

На правах рукописи

Яблоков Станислав Николаевич

**МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД
ФОКА-ШВИНГЕРА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ
ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ПРОПАГАТОРНЫХ
УРАВНЕНИЙ В ПРИСУТСТВИИ
МАГНИТНОГО ПОЛЯ**

01.04.02 – Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2022

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова» (ЯрГУ).

Научный руководитель:

Кузнецов Александр Васильевич

д. ф.-м. н., профессор кафедры теоретической физики ЯрГУ, г. Ярославль.

Официальные оппоненты:

Дворников Максим Сергеевич, д. ф.-м. н., Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова Российской академии наук, г. Москва, г. Троицк, заведующий теоретическим отделом

Федотов Александр Михайлович, к.ф.-м.н., Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ», г. Москва, доцент кафедры теоретической ядерной физики Института Лазерных и Плазменных Технологий

Ведущая организация:

Объединённый институт ядерных исследований (ОИЯИ), г. Дубна.

Защита состоится «_____» _____ 2022 г. в _____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.119.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте ядерных исследований Российской академии наук (ИЯИ РАН), расположенном по адресу: проспект 60-летия Октября, д. 7а, 117312, Москва

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИЯИ РАН, а также на сайте института: <http://www.inr.ru/rus/referat/dis-zasch.html>

Автореферат разослан «_____» _____ 2022 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 002.119.01,

к.ф.-м.н., ст. науч. сотр. ИЯИ РАН

С.В. Демидов

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования.

В настоящее время, благодаря значительному росту наблюдательных данных, астрофизика элементарных частиц активно развивается. При рассмотрении разнообразных астрофизических конфигураций наличие внешних полей является скорее нормой, нежели исключением. В первую очередь это касается магнитных полей, которые проявляются как на разных пространственных масштабах (до ~ 100 килопарсек), так и в широком диапазоне интенсивностей (от $\sim 10^{-21}$ Гс до $\sim 10^{17}$ Гс) [1]. Для соответствующих квантово-полевых процессов в таком случае принято говорить о наличии внешней активной среды [2], непосредственно влияющей на их протекание.

Типичным её проявлением является снятие кинематического запрета на ряд реакций в сильном магнитном поле. К таковым относятся распад фотона на электрон-позитронную пару $\gamma \rightarrow e^-e^+$ [3], расщепление фотона на два фотона $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ [4], образование электрон-позитронной пары из нейтрино $\nu \rightarrow \nu e^-e^+$ [5], черенковское излучение нейтрино $\nu \rightarrow \nu\gamma$ [6], распад фотона на пару нейтрино-антинейтрино $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ [7], распад аксиона $a \rightarrow f\bar{f}$ [8], а также некоторые другие процессы.

Для данного рода задач существуют характерные масштабы напряжённости магнитного поля, которые естественным образом возникают в процессе вычислений. Например, для постоянного магнитного поля одним из таковых является критическое (швингеровское) значение напряжённости:

$$B_e = m_e^2/e \approx 4.4 \times 10^{13} \text{ Гс},$$

которое является квантующим для электрона. Магнитные поля с напряжённостью порядка B_e непосредственно связаны с магнитарами, то есть нейтронными звёздами, эволюция которых происходит при значительном влиянии магнитосферы [9].

Второй характерный масштаб определяется массой W -бозона:

$$B_W = m_W^2/e \approx 1.1 \times 10^{24} \text{ Гс}.$$

При таких огромных значениях поля встаёт вопрос о применимости Стандартной Модели, например, для описания электрослабого вакуума. В работе [10] при анализе пропагаторов заряженных частиц во внешнем постоянном однородном магнитном поле было обнаружено, что для массивного векторного бозона при значениях напряжённости поля $B > B_W$ имеет место так называемая нестабильность вакуума. Однако, в работе [11] при вычислении эффективной массы W -бозона было показано, что радиационные поправки препятствуют нестабильности вакуума.

Другими важными примерами проявления столь сильных полей (помимо астрофизических конфигураций) являются электромагнитные волны высокой интенсивности, генерируемые системой лазеров [12], а также эксперименты на современных коллайдерах, например, с нецентральными столкновениями тяжёлых ионов [13].

