2)$ теории с $N_f = 4$ мультиплетами, однако при этом авторы использовали уравнение Бакстера не для квантовой цепочки, а для системы Годена. Мы используем уравнение Бакстера для XXX спиновой цепочки Гейзенберга и покажем, что два подхода дают одинаковые квантовые периоды по крайней мере для низших порядков по $\hbar$. Мы также покажем, что гипотеза верна во всех порядках по $\hbar$ для $N = 2$ теории с $N_f \leq 4$ мультиплетами. Эквивалентность двух подходов далеко не очевидна даже в классическом случае, однако оказывается, что квантовые периоды также совпадают. Это указывает на то, что должно существовать нетривиальное соответствие между системами Годена и XXX цепочками.

Чтобы понять причину связи между системами Годена и XXX спиновыми цепочками, рассмотрим дуальность Алдая–Гайотто–Тачикавы (Гайотто, 2009, Алдай, Гайотто, Тачикава, 2009). Эта дуальность устанавливает соответствие между двумерными конформными теориями поля и четырехмерными калибровочными теориями с деформацией Некрасова. Статсумма калибровочной теории Z_{Nek} равна конформному блоку $\mathcal{B}$ — голоморфной части коррелятора конформной теории поля, причем количество точек определяется составом материи калибровочной теории, а размерности операторов, расположенных в точках — массами и вакуумными модулями. Положение точек определяется константой связи четырехмерной теории.

При стремлении одного из некрасовских параметров ϵ_2 к нулю центральный заряд алгебры Вирасоро конформной теории поля стремится к бесконечности и теория поля эффективно становится классической. При этом возникают дифференциальные уравнения на конформные блоки со вставкой одного оператора с вырожденной размерностью: $\hat{P}(z, \partial_z)\langle V_{\text{degen}}(z) \prod V_\Delta(q_i)\rangle = 0$, где $\hat{P}$ — дифференциальный оператор. Известно, что такие уравнения совпадают с уравнениями Бакстера для интегрируемых систем типа Годена.

Итак, по две стороны АГТ соотношения расположены *a priori* разные интегрируемые системы, которые должны совпадать, если гипотеза АГТ верна. Одной из основных задач данной диссертации является доказательство эквивалентности между этими интегрируемыми системами. В простейшем примере такого типа со стороны калибровочной теории имеется цепочка Гейзенберга, которая описывается спектральной кривой

$$\Gamma^{\text{Heisen}}(w,x): \quad \det(w-T(x))=0$$

с $GL(2)$-значной N-точечной трансфер-матрицей $T(x)$ и дифференциалом Зайберга–Виттена (ЗВ-дифференциалом) $\mathrm{d}S^{\text{Heisen}}(w,x)=x\frac{\mathrm{d}w}{w}$. На стороне конформной теории, возникает система Годена, определяемая своей спектральной кривой

$$\Gamma^{\text{Gaudin}}(y,z): \quad \det(y-L(z))=0$$

с $\mathfrak{gl}_N$-значной четырехточечной матрицей Лакса $L(z)$ и ЗВ-дифференциало $\mathrm{d}S^{\text{Gaudin}}(y,z)=y\,\mathrm{d}z$. В диссертации показано, что замена переменных $z=w$, $\lambda=x/w$ переводит спектральные кривые и ЗВ-дифференциалы двух систем друг в друга. Таким образом, верно следующее соотношение:

$$\Gamma^{\text{Gaudin}}(y,z)=\Gamma^{\text{Heisen}}(z,zy)\,,$$
$$\mathrm{d}S^{\text{Gaudin}}(y,z)=\mathrm{d}S^{\text{Heisen}}(z,zy)\,.$$

Соотношения подобного типа между спектральными кривыми возникали ранее в работах (Адамс, Харнад, Уртюбиз, 1990, Харнад, 1994). Следуя работе (Бертола, Эйнар, Харнад, 2002), мы называем такую дуальность *спектральной дуальностью.*

Квантовая версия этой дуальности возникает при точном квазиклассическом квантовании спектральных кривых. Рассматривая ЗВ-дифференциал как симплектическую 1-форму на $\mathbb{C}^2$-плоскости (y,z), можно получить пару канонических переменных $(p(y,z),q(z))$, которая приводит ЗВ-дифференциал к виду $\mathrm{d}S(y,z)=p\mathrm{d}q$. Далее, имеется естественное квантование спектральной кривой, определяемое правилом $(p,q)\to(\hbar\partial_q,q)$. Для вышеупомянутых моделей имеем:

$$\hat{\Gamma}^{\text{Heisen}}(z,\hbar z\partial_z)\Psi^{\text{Heisen}}(z)=0\,,$$
$$\hat{\Gamma}^{\text{Gaudin}}(\hbar\partial_z,z)\Psi^{\text{Gaudin}}(z)=0$$

