

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования «Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова»

На правах рукописи

Валенсия Вильегас Хуан Маурисио

**Свойства возмущений в скалярно-векторно-тензорных и
Хорндески-Картановских космологиях**

1.3.3 - Теоретическая физика

Диссертация

на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: кандидат физико-
математических наук,
Миронов С.А.

Москва - 2026

Оглавление

Введение	4
1 Теория Хорндески в пространстве–времени с кручением	24
1.1 Квадратичные лагранжианы Хорндески - Картана	26
1.1.1 Кручение в формализме второго порядка	28
1.1.2 Линеаризация: Разложение возмущений кокручения на неприводимые компоненты	30
1.1.2.1 Малые калибровочные преобразования	32
1.1.3 Уравнения для фоновых полей	33
1.1.4 Линеаризованная динамика в квадратичных теориях Хорн- дески - Картана	34
1.1.5 Модификация степеней свободы Хорндески на пространстве - времени с кручением	35
1.1.6 Устойчивость и классификация скалярной моды в квадра- тичных теориях Хорндески-Картана	40
1.1.6.1 Устойчивость скалярной моды для теории с $c = 0$	41
1.1.6.2 Условие отсутствия духов для скалярной моды в теориях с ненулевым c	41
1.1.6.3 Пример: скалярная мода в теориях Хорндески- Картана \mathcal{S}_{4c} с ненулевым c	42
1.1.7 Частичные выводы по квадратичным теориям Хорндески – Картана	46
1.2 Запрещающие теоремы в теориях Хорндески - Картана до второго порядка	50
1.2.1 Запрещающая теорема	54

1.2.2	Пример: везде устойчивый космологический отскок в теории Хорндески с кручением	56
1.2.2.1	Построение модели	57
1.2.3	Асимптотический лагранжиан: восстановление ОТО	63
1.2.4	Итоги по запрещающей теореме	64
1.3	Космологические модели, свободные от патологий, в теории Хорндески–Картана	66
1.3.1	Модель: теория Хорндески–Картана до кубического порядка	68
1.3.2	Свойства возмущений в кубической теории Хорндески – Картана	70
1.3.2.1	Модифицированный гравитон	70
1.3.2.2	Обход запрещающих теорем	71
1.3.3	Контрпример к “запрещающим теоремам”: всегда устойчивая, несингулярная космологическая модель с досветовым распространением возмущений.	78
1.4	Выводы по главе	89
2	Взаимодействие скаляра и фотона в теории Хорндески и ее расширениях	91
2.1	Измерения скорости гравитационных волн и ограничения на скалярно-тензорные теории	91
2.1.1	Вырожденные скалярно-тензорные теории высшего порядка (DHOST)	93
2.1.1.1	Классы вырожденности	95
2.1.2	Подклассы теории удовлетворяющие ограничениям на скорости	96
2.2	Связи скаляра с фотоном в компактификациях Калуцы-Клейна	97
2.2.1	DHOST со связями темной энергии с фотоном	98
2.2.1.1	Условия распространения гравитационных волн со скоростью света в DHOST	99
2.2.1.2	DHOST, удовлетворяющие условиям вырожденности и скорости гравитационных волн	101
2.2.1.3	Теория ВН и подавление распада гравитационных волн	103

2.3 Выводы по главе	106
Заключение	107
Приложение	110
А Дополнительные детали для теории Хорндески–Картана до второ- го порядка, рассмотренной в разделе 1-1.1	110
В Дополнительные детали для раздела 1-1.2	125
С Дополнительные детали для полной теории Хорндески–Картана, рассмотренной в разделе 1-1.3	126
Список литературы	135

Введение

Актуальность темы исследования

Современная стандартная модель космологии Большого Взрыва (Λ CDM) даёт удовлетворительное описание множества наблюдений: например, реликтового излучения, распространённости химических элементов, крупномасштабной структуры Вселенной и её позднего ускоренного расширения. Теория, на которой основана Λ CDM, Общая теория относительности (ОТО), также успешно проверена в масштабах Солнечной системы. Более того, предсказанные ею гравитационные волны недавно были зарегистрированы; их скорость c_g практически совпадает со скоростью света c ,

$$\left| \frac{c_g}{c} - 1 \right| \leq 5 \times 10^{-16}, \quad (1)$$

что согласуется с ОТО [1–4].