Наконец, заметим, что среди всевозможных конфигураций внешнего электромагнитного поля в последние годы сильно возрос интерес к случаю сверхсильного электрического поля, тесно связанному с так называемым швингеровским рождением электрон-позитронных пар (эффект Саутера-Швингера [14, 15]). Соответствующий масштаб напряжённости электрического поля определяется пороговой энергией рождения швингеровской пары:

$$E_s = 2m_e^2/e \approx 2.64 \times 10^{18} \text{ В/м}.$$

Помимо классического 3+1-мерного пространства Минковского, данный эффект был исследован также в пространстве де Ситтера [16] и анти-де Ситтера [17]. В дополнение к случаю постоянного однородного электрического поля в литературе обсуждается как конфигурация с переменным [18], так и с неоднородным [19] электрическим полем. Кроме того, рассматриваются всевозможные модуляции внешнего электрического поля, например, путём добавки более

слабого пульсирующего электрического поля [20], магнитного поля [21], поля плоской электромагнитной волны [22], а также за счёт внедрения термального фона [23] и фонового поля аксионов [24].

Для исследования всех упомянутых выше конфигураций внешнего электромагнитного поля (а также многих других) важным является знание пропагаторов участвующих в процессах частиц. Из соответствующей задачи для внешнего постоянного магнитного поля мы знаем, что имеется разнообразие всевозможных их представлений. Пропагатор, во-первых, может быть записан либо в импульсном либо в координатном представлении, а во-вторых, влияние поля может быть описано посредством того или иного разложения, то есть в ряд по уровням Ландау или же в виде интеграла по параметру собственного времени.

Традиционно в квантовой теории поля превалирует импульсная парадигма. Это связано с удобством представления амплитуд процессов в импульсном пространстве посредством соответствующих диаграмм Фейнмана [25]. Поэтому важной характеристикой того или иного метода построения пропагаторов является его способность давать выражения для пропагатора максимально приближенные к импульсному представлению. В противном случае, требуется выполнение ряда (не всегда тривиальных) преобразований, что в целом повышает трудоёмкость вычислительного процесса, а также делает его менее прозрачным.

Однако, стоит заметить, что для ряда задач координатное представление оказывается более предпочтительным, так как позволяет упростить вычисление соответствующих петлевых интегралов. В частности, это относится к интегралам, возникающим при рассмотрении диаграмм sunset-типа, которые могут быть эффективно вычислены для сколь угодно большого числа петель. Для этих диаграмм был разработан специальный метод, основанный на использовании координатного представления пропагаторов [26]. Он предполагает применение рекуррентных соотношений, возникающих при интегрировании по частям в рамках формализма размерной регуляризации [27]. Конечный результат в дан-

ном подходе выражается через немногочисленное семейство основных однопараметрических интегралов. Значения этих интегралов могут быть несложным образом найдены (аналитически либо численно), в то время как выражение диаграмм через эти интегралы требует лишь алгебраических манипуляций [28]. Запись конечного ответа через интегралы простого вида является важным не только с аналитической, но и с вычислительной точки зрения, так как это позволяет избежать ряда численных ошибок, накопление которых характерно при работе с интегралами высокой кратности.

Удобство работы с пропагаторами в координатном представлении проявляется также в том, что в нём (аналогично импульсному представлению) является возможной регуляризация расходимостей. Например, метод регуляризации путём ограничения пространственной области интегрирования с использованием экспоненциального множителя с масштабным параметром был рассмотрен в [29]. Это дало результатом компактные выражения для интегралов от произведений и степеней различных функций Бесселя, которые часто встречаются при исследовании петлевых диаграмм sunset-типа. В работе [30] была продемонстрирована схема размерной регуляризации в координатном представлении, которая заключалась в контроле порядка ν функций Бесселя. Сопутствующие выражения имели расходимость в начале координат, и представляли собой выражения, зависящие от ν -ой степени пространственно-временного интервала. Описанный в данной работе метод был успешно применён как для пропагатора безмассовой частицы, так и для массивного случая. Авторы отмечают, что основным преимуществом размерной регуляризации в координатном пространстве является аналитическая зависимость выражений от порядка функции Бесселя ν . Хотя такой подход, конечно же, не избавляет от ультрафиолетовых расходимостей (которые проявляются как полюса ν -аналитической функции), прочие возникающие с расходимостями проблемы оказываются устранимы в том или ином смысле.