с некоторым выбором упорядочения. Волновая функция может быть записана с помощью квантовой деформации ЗВ-дифференциала на спектральной кривой, т. е. $\Psi(z) = \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int^q \mathrm{d}S(\hbar)\right)$, где $\mathrm{d}S(\hbar) = p(q,\hbar)\mathrm{d}q$ и $p(q,0) = p(q)|_\Gamma$. Монодромии волновой функции вокруг A- и B-циклов кривой Γ даются деформированными переменными типа действия:

$$\Psi(z + A_i) = \exp\left(-\tfrac{1}{\hbar}a_i^\hbar\right)\Psi(z), \quad a_i^\hbar = \oint\limits_{A_i} \mathrm{d}S(\hbar),$$
$$\Psi(z + B_i) = \exp\left(-\tfrac{1}{\hbar}\tfrac{\partial\mathcal{F}_{\text{NS}}}{\partial a_i^\hbar}\right)\Psi(z), \quad \frac{\partial\mathcal{F}_{\text{NS}}}{\partial a_i^\hbar} = \oint\limits_{B_i} \mathrm{d}S(\hbar),$$

где $\mathcal{F}_{\text{NS}}$ — предел Некрасова–Шаташвили функции Некрасова. Соотношение АГТ утверждает, что функция Некрасова совпадает с конформным блоком, а значит и волновые функции для двух интегрируемых систем должны совпадать:

$$\boxed{\Psi^{\text{Heisen}}(z) = \Psi^{\text{Gaudin}}(z)}$$

Аналогично $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричным калибровочным теориям в четырех измерениях, рассматривают также пятимерные $\mathcal{N} = 1$ теории, компактифицированные на окружность конечного радиуса R_5 (Горский, Гуков и Миронов, 1998). Хотя пятимерные теории и неперенормируемы с точки зрения подсчета степеней, многим выражениям в них все же можно придать смысл наблюдаемых в эффективной теории. Также можно рассматривать удобные ультрафиолетовые дополнения этих теорий, полученные с помощью теории струн. Для нахождения низкоэнергетического эффективного действия в таких теориях применимы те же методы, что и в четырех измерениях. В частности, интегрируемые системы, соответствующие таким теориям — это анизотропные (XXZ) спиновые цепочки, причем параметр анизотропии связан с радиусом компактификации как $q = e^{-\epsilon_2 R_5}$. Существует также соответствующая деформация соотношений АГТ, в которую входят q-деформированные конформные блоки. При такой деформации для блоков со вставкой вырожденного оператора получается не дифференциальное, а разностное уравнение, по форме вновь напоминающее уравнение Бакстера для XXZ цепочки. Оказывается, что в этом случае также сохраняется спектральная дуальность. Она переводит $\mathfrak{gl}_K$ XXZ спиновую цепочку с N узлами в $\mathfrak{gl}_N$ XXZ цепочку с K узлами. При взятии четырехмерного предела, т. е. при $q \to 1$, одна из XXZ цепочек переходит в XXX цепочку, а другая — в тригонометрическую модель Годена. В данной диссертации мы докажем классическую спектральную дуальность для XXZ цепочек, а также приведем аргументы в пользу квантовой версии этой дуальности.

Интересно исследовать струкутуру АГТ соотношений не только в пределе Некрасова–Шаташвили, $\epsilon_2 \to 0$, (когда возникает спектральная дуальность интегрируемых систем), но и для произвольных параметров деформации $\epsilon_{1,2}$. На языке конформной теории поля это соответствует произвольным конечным значениям центрального заряда c конформной алгебры — алгебры Вирасоро или, в более сложных случаях, W_N-алгеры.