Несмотря на феноменологический успех, в ОТО остаются открытые вопросы. Особую важность для данной работы представляет существование сингулярностей в большинстве решений уравнений движения. Их существование в широком классе случаев было доказано Пенроузом и Хокингом [5; 6]. В частности, упомянутая выше Λ CDM-космология и почти все её решения без “экзотической материи” должны начинаться с сингулярности. Здесь мы определяем “экзотическую материю” как материю, нарушающую изотропное условие энергодоминантности (NEC, от английского выражения Null Energy Condition): $T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$, что будет уточнено ниже.

“Экзотическая материя”, рассматриваемая в этой работе, мотивирована прежде всего стремлением избежать упомянутых сингулярностей. Она описывается двумя фундаментальными полями: метрикой и дополнительным вещественным скалярным полем, которое в общем случае не минимально связано с кривизной.

Кроме того, она включает ОТО как частный случай, поэтому такие модели обычно называют “Модификациями Гравитации”. В первой части этой работы мы рассматриваем теорию Хорндески — наиболее общую модификацию ОТО с одним скалярным полем, содержащую в действии производные скалярного поля не выше второго порядка, но приводящую к уравнениям движения второго порядка [7–11]. Она была впервые построена Г. Хорндески в 1974 году и объединяет в один класс широкий спектр теорий. Для её введения сначала рассмотрим теорию гравитации Эйнштейна с минимально связанным скаляром ϕ ,

$$\mathcal{S} = \int d^4x \left(\frac{1}{2\kappa} R + G_2(\phi, X) \right), \quad (2)$$

где $\kappa = 8\pi G c^{-4}$, мы используем сигнатуру метрики $(-, +, +, +)$, а R — скаляр Риччи в искривлённом пространстве-времени без кручения и с метрически согласованной связностью. $G_2(\phi, X)$ — общий скалярный потенциал, зависящий от скаляра ϕ и его первых производных $X = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$. Таким образом, G_2 включает модели инфляции со стандартным кинетическим членом, если $G_2(\phi, X) = X + V(\phi)$, где V — некоторый потенциал. Однако $G_2(\phi, X)$ также включает все возможные самовзаимодействия скалярного поля, даже с нестандартными кинетическими членами. В целом, это наиболее общий лагранжиан с первыми производными скаляра, минимально связанный с гравитацией. Он известен как “к-эссенция” [12; 13] и находит применение в моделях инфляции, тёмной материи и тёмной энергии. Однако “к-эссенция” также страдает от проблем с сингулярностями, упомянутых ранее. Действительно, для космологических решений эта модель удовлетворяет NEC [14]. Таким образом, необходимо дальнейшее обобщение, которое естественно приводит к лагранжиану, содержащему вторые производные скаляра $\nabla^2\phi$, но сохраняющему уравнения движения второго порядка — теория Хорндески:

$$\mathcal{S} = \int d^4x (\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5), \quad (3)$$

$$\mathcal{L}_2 = G_2, \quad (4)$$

$$\mathcal{L}_3 = -G_3 \nabla_\mu \nabla^\mu \phi, \quad (5)$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4 R + G_{4,X} \left((\nabla_\mu \nabla^\mu \phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi) \nabla^\nu \nabla^\mu \phi \right), \quad (6)$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5 G^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \frac{1}{6} G_{5,X} \left((\nabla_\mu \nabla^\mu \phi)^3 \right) \quad (7)$$

$$+ (\nabla_\nu \nabla_\rho \phi) \left(2(\nabla^\mu \nabla^\nu \phi) \nabla^\rho \nabla_\mu \phi - 3(\nabla_\mu \nabla^\mu \phi) \nabla^\rho \nabla^\nu \phi \right).$$