Типичной из таковых является проблема произведения обобщённых функ-

ций [31], к классу которых собственно и относятся пропагаторы частиц в квантовой теории поля. Говоря строго математически, произведение обобщённых функций с совпадающими сингулярностями не является вполне определённым объектом. Поэтому рассмотрение выражений (возникающих при исследовании петлевых диаграмм) с произведениями и степенями пропагаторов требует особой аккуратности. В частности, требуется доопределение этих операций таким образом, чтобы они не выводили из рассматриваемого класса обобщённых функций. В рамках предложенного в работе [30] подхода это достигается путём выбора определённой области на комплексной ν -плоскости, внутри которой операции произведения и степени пропагаторов вводятся естественным образом. Результатом же этих операций в полной области аналитичности считается их аналитическое продолжение на всю эту область согласно методу из [32]. Полученное таким образом выражение может в дальнейшем быть рассмотрено без дополнительных проблем с сингулярностями, например, уже в импульсном пространстве.

Наконец, стоит отметить, что методы нахождения пропагаторов во внешних электромагнитных полях применимы и для задач в криволинейных координатах [33], в частности, в искривлённом пространстве-времени. Это объясняется единством математического описания соответствующих физических конфигураций через аппарат ковариантной производной.

Всё вышесказанное свидетельствует об исключительной важности изучения всевозможных представлений пропагаторов частиц в различных физических конфигурациях, а также о необходимости развития соответствующих методов их построения.

Цели и задачи диссертационной работы.

- Выполнить сравнительный анализ существующих методов нахождения пропагаторов заряженных частиц во внешних электромагнитных полях на предмет их вычислительной сложности, а также в контексте приме-

нения полученных представлений пропагаторов для конкретных физических задач.

- Исследовать действие экспоненциального оператора, возникающего в рамках классического метода Фока–Швингера, на дельта-функцию от разности пространственно-временных координат из правой части пропагаторного уравнения.
- Используя разработанную модификацию классического метода Фока–Швингера, получить выражения для пропагаторов заряженных частиц (скаляра, фермиона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке) во внешнем постоянном однородном магнитном поле в импульсном представлении в виде разложения в ряд по уровням Ландау.
- Получить выражения для координатного представления пропагаторов заряженных частиц (скаляра, фермиона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке) во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау. Рассмотреть разные методы нахождения координатного представления.
- Изучить свойства найденных представлений пропагаторов заряженных частиц во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау.

Научная новизна.

- Разработана в общем виде модификация классического метода Фока–Швингера для решения пропагаторного уравнения.
- Впервые применён разработанный модифицированный метод Фока–Швингера для нахождения импульсного представления пропагаторов заряженных частиц (скаляра, фермиона и массивного векторного бозона в про-

извольной ξ -калибровке) во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау.

- Впервые найдено в общем виде представление пропагаторов заряженных частиц со спином (фермиона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке) во внешнем произвольном постоянном однородном электромагнитном поле в виде интеграла по параметру собственного времени от серии коммутирующих экспоненциальных операторов, действующих на четырёхмерную дельта-функцию от разности пространственно-временных координат из правой части пропагаторного уравнения.
- Впервые найдено координатное представление пропагаторов заряженных частиц (скаляра, фермиона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке) во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау.
- Впервые обнаружен эффект влияния радиальной координаты из двумерной евклидовой плоскости (перпендикулярной направлению магнитного поля) на полную амплитуду пропагатора косвенно через номер уровня Ландау.
- Предложенный модифицированный метод Фока–Швингера прошёл независимую проверку сторонней группой авторов, в работе которой с его использованием был найден пропагатор фермиона во вращающейся среде.

Теоретическая и практическая значимость.

Результаты, изложенные в настоящей диссертации, обладают как теоретической, так и практической ценностью. Их значимость для теоретических исследований, во-первых, заключается в разработке нового метода построения пропагаторов, который сочетает в себе отдельные особенности как формализма канонического квантования, так и классического метода Фока–Швингера. Во-вторых, полученные в самом общем виде представления пропагаторов могут

использоваться для теоретического анализа выражений в тех случаях, где не требуется их явный вид.

Напротив, конкретные выражения пропагаторов, представленные в данной работе, полезны с практической точки зрения для вычисления амплитуд процессов во внешнем постоянном однородном магнитном поле. При этом использоваться может как зарекомендовавшее себя в квантово-полевых расчётах импульсное представление, так и перспективное для некоторых классов диаграмм координатное представление. Наконец, определённой практической ценностью обладают не только полученные в рамках данной диссертации конечные формулы в виде разложения в ряд по уровням Ландау, но и несколько удобных промежуточных выражений.

Методология и методы исследования.