Инстантонная часть статсуммы Некрасова дается рядом по экспоненте от обратной константы связи Λ. Каждое слагаемое в разложении имеет в действительности более тонкую структуру, состоящую из нескольких факторизованных слагаемых, так что полная сумма для калибровочной группы $SU(2)$ может быть записана как сумма по парам диаграмм Юнга (A, B):

$$Z_{\text{Nek}}(\Lambda|a, m_f, q, t) = \sum_{A,B} \Lambda^{|A|+|B|} \frac{(z_{\text{fund}}(A))^2 (z_{\text{fund}}(B))^2}{z_{\text{vect}}(A, B)},$$

где $z_{\text{fund,vect}}$ — некоторые полиномы от параметров калибровочной теории. Со стороны конформной теории поля эта сумма соответствует разложению четырехточечного конформного блока по полной системе базисных векторов $|A, B, \alpha\rangle$, нумеруемых парами диаграмм Юнга. Это разложение можно схематически записать как

$$\mathcal{B}\left(\Lambda \,\middle|\, {}^{\alpha_\Lambda}_{\alpha_0}\ \alpha\ {}^{\alpha_1}_{\alpha_\infty}\right) = \langle V_0(0) V_\Lambda(\Lambda) | \text{через } V_\alpha \text{ канал} | V_1(1) V_\infty(\infty)\rangle =$$
$$= \sum_{A,B} \Lambda^{|A|+|B|} \langle V_0(0) V_\Lambda(1) | A, B, \alpha\rangle \langle A, B, \alpha | V_1(1) V_\infty(\infty)\rangle \overset{\text{АГТ}}{=}$$

$$\stackrel{\text{АГТ}}{=} \sum_{A,B} \Lambda^{|A|+|B|} \frac{(z_{\text{fund}}(A))^2 (z_{\text{fund}}(B))^2}{z_{\text{vect}}(A,B)}.$$

Один из способов доказательства АГТ соответствия заключается в поиске специального базиса, для которого равенство в последних двух строчках выполнено не только как равенство рядов по степеням Λ, но и *для каждой пары диаграмм* (Альба, Фатеев, Литвинов и Тарнопольский, 2011), так что

$$\langle V_0(0) V_\Lambda(1) | A, B, \alpha \rangle \langle A, B, \alpha | V_1(1) V_\infty(\infty) \rangle = \frac{(z_{\text{fund}}(A))^2 (z_{\text{fund}}(B))^2}{z_{\text{vect}}(A,B)} \tag{2}$$

При $\epsilon_1 = -\epsilon_2$ (или $c = 1$ в конформной теории поля), в самом деле имеется простой базис, состоящий их полиномов Шура, который дает правильное разложение конформных блоков (Белавин и Белавин, 2011, Миронов, Морозов и Шакиров, 2011). Однако, для общих значений ϵ_1, ϵ_2 базис оказывается более сложным: в частности, наивной деформации полиномов Шура к полиномам Джека или Макдональда недостаточно. Правильный базис для $SU(2)$ калибровочной теории, состоящий из *обобщенных* полиномов Джека J_{AB}, был найден в работе (Морозов и Смирнов, 2014). В данной диссертации мы обобщим их результаты на случай калибровочной группы $SU(3)$ и пятимерной калибровочной теории. Мы покажем, что в последнем случае выделенный базис состоит из *обобщенных* полиномов Макдональда M_{AB}, впервые введенных в работе (Окубо, 2014).

Для вычисления матричных элементов в уравнении (2) может использоваться удобное представление Доценко–Фатеева (Доценко и Фатеев, 1984). В общем случае это представление позволяет записать конформный блок или матричный элемент примарного поля в виде многократного интеграла. Для различных теорий конкретный вид интегралов несколько отличается. В частности, для q-деформированной конформной теории, соответствующей пятимерной калибровочной теории, он имеет вид интеграла Джексона, т. е. дискретной *суммы* вида

$$\int_0^a d_q z f(z) = (1-q)\sum_{k\geq 0} q^k a f(q^k a) = \frac{1-q}{1-q^{a\partial_a}}(af(a)).$$

Матричные элементы в специальном базисе даются q-деформированным сельберговским средним от обобщенных полиномов Макдональда:

$$\langle V_0(0)V_\Lambda(1)|A,B,\alpha\rangle = \frac{\int_0^1 d_q^N x\, \mu(x) M_{AB}(x)}{\int_0^1 d_q^N x\, \mu(x)}, \tag{3}$$

где $\mu(x)$ — q-деформированная мера Сельберга. В данной диссертации выведены петлевые уравнения, которые дают рекуррентные соотношения для средних от любых симметрических полиномов. Они также позволяют проверить соотношения АГТ, т. е. показать, что средние в уравнении (3) действительно даются функциями Некрасова, и схематически могут быть записаны следующим образом

$$\frac{\int_0^1 d_q^N x\, \mu(x) M_{AB}(x)}{\int_0^1 d_q^N x\, \mu(x)} = \frac{(z_{\mathrm{fund}}(A))(z_{\mathrm{fund}}(B))}{[z_{\mathrm{vect}}(A,B)]^{1/2}}.$$