Как и ранее, функции $G_i(\phi, X)$ с $i = 2, 3, 4, 5$ — с обозначением $G_{i,X} = \partial G_i / \partial X$ — являются общими скалярными потенциалами скаляра и его первых производных. Отметим, что ОТО включена как частный случай действия (3) при $G_3 = 0$, $G_4 = \frac{1}{2\kappa}$ и $G_5 = 0$. Аналогично, теория Бранса–Дикке получается из (3) при $G_4 = G_4(\phi)$, зависящей только от ϕ , но не от X [15]. Таким образом, теория Хорндески может рассматриваться как обобщение теории Бранса–Дикке, учитывающее не минимальные связи скаляра с кривизной, а также включающее его вторые производные. Также отметим, что \mathcal{L}_3 естественно возникает как низкоэнергетическая эффективная теория модели Dvali–Gabadadze–Porrati (DGP) [16], что интересно для космологических приложений из-за самодействующих ускоряющихся решений. Фактически, недавний интерес к таким решениям для позднего ускоренного расширения Вселенной привёл к теории, известной как Галилеоны [8], и повторному открытию теории Хорндески в 2011 году в другой форме, называемой Обобщённые Галилеоны [9]. Действительно, было показано, что эти две теории эквивалентны [10], и могут быть записаны в общем виде действием (3).

В целом, благодаря важному свойству — возможности нарушения NEC и избежания сингулярностей, — решения в теории Хорндески предлагались для моделей тёмной энергии, отскакивающих космологий и компактных объектов, таких как чёрные дыры и кротовые норы [17–35]. Подчеркнём, что отскакивающие космологии — которые мы также строим в этой работе — могут естественно переходить в стандартную инфляционную эпоху. Кроме того, было показано, что подкласс теории Хорндески, известный как “Фаб-Четыре” [36; 37], может быть использован для решения так называемой “проблемы космологической постоянной” [38].

Для дальнейшей мотивации изучения экзотической материи — такой как скалярное поле Хорндески — подчеркнём глубокую общность теорем о сингулярностях и устойчивость NEC. Действительно, несложно показать, что NEC является ключевым фактором для избежания или возникновения патологий в решениях. Например, это легко увидеть, рассматривая эволюцию пучка нулевых геодезических — также называемого конгруэнцией геодезических — в

минимально связанной теории, такой как ОТО или даже k -эссенция (2). В частности, можно исследовать, как семейство соседних геодезических кривых — обозначаемых $x^\mu(s, \lambda)$, где λ — параметр вдоль геодезической, а s маркирует разные геодезические в пучке — отклоняются друг от друга. Мы хотим вычислить динамику “вектора отклонения” между геодезическими, $\xi^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$, которая, грубо говоря, получается двукратным дифференцированием вдоль пучка геодезических. Точнее, рассматривая направленный в будущее касательный вектор к нулевым геодезическим $k^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$, с $k^\mu \xi_\mu = 0$, мы непосредственно из соотношения $\frac{d}{ds} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{ds}$ получаем, что вектор отклонения не является параллельно переносимым: $k^\mu \nabla_\mu \xi^\nu = B_\mu{}^\nu \xi^\mu$. Действительно, $B_\mu{}^\nu = \nabla_\mu k^\nu$ кодирует “вращение и масштабирование” вектора отклонения между нулевыми геодезическими в пучке. Как обычно, можно спроецировать все компоненты ξ^μ , $B_\mu{}^\nu$ (и их производные) вдоль k^μ ¹. Таким образом, рассматриваем его эволюцию

$$\frac{d}{d\lambda} B_\mu{}^\nu = k^\rho \nabla_\rho B_\mu{}^\nu,$$

и после несложных вычислений — выделяя только часть, поперечную нулевым геодезическим — непосредственно получаем из следа последнего уравнения известное уравнение Райчаудхури