При выполнении данной работы использовались общие методы как квантовой теории поля, так и теории дифференциальных уравнений в частных производных, а также более специализированные подходы, такие как (i) методы квантовой теории поля во внешних полях, (ii) методы теории обобщённых функций, (iii) элементы теории специальных функций математической физики. В частности, пропагаторы заряженных частиц вычислялись как с использованием формализма канонического квантования, так и путём решения пропагаторного уравнения, возникающего в рамках формализма континуального интеграла. В последнем случае использовался как классический метод собственного времени Фока–Швингера, так и разработанная в рамках данной работы его модификация. При этом всецело применялись различные представления дельта-функции в виде сумм и интегралов, а возникающие интегральные и дифференциальные выражения вычислялись с использованием свойств специальных функций математической физики.

Положения, выносимые на защиту.

- Разработана в общем виде модификация классического метода Фока–Швингера для решения пропагаторных уравнений.
- Впервые применён разработанный модифицированный метод Фока–Швингера для нахождения импульсного представления пропагаторов заряженных частиц (скаляра, фермиона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке) во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения по уровням Ландау.
- Впервые найдено в общем виде представление пропагаторов заряженных частиц со спином (фермиона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке) во внешнем произвольном постоянном однородном *электромагнитном* поле в виде интеграла по параметру собственного времени от серии коммутирующих экспоненциальных операторов, действующих на четырёхмерную дельта-функцию от разности пространственно-временных координат из правой части пропагаторного уравнения.
- Впервые найдено координатное представление пропагаторов заряженных частиц (скаляра, фермиона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке) во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау.
- Исследованы некоторые свойства представления пропагаторов заряженных частиц в постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау, в частности впервые обнаружен эффект влияния радиальной координаты из двумерной евклидовой плоскости (перпендикулярной направлению магнитного поля) на полную амплитуду пропагатора косвенно через номер уровня Ландау.

Степень достоверности и апробация результатов.

Основные результаты работы докладывались лично автором на следующих российских и международных конференциях, школах и семинарах:

- 4th International Conference on Particle Physics and Astrophysics (г.Москва, НИЯУ МИФИ, 22-26 октября 2018 г.)
- Всероссийская с международным участием молодежная научно-практическая конференция "Физика, техника и технология сложных систем". Ярославль, 22-30 апреля 2019 г.
- Moscow International School of Physics 2020. 3-9 March 2020. HSE Study Center "Voronovo"
- Всероссийская с международным участием молодежная научно-практическая конференция "Физика, техника и технология сложных систем". Ярославль, 20-30 апреля 2020 г.
- 5th International Conference on Particle Physics and Astrophysics (г.Москва, НИЯУ МИФИ, 5-9 октября 2020 г.)
- Virtual Workshop on the Schwinger Effect and Strong Field Physics. January 18-29, 2021. Yukawa Institute for Theoretical Physics, Kyoto University
- Всероссийская с международным участием молодежная научно-практическая конференция "Физика, техника и технология сложных систем". Ярославль, 22-30 апреля 2021 г.

Публикации.

Материалы диссертации представлены в 6 работах. Из них 4 были опубликованы в международных рецензируемых (и включенных в индексы цитирования Scopus и Web of Science) журналах из списка, рекомендованного ВАК для публикации результатов кандидатских и докторских диссертаций:

- S. N. Iablokov and A. V. Kuznetsov, Charged massive vector boson propagator in a constant magnetic field in arbitrary ξ -gauge obtained using the modified Fock-Schwinger method // Phys. Rev. D **102** (2020) no.9. P. 096015.
- S. N. Iablokov and A. V. Kuznetsov, Position-space representation of charged particles' propagators in a constant magnetic field as an expansion over Landau levels // Eur. Phys. J. C **82**, 193 (2022).
- S. N. Iablokov and A. V. Kuznetsov, Exponential operator method for finding exact solutions of the propagator equation in the presence of a magnetic field // J. Phys. Conf. Ser. **1390** (2019) no.1. P. 012078.
- S. N. Iablokov and A. V. Kuznetsov, Coordinate-space representation of a charged scalar particle propagator in a constant magnetic field expanded as a sum over the Landau levels // J. Phys. Conf. Ser. **1690** (2020) no.1. P. 012087.