В работах (Аганаджич, Хаузи, Козказ и Шакиров, 2013, Аганаджич, Хаузи и Шакиров, 2013) был предложен альтернативный подход к пятимерному обобщению АГТ соответствия. В этих работах сумма в интегралах Джексона в представлении Доценко–Фатеева *без* разложения по базису была интерпретирована как сумма по *парам диаграмм Юнга:*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}\left(\Lambda \,\middle|\, \begin{smallmatrix} \alpha_\Lambda & & \alpha_1 \\ \alpha_0 & \alpha & \alpha_\infty \end{smallmatrix}\right) = \langle V_0(0)V_\Lambda(\Lambda)|\text{через } V_\alpha \text{ канал}|V_1(1)V_\infty(\infty)\rangle \simeq \\ \simeq \int_0^1 d_q^{N_+} x\, d_q^{N_-} y\, \mu(x)\mu(y)\nu(\Lambda,x,y) = \\ = \sum_{R_+,R_-} \mu(q^{R_+}t^\rho)\mu(q^{R_-}t^\rho)\nu(\Lambda, q^{R_+}t^\rho, q^{R_-}t^\rho),\end{aligned} \tag{4}$$

где $\nu(\Lambda, x, y) = \sum_{AB} \Lambda^{|A|+|B|} M^*_{AB}(x) M_{AB}(y)$ — некоторая рациональная функция, а $\rho = (N-1, N-2, \ldots, 0)$ — вейлевский вектор. Более того, было показано, что подинтегральное выражение равно функции Некрасова

$$\mu(q^{R_+}t^\rho)\mu(q^{R_-}t^\rho)\nu(\Lambda, q^{R_+}t^\rho, q^{R_-}t^\rho) = (\Lambda^\vee)^{|R_+|+|R_-|} \frac{(z_{\mathrm{fund}}(R_+))^2 (z_{\mathrm{fund}}(R_-))^2}{z_{\mathrm{vect}}(R_+, R_-)}.$$

Однако, это *не та* функция Некрасова, что фигурирует в АГТ соответствии, а *спектрально дуальная* к ней. Можно заметить, что разложение в уравнении (4) производится не по исходной константе связи Λ, которая теперь нетривиальным образом входит в каждое слагаемое, а по *спектрально дуальной* константе связи $\Lambda^\vee$, пропорциональной промежуточному импульсу q^α конформного блока.

Имеются, таким образом, *два различных* разложения q-деформированного конформного блока, связанные спектральной дуальностью. Исходное разложение по специальному базису соответствует АГТ дуальной функции Некрасова, а спектрально дуальное разложение по промежуточному импульсу соответствует явной сумме по полюсам интеграла Доценко–Фатеева:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}\left(\Lambda \,\middle|\, \begin{smallmatrix} \alpha_\Lambda & & \alpha_1 \\ \alpha_0 & \alpha & \alpha_\infty \end{smallmatrix}\right) \arrow[r, equal, "\mathrm{AGT}"] \arrow[d, equal, "\mathrm{DF}"] & Z_{\mathrm{Nek}}(\Lambda|a, m_f, q, t) \arrow[dl, equal, "\mathrm{Spectral}"] \\ Z^\vee_{\mathrm{Nek}}(\Lambda^\vee = q^{2\alpha}|a^\vee, m^\vee_f, q, t) & \end{tikzcd} \tag{5}$$

Вообще говоря, спектрально дуальные пятимерные функции Некрасова описывают калибровочные теории с различными калибровочными группами и составом материи: $SU(N)^{M-1}$ и $SU(M)^{N-1}$ колчанные калибровочные теории соответственно (Бао, Помони, Таки и Яги, 2012). В простейшем случае, который мы рассматриваем здесь, $N = M = 2$, так что дуальные теории имеют одну и ту же калибровочную группу. Тем не менее, параметры дуальных теорий выражаются друг через друга нетривиальным образом, например дуальная константа связи $\Lambda^\vee$ — это комбинация масс исходной теории. Можно заметить, что соотношения АГТ получаются как комбинация явного разложения Доценко–Фатеева и спектральной дуальности.