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma^2 + \omega^2 - R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu, \quad (8)$$

где, как обычно, мы разложили интересующий нас тензор второго ранга $B_{\mu\nu}$ на след, или так называемый скаляр расширения $\theta = \nabla_\mu k^\mu$, симметричную бесследовую часть $\sigma_{\mu\nu}$ (сдвиг), и антисимметричную часть $\omega_{\mu\nu} \propto \nabla_{[\mu} k_{\nu]}$ (вращение или вихрь).

В частности, θ параметризует скорость изменения поперечного сечения пучка геодезических. Во многих интересных случаях ω может обращаться в ноль — например, в космологии Фридмана — Леметра — Робертсона — Уокера (или FLRW от англ. Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker) — и $\sigma^2 \geq 0$ (поскольку $\sigma_{\mu\nu}$ чисто пространственный). Таким образом, эволюция объёма пучка геодезических

¹Действительно, поскольку k^μ светоподобен, условие ортогональности $k^\mu \xi_\mu = 0$ не обязательно убирает компоненту ξ^μ вдоль k_μ . Стандартно вводится проектор, выделяющий компоненты, поперечные нулевой геодезической [39].

в космологии FLRW, левая часть

$$\frac{d\theta}{d\lambda} + \frac{1}{2}\theta^2 = -(\sigma^2 + R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu), \quad (9)$$

критически зависит от знака $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu$. Теперь, используя уравнения Эйнштейна $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}$ из действия (2), мы можем переписать уравнение Райчаудхури (9) через содержание материи с $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = \kappa T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu$, (где мы использовали, что k^μ светоподобен),

$$\frac{d\theta}{d\lambda} + \frac{1}{2}\theta^2 = -(\sigma^2 + \kappa T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu).$$

Таким образом, мы, наконец, видим важность изотропного условия энергодоминантности (NEC) в эволюции пучка световых лучей, поскольку если NEC выполняется

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0 \quad (10)$$

то по уравнению Райчаудхури (9) пучок геодезических удовлетворяет

$$\frac{d\theta}{d\lambda} + \frac{1}{2}\theta^2 \leq 0. \quad (11)$$

Это так называемая теорема фокусировки, которая легко выявляет патологии в решениях ОТО при условии NEC. Действительно, интегрируя (11), $\theta^{-1}(\lambda) \geq \theta_0^{-1} + \lambda/2$, и рассматривая случай, когда пучок геодезических изначально сходится $\theta_0 < 0$ (геодезические фокусируются к меньшим поперечным сечениям), то при *конечных* значениях параметра $\lambda \leq -2/\theta_0$ скорость, с которой геодезические сходятся, ещё сильнее уменьшается; а именно, $\theta(\lambda) \rightarrow -\infty$. Другими словами, скорость, с которой геодезические сходятся к меньшим поперечным сечениям, стремится к бесконечности в течение конечного “времени”. Таким образом, нулевые геодезические в пучке в конечном итоге встретятся в бесконечно малом поперечном сечении. В этот момент образуются патологические каустики [39].

Более того, в той же линии рассуждений, но с более строгими предположениями о глобальных условиях пространства-времени, таких как гиперболичность, поверхность Коши или существование так называемых поверхностей ловушки, получаются теоремы о сингулярностях² Пенроуза и Хокинга [5; 6; 14; 39].

²Стоит отметить, что в других решениях, таких как чёрные дыры, для теорем о сингулярностях важны другие энергетические условия, отличные от NEC.