Также имеются 2 публикации в сборниках тезисов конференций:

- Яблоков С. Н. Построение пропагаторов модифицированным методом собственного времени Фока-Швингера // Физика, техника и технология сложных систем : тез. докл. конф. / под ред.: С. П. Зими́на, А. С. Гвоздарёва; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль, ЯрГУ, 2019. С. 70-71.
- Яблоков С. Н. Построение пропагатора заряженного векторного бозона во внешнем постоянном магнитном поле модифицированным методом Фока-Швингера // Физика, техника и технология сложных систем : тез. докл. конф. / под ред.: С. П. Зими́на, А. С. Гвоздарёва; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль, ЯрГУ, 2020. С. 75-76.

Личный вклад автора.

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором. А именно, соискателем был

разработан в общем виде модифицированный метод Фока–Швингера, получены разнообразные представления пропагаторов заряженных частиц (скаляра, фермиона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке) во внешнем постоянном однородном магнитном поле, а также изучены некоторые свойства этих представлений. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад соискателя был определяющим. Результаты проведённых научных исследований вошли в специальный курс, читаемый на кафедре теоретической физики физического факультета ЯрГУ им. П.Г.Демидова (г.Ярославль).

Структура и объем диссертации.

Данная диссертация посвящена развитию методов построения пропагаторов заряженных частиц во внешних электромагнитных полях, в частности, разработанному соискателем модифицированному методу Фока–Швингера. Она состоит из введения, трёх глав, заключения и библиографии. Общий объём диссертации составляет 110 страниц, из них 96 страниц текста, включая 1 рисунок. Библиография включает 150 наименований на 14 страницах.

Содержание работы

Во **введении** даётся краткая историческая справка, а также обсуждаются значимые научные результаты, как те, что отражают степень разработанности темы исследования, так и те, в контексте которых прослеживается актуальность данной работы. За введением следует содержательная часть диссертации, состоящая из трёх глав.

В **первой главе** даётся достаточно подробное описание классического метода Фока–Швингера (ФС) для решения пропагаторных уравнений, а также, в качестве примера, приводится его применение для нахождения швингеровского представления пропагатора скалярной заряженной частицы во внешнем постоянном однородном магнитном поле. С одной стороны, соответствующий

раздел данной главы выступает в качестве справочного материала, а с другой – закладывает основу и обоснование для развития модифицированного метода Фока–Швингера (МФС).

Метод МФС для решения пропагаторного уравнения

$$H(\partial_X, X) G(X, X') = \delta^{(4)}(X - X') \quad (1)$$

формулируется в общих терминах, стартуя со следующего представления, полученного на ранних этапах вычислений в рамках метода ФШ:

$$G(X, X') = -i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{-i\tau[H(\partial_X, X) + i\varepsilon]} \delta^{(4)}(X - X'). \quad (2)$$

В базовом сценарии решение задачи сводится к специальному выбору представления дельта-функции в виде ряда/интеграла:

$$\delta^{(4)}(X - X') = \sum \int \psi_\lambda(X) \psi_\lambda(X'), \quad (3)$$

где $\psi_\lambda(X)$ – собственный вектор оператора H (параметризованный через набор квантовых чисел λ), которому соответствует собственное значение $H(\lambda)$:

$$H(\partial_X, X) \psi_\lambda(X) = H(\lambda) \psi_\lambda(X). \quad (4)$$

Таким образом пропагатор приобретает следующий промежуточный вид:

$$G(X, X') = -i \int_{-\infty}^0 d\tau \sum \int e^{-i\tau[H(\lambda) + i\varepsilon]} \psi_\lambda(X) \psi_\lambda(X'). \quad (5)$$

Заметим, что теперь показателем экспоненты является уже не оператор, а числовая функция. Это позволяет нам снять интеграл по параметру τ :

$$G(X, X') = \sum \int \frac{\psi_\lambda(X) \psi_\lambda(X')}{H(\lambda) + i\varepsilon}. \quad (6)$$

В ряде случаев не весь оператор H удовлетворяет условию (4), а лишь некоторая его часть:

$$H = H_0 + H_1, \quad (7)$$

$$H_0(\partial_X, X) \psi_\lambda(X) = H_0(\lambda) \psi_\lambda(X). \quad (8)$$

Если так оказывается, что эти операторы коммутируют друг с другом ($[H_0, H_1] = 0$), то экспоненциальный оператор разделяется на две экспоненты согласно формуле Бейкера–Кэмпбелла–Хаусдорфа. При этом пропагатор принимает вид:

$$G(X, X') = -i \int_{-\infty}^0 d\tau \sum \int e^{-i\tau H_1} e^{-i\tau [H_0(\lambda) + i\epsilon]} \psi_\lambda(X) \psi_\lambda(X'). \quad (9)$$

Дальнейшие упрощения в значительной степени зависят от формы операторов H_0 и H_1 . Однако, в ряде случаев удаётся выполнить преобразования таким образом, чтобы свести всю зависимость пропагатора от τ к виду, представленному в выражении (5), что позволяет в итоге тривиально выполнить интегрирование.