Можно заполнить пустующий угол в диаграмме (5), применив АГТ дуальность к статсумме $Z^{\vee}_{\text{Nek}}$, или интерпретируя Z_{Nek} как разложение Доценко–Фатеева для дуального конформного блока $\mathcal{B}^{\vee}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}\left(\Lambda \left| \begin{smallmatrix} \alpha_\Lambda & & \alpha_1 \\ \alpha_0 & \alpha & \alpha_\infty \end{smallmatrix} \right.\right) \arrow[r, equal, "\text{AGT}"] \arrow[d, equal, "\text{DF}"] \arrow[dr, equal] & Z_{\text{Nek}}(\Lambda|a, m_f, q, t) \arrow[d, equal, "\text{DF}"] \arrow[dl, equal] \\
Z^{\vee}_{\text{Nek}}(\Lambda^{\vee} = q^{2\alpha}|a^{\vee}, m^{\vee}_f, q, t) \arrow[r, equal, "\text{AGT}"] & \mathcal{B}^{\vee}\left(\Lambda^{\vee} \left| \begin{smallmatrix} \alpha^{\vee}_\Lambda & & \alpha^{\vee}_1 \\ \alpha^{\vee}_0 & \alpha^{\vee} & \alpha^{\vee}_\infty \end{smallmatrix} \right.\right)
\end{tikzcd}$$

В общем случае дуальный конформный блок $\mathcal{B}^{\vee}$ содержит другое количество точек и вычисляется для другой конформной алгебры (q-W_M вместо q-Вирасоро), по сравнению с исходным блоком $\mathcal{B}$. Однако для четырехточечного конформного блока q-Вирасоро и число точек, и конформная алгебра остаются теми же. При этом размерности полей и их координаты нетривиально перевыражаются друг через друга. Одна из задач данной диссертации — исследовать спектральную дуальность для конформных блоков и прояснить ее связь с дуальностью АГТ.

Оказывается, что статсумма пятимерной калибровочной теории имеет более тонкую структуру, чем разложение Некрасова. Эту структуру можно проанализировать, если посмотреть на калибровочную теорию с точки зрения теории топологических струн. В подходе «геометрической инженерии», предложенном в работах (Кац, Клемм и Вафа, 1997, Кац, Майр и Вафа, 1998), $\mathcal{N} = 1$ калибровочная теория в пяти измерениях была получена компатификацией М-теории на некоторое шестимерное многообразие Калаби-Яу. Пятимерная статсумма Некрасова в этом подходе равна статсумме топологических струн на многообразии, соответствующем калибровочной теории. Геометрия многообразия Калаби-Яу задается его торической диаграммой, которая, для случая $SU(2)$ калибровочной теории с четырьмя гипермультиплетами в фундаментальном представлении, показана на Рис. 1. Ребра диаграммы соответствуют 2-

циклам в многообразии Калаби-Яу, а Кэлеровы параметры этих циклов Q_i соответствуют параметрам калибровочной теории.

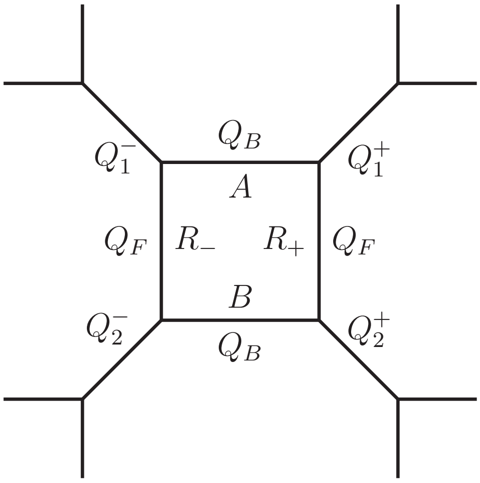

Рис. 1: Торическая диаграмма, соответствующая $SU(2)$ калибровочной теории с четырьмя гипермультиплетами в фундаментальном представлении. $Q_F \sim q^{2a}$ соответствует вакуумному среднему скаляра, $Q_{1,2}^{\pm} \sim q^{m_{1,2}^{\pm}}$ — массам гипермультиплетов, а $Q_B \sim \Lambda$ — константе связи теории.