В целом, это простое обсуждение пучка световых лучей показывает, что *содержание материи и, в частности, NEC, играет ключевую роль в появлении или отсутствии патологий*. Действительно, если NEC нарушается в какой-то момент эволюции, то в принципе возможно получить FLRW-космологию без начальной сингулярности. Долгое время нарушение NEC считалось невозможным, поскольку обычно приводило к неустойчивостям [14; 40]. Более того, NEC обычно выполняется для большинства типов материи: например, рассмотрим метрику для расширяющейся Вселенной FLRW

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j ,$$

заполненную однородной и изотропной материей. Взяв идеальную жидкость с 4-скоростью $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, плотностью энергии ρ и давлением p ,

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} ,$$

из закона сохранения энергии-импульса $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ следует, что

$$\frac{d\rho}{dt} = -3H(\rho + p) .$$

В расширяющейся Вселенной FLRW $H = \frac{\dot{a}}{a} > 0$ приводит к ожиданию, что $\rho + p > 0$, поскольку плотность энергии обычно уменьшается с расширением $\frac{d\rho}{dt} < 0$. Действительно, это выполняется для материи без давления ($p = 0, \rho > 0$) или излучения ($p = \frac{1}{3}\rho, \rho > 0$). Исключением является своеобразная тёмная энергия ($p = -\rho$).

Действительно, мы видим, что это согласуется с NEC. А именно, для любого будущего направленного нулевого вектора k^μ в этой космологической модели NEC принимает вид

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = (p + \rho)(u \cdot k)^2 \geq 0 ,$$

что подразумевает $p + \rho > 0$, так как $u \cdot k \neq 0$. Таким образом, большинство типов материи, таких как пыль, излучение и космологическая постоянная, удовлетворяют NEC, что, с другой стороны, оправдывает термин “экзотическая материя” в случае нарушения NEC.

Интересные эффекты, которые можно ожидать при нарушении NEC, также видны в этом простом обсуждении: уравнения Фридмана для плоской FLRW

космологии, заполненной идеальной жидкостью, подразумевают, что $\dot{H} = -\kappa(\rho + p)$. Если NEC выполняется и $\rho + p > 0$, то $\dot{H} < 0$ выполняется во все времена. Таким образом, если Вселенная сжимается в некоторый момент времени $H < 0$, она будет вечно сжиматься, что означает, что космологический отскок — где сжатие $H < 0$ переходит в расширение $H > 0$ — невозможен для нашей Вселенной, если предположить, что NEC выполняется. С другой стороны, если NEC не выполняется во все времена и $\rho + p$ может стать отрицательным в какой-то момент, что делает возможным космологический отскок (см., например, Рисунок 1.3).

Действительно, как уже упоминалось, было доказано, что возможно построить *локально* устойчивые *отскакивающие* космологии. Однако также было доказано, что несингулярные решения в теории Хорндески на пространстве-времени без кручения обычно имеют проблемы с *глобальной* устойчивостью [17–30; 41; 42]. Другими словами, даже если решения являются *локально* устойчивыми и физически приемлемыми вблизи отскока — или наиболее физически значимой фазы, нестабильность обязательно возникнет в какой-то момент раньше или позже в эволюции Вселенной. Обязательное существование нестабильности в некоторый момент — это то, что мы называем проблемами *глобальной* устойчивости, которые были установлены как запрещающие теоремы в теории Хорндески [21; 22].

Было высказано предположение, что эти проблемы глобальной устойчивости могут быть устранены другими типами материи, которые могут стать значимыми на других фазах. Однако существуют обобщения запрещающих теорем, которые выполняются для ещё более общих модификаций ОТО, таких как мульти-галилеоны [26], что делает это маловероятным. Более того, некоторые анализы предполагали, что нарушение NEC потенциально приводит к проблемам, таким как существование возмущений, распространяющихся со скоростью, превышающей скорость света, даже если сингулярности успешно избегаются [40]. Таким образом, глобальная устойчивость действительно кажется насущной проблемой, которую необходимо конкретно решить. Среди возможных вариантов решения проблемы глобальной устойчивости в теории Хорндески можно рассмотреть, что либо модель не содержит скалярных возмущений на несингулярном

фоне FLRW — что может быть неудовлетворительно, поскольку мы ожидаем малые отклонения от FLRW на космологических масштабах — либо скалярные возмущения распространяются на пространства-времени Минковского [43]. Второй вариант — рассмотреть нестандартные асимптотики [22; 44]. Наконец, третий вариант, обсуждаемый в литературе, — существенно пересмотреть теорию Хорндески. А именно, переформулировать её на плоском пространстве-времени только с кручением и дополнительными членами. А именно, написать новый тип теории Хорндески с телепараллельной связностью. Для этой теории обычные запрещающие теоремы нарушаются [45; 46].