Оказывается, что такой общей вычислительной схеме удовлетворяет некоторый класс задач, например, задача о поиске пропагаторов заряженных частиц во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау. В данной главе в качестве примера она решается для частного случая скалярной заряженной частицы. Получившееся в итоге выражение совпало с известной ранее формулой из литературы, что служит косвенной проверкой предложенного метода. В заключении главы сравниваются (как с точки зрения общих свойств, так и в контексте рассмотренных примеров) три подхода для нахождения пропагаторов (формализм канонического квантования, а также методы ФШ и МФШ), обсуждаются плюсы и минусы каждого из них.

Вторая глава посвящена построению пропагаторов заряженных частиц со спином (а именно, фермиона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке) с использованием метода МФШ в импульсном представлении в виде разложения в ряд по уровням Ландау. В частности, для массивного векторного бозона во внешнем произвольном постоянном однородном *электромагнитном* поле оказываются верными следующие коммутационные соотношения:

$$[\Pi^\mu, \Pi^\nu] = -ieQ F^{\mu\nu}, \quad (10)$$

$$[\Pi^\mu, \Pi^\rho] = -2ieQ F^\mu{}_\nu \Pi^\nu, \quad (11)$$

$$[\Pi^\mu \Pi_\nu, \Pi^\rho] = -2ieQ (F^\mu{}_\rho \Pi^\rho \Pi_\nu - \Pi^\mu \Pi_\rho F^\rho{}_\nu). \quad (12)$$

С их помощью можно легко убедиться, что только один из трёх попарных коммутаторов между операторами H_0 , H_F , и H_ξ равен нулю ($[H_0, H_F] = 0$). Хотя два других коммутатора по-отдельности не зануляются, их сумма тем не менее тоже оказывается равной нулю ($[H_0 + H_F, H_\xi] = 0$).

Всё это позволяет провести пошаговое разделение экспоненты $e^{-i\tau(H_0+H_F+H_\xi)}$, возникающей в рамках метода МФШ, согласно формуле Бейкера–Кэмпбелла–Хаусдорфа:

$$\begin{aligned} e^{-i\tau(H_0+H_F+H_\xi)} &= e^{-i\tau H_\xi} e^{-i\tau(H_0+H_F)} \\ &= e^{-i\tau H_\xi} e^{-i\tau H_F} e^{-i\tau H_0}. \end{aligned} \quad (13)$$

В итоге для данной физической конфигурации это приводит нас к общему виду представления пропагатора:

$$G(X, X') = i \int_0^\infty d\tau e^{-i\tau H_\xi} e^{-i\tau H_F} e^{-i\tau H_0} \delta^{(4)}(X - X'). \quad (14)$$

Аналогичная процедура (со схожим результатом) проделывается и для случая фермиона.

Далее, рассматривается частный случай постоянного однородного магнитного поля, для которого находятся импульсные представления пропагаторов заряженных частиц со спином в виде разложения в ряд по уровням Ландау. Например, для пропагатора электрона получается следующее выражение:

$$\begin{aligned} G(X, X') &= 2e^{i\Phi(X, X')} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i(pZ)}}{p_{\parallel}^2 - M_n^2 + i\varepsilon} \\ &\times \left[(p\gamma) - i\frac{\beta Q}{2} (\gamma\varphi\partial_p)_{\perp} + m \right] \left[e^{-p_{\perp}^2/\beta} \left(L_n \Pi_n^{(Q)} - L_{n-1} \Pi_{n-1}^{(Q)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Аналогично находится (более громоздкое) выражение для пропагатора массивного векторного бозона.

Наконец, приводится краткое описание результата, полученного сторонней группой авторов, где ими был успешно применён метод МФШ для совершенно другой физической конфигурации, а именно, для решения задачи о нахождении

пропагатора фермиона во вращающейся среде. В заключении главы обсуждаются основные аспекты вычислений пропагаторов для частиц со спином.