Статсумму теории топологических струн можно вычислить, пользуясь техникой топологических вершин, предложенной в работах (Икбал, 2002, Аганаджич, Клемм, Мариньо и Вафа, 2005). Каждому внутреннему ребру диаграммы сопоставляется диаграмма Юнга, а каждой тривалентной вершине — вершинная функция $C_{\lambda\mu\nu}(q)$, зависящая от трех диаграмм, расположенных на примыкающих ребрах. Внешним ребрам сопоставляются пустые диаграммы. Статсумма получается при суммировании по всем промежуточным диаграммам λ_i с весами $(-Q_i)^{|\lambda_i|}$. В данной диссертации мы покажем, что два спектрально дуальных разложения статсуммы соответствуют двум существенно различным способам вычисления сумм по внутренним ребрам диаграммы, получающимся друг из друга поворотом на $\frac{\pi}{2}$.

Цель работы состоит в изучении связи между калибровочными теориями и квантовыми интегрируемыми системами, исследовании спектральной дуальности в интегрируемых системах, а также в изучении АГТ соотношений для двумерной конформной теории поля и их связи со спектральной дуальностью.

Научная новизна и практическая ценность.

В данной диссертации исследована связь между квантовым интегрируемыми системами и функциями Некрасова. В частности, для широкого класса систем впервые показано, что статсумма Некрасова в пределе Некрасова–Шаташвили дается монодромией волновой функции интегрируемой системы в разделенных переменных. Также, исходя из дуальности АГТ, найдена новая дуальность, связывающая различные интегрируемые системы, как классические так и квантовые. В частности, с помощью этой *спектральной* дуальности показана эквивалентность тригонометрической системы Годена и XXX спиновой цепочки Гейзенберга. Также впервые показана эквивалентность двух XXZ спиновых цепочек с различным количеством узлов и разными алгебрами спинов. Показана эквивалентность тригонометрической и редуцированной моделей Годена на классическом уровне.

Исследована матрично-модельная формулировка гипотезы АГТ в случае произвольных центральных зарядов. В частности, для калибровочной теории с группой $SU(3)$ найдено разложение конформного блока, соответствующее разложению Некрасова для инстантонной статсуммы. Впервые найдены петлевые уравнения для соответствующих интегралов Сельберга, и, с помощью символьных вычислений на компьютере получены их решения. Исследовано пятимерное обобщение гипотезы АГТ, также для случая произвольных центральных зарядов. Впервые получен базис для разложения q-деформированного конформного блока, воспроизводящий пятимерную статсумму Некрасова. Также впервые найдены петлевые уравнения и получены их решения, причем они реализованы в виде эффективного компьютерного алгоритма.

В диссертации также предложена новая интерпретация спектральной дуальности для конформных блоков. Конкретно, показано, что специальный базис, воспроизводящий разложение Некрасова для q-деформированного конформного блока, соответствует интегральному представлению Доценко–Фатеева для спектрально дуального конформного блока. Также получено объяснение данного соответствия с точки зрения теории топологических струн.

Апробация диссертации.

Основные результаты диссертации были доложены на научных семинарах в ИЯИ РАН и ИТЭФ, Международном семинаре «Gauge theories and integrability», Осака, Япония, 24–30 марта 2012 г., XVII Международном семинаре «Кварки-2012», Ярославль, 4–10 июня 2012 г., XXI Международной конференции «Integrable Systems and quantum symmetries», Прага, Чехия, 12—16 июня 2013 г., на Международной конференции «Strings, Knots and Related problems», Международный Институт Физики, Университет Рио Гранде до Норте, Наталь, Бразилия, 10–17 ноября 2013 г., XVIII Международном семинаре «Кварки-2014», Суздаль, 2–8 июня 2014 г.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из Введения, шести глав основного текста, Заключения и двух Приложений, содержит 170 страниц машинописного текста, в том числе 2 рисунка и список литературы из 191 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Во Введении кратко описывается решение Зайберга–Виттена $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных калибровочных теорий, а также его связь с классическими интегрируемыми системами. Затем вводится статсумма Некрасова и обсуждается ее связь с квантованием интегрируемых систем. Кратко описывается дуальность АГТ и показываются ее следствия для теории интегрируемых систем. Также обсуждается подход к АГТ соответствию для произвольных центральных зарядов, а именно проблема поиска выделенного базиса в Гильбертовом пространстве конформной теории поля. Поясняется роль спектральной дуальности в конформной теории поля и ее связь с теорией топологических струн.