В этой работе мы показываем новое возможное решение проблем глобальной устойчивости теории Хорндески при сохранении обычной структуры на искривлённом пространстве-времени и допущении стандартных асимптотик. Новое решение в этой работе получено с обычной структурой теории Хорндески (3), но с рассмотрением пространства-времени и с кривизной, и с кручением. В частности, это первое исследование теории Хорндески с кручением в формализме *второго* порядка, в котором связность записывается вне массовой поверхности как сумма символов Кристоффеля (выраженных через метрику) и тензора кручения, так что уравнения движения для метрики остаются *второго* порядка. Это аналогично введению кручения в ОТО в так называемую теорию Эйнштейна–Картана. Таким образом, мы называем модели с кривизной и кручением в этой работе теориями Хорндески–Картана.

Сначала мы докажем обобщение запрещающих теорем в подклассе теории (3), содержащем лагранжианы \mathcal{L}_2 , \mathcal{L}_3 , \mathcal{L}_4 , но не \mathcal{L}_5 , т.е., вплоть до квадратичной теории Хорндески–Картана. Первый интересный аспект заключается в том, что при наличии кручения новая запрещающая теорема зависит от дополнительного предположения по сравнению с оригинальными запрещающими теоремами без кручения. А именно, предполагая стандартные асимптотики и рассматривая основную ветвь решений, можно доказать, что теория (3) без кручения не может допускать несингулярные космологические решения, свободные от градиентных неустойчивостей или мод-духов во все времена [21; 22]. Мы доказываем аналогичную запрещающую теорему в квадратичной теории Хорндески–Картана, принимая предыдущие предположения, а также то, что гравитационные волны всегда распространяются со скоростью, меньшей скорости света, в ходе косми-

ческой эволюции. Хотя последнее предположение физически оправдано, оно также показывает, что запрещающая теорема с кривизной и кручением слабее оригинальной версии только с кривизной, поскольку первая требует больше предположений. Действительно, в следующей части этой работы мы рассматриваем наиболее общую форму теории - полную теорию Хорндески–Картана, включая \mathcal{L}_5 в действии, и обнаруживаем, что запрещающая теорема нарушается. Мы детально анализируем квадратичное действие для возмущений первого порядка на фоне FLRW и подробно объясняем различия, которые позволяют получить решения без очевидных патологий. Вкратце, это исследование показывает, что запрещающие теоремы в теории Хорндески критически зависят от простоты соотношений между скалярными и тензорными модами, что является случайным следствием предположения об искривлённом пространстве-времени без кручения. Действительно, при включении кручения квадратичное действие становится значительно сложнее. Таким образом, гораздо больше возмущений кручения связываются со скалярными и метрическими возмущениями, и как следствие, обычные соотношения между скалярными и тензорными модами нарушаются, и аналогично запрещающая теорема не выполняется. Мы явно строим конкретную модель полной теории Хорндески–Картана, которая представляет собой глобально устойчивое несингулярное космологическое решение, где все моды распространяются со скоростями, не превышающими скорость света.

В целом, это показывает, что предположение о нулевом кручении в теории Хорндески лишь способствует математической простоте, но за счёт “искусственного” возникновения проблем глобальной устойчивости. Однако мы также подчеркнём, что наши результаты получены в первом порядке теории возмущений, и могут обнаружиться сильные связи в высших порядках. Таким образом, необходимы дальнейшие исследования на менее симметричных фонах — таких как космологии Бьянки — или исследования высших порядков.