В **третьей главе** рассматривается процесс построения координатного представления пропагаторов заряженных частиц во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау. При этом для скалярной частицы обсуждаются три подхода (в рамках формализма канонического квантования, а также с использованием методов ФШ и МФШ), дающие идентичный результат, а именно:

$$G(X, X') = \frac{-i\beta}{4\pi^2} e^{i\Phi} \sum_{n=0}^{\infty} L_n e^{-\beta Z_{\perp}^2/4} \left[K_0 - \frac{i\pi}{2} H_0^{(2)} \right], \quad (16)$$

$$L_n = L_n \left(\frac{\beta Z_{\perp}^2}{2} \right), \quad (17)$$

$$K_0 = K_0 \left(M_n \sqrt{-Z_{\parallel}^2 + i\epsilon} \right) \theta(-Z_{\parallel}^2), \quad (18)$$

$$H_0^{(2)} = H_0^{(2)} \left(M_n \sqrt{Z_{\parallel}^2 - i\epsilon} \right) \theta(Z_{\parallel}^2), \quad (19)$$

$$M_n^2 = m^2 + (2n + 1)\beta. \quad (20)$$

Будучи предпочтительным подходом для частиц со спином, метод МФШ далее применяется для нахождения соответствующих пропагаторов. В случае электрона получается следующий результат:

$$G(X, X') = \frac{-i\beta}{4\pi^2} e^{i\Phi} \left[\left(i\partial_{\mu} + \frac{eQ}{2} F_{\mu\nu} Z^{\nu} \right) \gamma^{\mu} + m \right] \quad (21)$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta Z_{\perp}^2/4} \left[L_{n-1} \Pi_{n-1}^{(Q)} + L_n \Pi_n^{(Q)} \right] \left(K_0 - \frac{i\pi}{2} H_0^{(2)} \right),$$

$$\Pi_{n-1}^{(Q)} = \frac{1-Q}{2} \Pi_{+} + \frac{1+Q}{2} \Pi_{-},$$

$$\Pi_n^{(Q)} = \frac{1+Q}{2} \Pi_{+} + \frac{1-Q}{2} \Pi_{-}, \quad (22)$$

$$\Pi_{+} = \text{diag}(1, 0, 1, 0), \quad (23)$$

$$\Pi_{-} = \text{diag}(0, 1, 0, 1), \quad (24)$$

$$M_n^2 = m^2 + 2\beta n. \quad (25)$$

Аналогично находится (более громоздкое) выражение для пропагатора массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке.

Наконец, проводится анализ взаимосвязи множителей в членах разложения в ряд по уровням Ландау, в рамках которого оценивается влияние радиальной координаты (в евклидовой двумерной плоскости, перпендикулярной направлению поля) на масштаб амплитуды пропагатора косвенно через номер уровня Ландау.

В **заключении** подытоживаются полученные результаты, а также даётся краткая сравнительная характеристика известных методов нахождения пропагаторов. В частности, обсуждаются достоинства и недостатки метода МФШ, возможности его применения для решения иных задач, а также потенциальные направления его развития.

Список литературы

1. Magnetic fields in the large-scale structure of the universe / D. Ryu, D. Schleicher, R. Treumann et al. // Space Science Reviews. 2012. Vol. 166, no. 1–4. P. 1–35.
2. Kuznetsov A., Mikheev N. Electroweak Processes in External Active Media. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2013. 282 p.
3. Клепиков Н.П. Излучение фотонов и электрон-позитронных пар в магнитном поле // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1954. Т. 26, № 1. С. 19–34.
4. Photon splitting in a strong magnetic field / S. Adler, J. Bahcall, C. Callan et al. // Physical Review Lett. 1970. Vol. 25. P. 1061–1065.
5. Чобан Э.А., Иванов А.Н. Рождение лептонных пар высокоэнергетическими нейтрино в поле сильной электромагнитной волны // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1969. № 56. С. 194.
6. Гальцов Д.В., Никитина Н.С. Фотонейтринные процессы в сильном поле // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1972. Т. 62, № 6. С. 2008–2012.
7. Скобелев В.В. О реакциях $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ и $\nu \rightarrow \gamma\nu$ в сильном магнитном поле // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1976. Т. 71, № 4. С. 1263–1267.
8. Mikheev N., Vassilevskaya L. Axion decay $a \rightarrow f\bar{f}$ in a strong magnetic field // Physics Letters B. 1997. Vol. 410, no. 2-4. P. 203–206.
9. Duncan R., Thompson C. Formation of very strongly magnetized neutron stars - implications for gamma-ray bursts // Astrophysical Journal Letters. 1992. Vol. 392. P. L9. URL: <https://doi.org/10.1086/186413>.
10. Nielsen N. K., Olesen P. An Unstable Yang-Mills Field Mode // Nuclear Physics B. 1978. Vol. 144. P. 376–396.
11. Skalozub V. Effective Mass of W Boson in a Magnetic Field // Phys. At. Nucl.