В Главе 1 подробно изучается связь функции Некрасова калибровочных теорий и решения уравнения Бакстера для квантовой спиновой цепочки. В разделе 1.1 находится решение уравнения Бакстера в первых порядках квазиклассического разложения. В разделе 1.2 вводятся пертурбативная и инстантонная части функции Некрасова, а в разделе 1.3 проводится сравнение этой функции и монодромии решения уравнения Бакстера, полученного в разделе 1.1. В разделе 1.4 проводится сравнение полной пертурбативной части функции Некрасова и монодромии уравнения Бакстера в пределе большого параметра "твиста" (соответствующего отсутствию инстантонных поправок).

В Главе 2 изучается частный случай спектральной дуальности между $GL(2)$ цепочкой Гейзенберга и четырехточечной редуцированной моделью Годена. Основой для доказательства этой дуальности является дуальность АГТ между статсуммами Некрасова калибровочных теорий и конформными блоками двумерных конформных теорий поля. Показано, как одна из систем естественным образом возникает на стороне калибровочной теории как интегрируемая система Зайберга-Виттена, в то время как другая появляется на стороне конформной теории как уравнение на вырожденный вектор в модуле Верма. Показана связь между параметрами систем, а также уточнен рецепт квантования для редуцированной системы Годена.

В Главе 3 обсуждается обобщение спектральной дуальности на случай цепочек высших рангов и систем Годена с бóльшим числом отмеченных точек. В разделе 3.1 рассматриваются общие свойства спектрально дуальных систем и поясняется связь между спектральной дуальностью и p-q дуальностью. В разделе 3.2 вводится модель Годена на сфере с отмеченными точками и ее редукция. Выписывается спектральная кривая и показывается АНН дуальность между двумя нередуцированными системами Годена. В разделе 3.3 вводится XXX спиновая цепочка Гейзенберга, а также ее обобщение на случай спинов высших рангов. В разделе 3.4 доказывается спектральная дуальность между классической спиновой цепочкой и редуцированной системой Годена и явно выписывается отображение Пуассона для динамических переменных. В разделе 3.5 доказывается квантовая дуальность для тех же систем, записанных в разделенных переменных, то есть для уравнений Бакстера. В разделе 3.6 указывается на возможные обобщения полученной конструкции и ее связь с ранее известными дуальностями.

В Главе 4 показывается спектральная дуальность между двумя XXZ спиновыми цепочками со спинами высших рангов, связанными с пятимерными калибровочными теориями. В разделе 4.1 вводится квантовая XXZ спиновая цепочка. В разделе 4.2 приводится конкретное соответствие между производящими оператором квантовых интегралов движения для двух систем. В разделе 4.3 это соответствие доказывается в классическом пределе. В разделе 4.4 рассматривается предел, в котором одна из XXZ цепочек переходит в XXX цепочку, а другая — в тригонометрическую систему Годена. В разделе 4.6 доказывается эквивалентность тригонометрической и редуцированной моделей Годена на классическом уровне. В разделе 4.7 обсуждается роль полученных результатов для калибровочных теорий и теории узлов.

В Главе 5 обсуждается АГТ соответствие для калибровочной теории с группой $SU(3)$ для случая произвольных центральных зарядов. В разделе 5.1 вводится дифференциальный оператор, один из бесконечного семейства коммутирующих квантовых интегралов на Гильбертовом пространстве конформной теории, и находятся его собственные функции — обобщенные полиномы Джека. В разделе 5.2, используя петлевые уравнения для интералов Сельберга, находятся матричные элементы примарных полей в базисе обобщенных полиномов Джека и показывается, что они даются функциями Некрасова. В разделе 5.3 обсуждаются перспективы использованного подхода для строгого доказательства гипотезы АГТ.

В Главе 6 рассматривается АГТ соответствие для пятимерных калибровочных теорий и q-деформированных конформных блоков. В разделе 6.1, по аналогии с разделом 5.1 вводится базис обобщенных полиномов Макдональда. В разделе 6.2 доказываются петлевые уравнения для q-деформированных интегралов типа Сельберга и находятся явные выражения для матричных элементов в базисе обобщенных полиномов Макдональда. Показывается, что они даются пятимерным обобщением функций Некрасова. В разделе 6.4 рассматривается альтернативное разложение q-деформированного конформного блока — интегральное представление Доценко–Фатеева — и показывается, что оно воспроизводит структуру спектрально дуальной некрасовской функции. В разделе 6.5 наличие двух альтернативных разложений конформного блока объясняется исходя из теории топологических струн. В разделе 6.6 приведены замечания относительно дальнейшего возможного развития обсуждаемых в этой главе идей.

В приложение A вынесено явное выражение для функций Некрасова и соотношения между параметрами калибровочной теории и двумерной конформной теории. Также там приведены громоздкие петлевые уравнения для интегралов Сельберга типа $\mathfrak{sl}_3$.

В приложение B помещены явные выражения для гамильтонианов тригонометрической системы Руджենаарса, выражения для пятимерных функций Некрасова, связь между гамильтонианами Рудженаарса и петлевыми уравнениями, а также несколько полезных формул.

В Заключении перечислены основные результаты исследований, представленных в диссертации.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Для защиты выдвигаются следующие результаты:

1. Получено пертурбативное решение уравнения Бакстера для XXX спиновой цепочки Гейзенберга с N узлами. В первых нескольких порядках разложения по константе связи и квазиклассическо-

го разложения проверено, что периоды решения воспроизводят инстантонные поправки к препотенциалу $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной калибровочной теории с калибровочной группой $SU(N)$ и $2N$ гипермультиплетами в фундаментальном представлении. Для $N=2$ совпадение также проверено для пертурбативной части во всех порядках квазиклассического разложения.

2. Доказана точная эквивалентность (спектральная дуальность) $\mathfrak{gl}_K$ XXX спиновой цепочки Гейзенберга с N узлами и редуцированной модели Годена с алгеброй $\mathfrak{gl}_N$ и $K+2$ отмеченными точками на сфере как в классическом, так и в квантовом случае. Выяснена связь между параметрами дуальных систем.

3. Доказана спектральная дуальность между $\mathfrak{gl}_K$ XXZ спиновой цепочкой с N узлами и $\mathfrak{gl}_N$ XXZ спиновой цепочкой с K узлами в классическом пределе. Выведено новое выражение для квантовых гамильтонианов тригонометрической модели Годена. Доказаны тождества нормального упорядочения для производящих операторов квантовых гамильтонианов XXX цепочек и тригонометрических моделей Годена. Доказана точная эквивалентность между тригонометрической и редуцированной моделями Годена.

4. Получены выражения для обобщенных полиномов Джека для группы $SU(3)$. Выведены петлевые уравнения для $\mathfrak{sl}_3$ интегралов Сельберга. Вычислены средние от нескольких низших обобщенных полиномов Джека по $\mathfrak{sl}_3$ мере Сельберга. Проверено, что эти средние воспроизводят функции Некрасова для группы $SU(3)$.

5. Получены выражения для обобщенных полиномов Макдональда. Выведены петлевые уравнения для q-деформированного β-ансамбля. Вычислены средние от нескольких низших обобщенных полиномов Макдональда. Проверено, что средние воспроизводят пятимерные функции Некрасова для группы $SU(2)$. Доказана

спектральная дуальность для четырехточечных конформных блоков q-деформированной алгебры Вирасоро, а также для функций Некрасова для группы $SU(2)$. Выяснена связь между частями q-деформированного конформного блока и элементами частями статсуммы топологических струн на торическом многообразии Калаби-Яу.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Y. Zenkevich, Nekrasov prepotential with fundamental matter from the quantum spin chain // Phys. Lett. B **701** (2011) 630.

2. A. Mironov, A. Morozov, Y. Zenkevich, A. Zotov, Spectral Duality in Integrable Systems from AGT Conjecture // JETP Lett. **97** (2013) 45.

3. A. Mironov, A. Morozov, B. Runov, Y. Zenkevich, A. Zotov, Spectral Duality Between Heisenberg Chain and Gaudin Model // Letters in Mathematical Physics: Volume 10 **3** (2013) , 299.

4. A. Mironov, A. Morozov, B. Runov, Y. Zenkevich, A. Zotov, Spectral dualities in XXZ spin chains and five dimensional gauge theories // JHEP **1312** (2013) 034.

5. S. Mironov, A. Morozov, Y. Zenkevich, Generalized Jack polynomials and the AGT relations for the $SU(3)$ group // JETP Lett. **99** (2014) 109.

6. Y. Zenkevich, Generalized Macdonald polynomials, spectral duality for conformal blocks and AGT correspondence in five dimensions // JHEP **1505** (2015) 131

Ф-т 60х84/16   Уч.-изд.л. 1,1 Зак. № 22371 Тираж 100 экз. Бесплатно

Печать цифровая

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт ядерных исследований
Российской академии наук
Издательский отдел
117312, Москва, проспект 60-летия Октября, 7а