2014. 01. Vol. 77. P. 949–955.
12. Горизонты петаваттных лазерных комплексов / А. В. Коржиманов, А. А. Гоносков, Е. А. Хазанов [и др.] // Усп. физ. наук. 2011. Т. 181, № 1. С. 9–32. URL: <https://ufn.ru/ru/articles/2011/1/c/>.
 13. Skokov V., Illarionov A., Toneev V. Estimate of the magnetic field strength in heavy-ion collisions // International Journal of Modern Physics A. 2009. Vol. 24, no. 31. P. 5925–5932. URL: <https://doi.org/10.1142/S0217751X09047570>.
 14. Sauter F. Uber das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs // Zeitschrift fur Physik. 1931. no. 82. P. 742–764.
 15. Schwinger J. On Gauge Invariance and Vacuum Polarization // Physical Review. 1951. Jun. Vol. 82. P. 664–679. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.82.664>.
 16. Hayashinaka T., Fujita T., Yokoyama J. Fermionic Schwinger effect and induced current in de Sitter space // JCAP. 2016. Vol. 07. P. 010.
 17. Samantray P., Singh S. Schwinger pair production in hot anti-de Sitter space // Physical Review D. 2019. Vol. 99, no. 8. P. 085006.
 18. Brezin E., Itzykson C. Pair production in vacuum by an alternating field // Physical Review D. 1970. Vol. 2. P. 1191–1199.
 19. Mohamedsedik M., Li L.-J., Xie B. Schwinger pair production in inhomogeneous electric fields with symmetrical frequency chirp // Physical Review D. 2021. Vol. 104, no. 1. P. 016009.
 20. Torgrimsson G., Oertel J., Schützhold R. Doubly assisted Sauter-Schwinger effect // Physical Review D. 2016. Vol. 94, no. 6. P. 065035.
 21. Copinger P., Fukushima K. Spatially Assisted Schwinger Mechanism and Magnetic Catalysis // Physical Review Letters. 2016. Vol. 117, no. 8. P. 081603. [Erratum: Phys.Rev.Lett. 118, 099903 (2017)].
 22. Torgrimsson G., Schneider C., Schützhold R. Sauter-Schwinger pair creation dynamically assisted by a plane wave // Physical Review D. 2018. Vol. 97,

- но. 9. P. 096004.
23. Torgrimsson G. Thermally versus dynamically assisted Schwinger pair production // *Physical Review D*. 2019. Vol. 99, no. 9. P. 096007.
 24. Domcke V., Ema Y., Mukaida K. Axion assisted Schwinger effect // *JHEP*. 2021. Vol. 05. P. 001.
 25. Пескин М., Шредер Д. Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: РХД, 2001. 784 с.
 26. Groote S., Korner J., Pivovarov A. Configuration space based recurrence relations for sunset - type diagrams // *European Physical Journal C*. 1999. Vol. 11. P. 279–292.
 27. Chetyrkin K., Tkachov F. Integration by parts: the algorithm to calculate β -functions in 4 loops // *Nuclear Physics B*. 1981. Vol. 192, no. 1. P. 159–204.
 28. Broadhurst D. Three-loop on-shell charge renormalization without integration: Λ_{QED} to four loops // *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*. 1992. Vol. 54, no. 4. P. 599–606.
 29. Groote S., Korner J. Coordinate space calculation of two- and three-loop sunrise-type diagrams, elliptic functions and truncated Bessel integral identities // *Nucl. Phys. B*. 2019. Vol. 938. P. 416–425.
 30. Bollini C., Giambiagi J. Dimensional regularization in configuration space // *Physical Review D*. 1996. Vol. 53. P. 5761–5764.
 31. Plastino A., Rocca M. Quantum Field Theory, Feynman-, Wheeler Propagators, Dimensional Regularization in Configuration Space and Convolution of Lorentz Invariant Tempered Distributions // *J. Phys. Comm.* 2018. Vol. 2, no. 11. P. 115029.
 32. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959.
 33. Fermion propagator in a rotating environment / A. Ayala, L. Hernández, K. Raya et al. // *Physical Review D*. 2021. Vol. 103, no. 7. P. 076021.