Во второй части этой работы, в пространстве-времени без кручения только с кривизной, мы также предлагаем новый подход к двум другим проблемам, которые затрагивают широкий класс модифицированных теорий гравитации, таких как теория Хорндески (3). Действительно, после измерения скорости гравитационных волн от события GW170817 [1; 2] и его электромагнитного

аналога, гамма-всплеска GRB170817A [3; 4], было высказано мнение, что ограничение в выражении (1) исключает почти все скалярно-тензорные теории с не минимальными производными связями скаляра с кривизной — такие как теория Хорндески (3) с ненулевыми $G_{4,X}$ или G_5 [2; 47–52]. Действительно, большинство этих модификаций гравитации подразумевают скорость гравитационных волн (GW, от английского выражения Gravitational Waves), отличную от скорости света (мы принимаем $c = 1$ в этой работе).

С другой стороны, в отдельном теоретическом исследовании было показано, что описанные выше теории также приводят к распаду GW в скалярную моду тёмной энергии [53]. Таким образом, в [53] утверждалось, что *все* скалярно-тензорные теории с не минимальными производными связями скаляра с кривизной исключены, потому что если бы GW значительно распались в тёмную энергию (DE, от английского выражения Dark Energy), мы бы не наблюдали GW в принципе.

Следствием анализов в [2; 47–53] является то, что наиболее общая теория Хорндески для приложений в поздней космологии, где ограничение на скорости (1) критично, должна принимать форму действия (3) с $G_{4,X} = 0$ или $G_5 = 0$. Другими словами, [2; 47–53] подразумевают, что наиболее общая скалярно-тензорная теория, где мы могли бы в принципе отождествить скалярную моду со скаляром тёмной энергии, это теория типа Бранса–Дикке с k -эссенцией и членом Хорндески \mathcal{L}_3 .

Более того, эти два аргумента также исключили более широкий класс модифицированных теорий гравитации, называемых Расширенные теории Хорндески (ВН, от английского выражения Beyond Horndeski) или теория Глезе–Ланлуа–Пьяцца–Верницци и их обобщение - Вырожденные высшего порядка скалярно-тензорные теории (DHOST, от английского выражения Degenerate-Higher-Order-Scalar-Tensor) [54–57]. Эти две теории фактически содержат теорию Хорндески (3) как частный случай. Они подразумевают уравнения движения выше второго порядка для метрики и скалярного поля. Однако они разработаны так, что связи устраняют степень свободы духа.

Во второй части этой работы мы рассматриваем случай скалярно-векторно-тензорных теорий, таких как те, что анализировались в [58–65], чтобы предложить потенциальное решение этих двух проблем. А именно, мы наблюдали в [66;

67], что существуют скалярно-векторные связи очень специфической формы, которые можно добавить к теории Хорндески так, что скорость векторной моды на космологическом фоне FLRW совпадает со скоростью GW. Мы показали, что это может выполняться по построению в большинстве теорий Хорндески, даже если $G_{4,X} \neq 0$ и $G_5 \neq 0$. Более того, такое действие для вектора $U(1)$ -калибровочно инвариантно. Эти два аспекта мотивировали в [66] интерпретацию векторной моды как эффективного фотона на космологических масштабах. Теперь, в этой работе, мы показываем более широкий класс связей в более общей теории DHOST [68]. Более того, мы показываем, что существует теория ВН со скалярно-фотонными связями, где распад GW в скаляр также может подавляться на любом космологическом фоне. Ключевой аспект заключается в том, что в этих теориях GW распространяются с той же скоростью, что и фотон, удовлетворяя $c_g(t)/c(t) = 1$ в ходе космической эволюции, по построению. Таким образом, появляется больше свободы в функциях лагранжиана для удовлетворения соотношений, вычисленных в [53], которые подавляют распад.

В целом, модель ВН со скалярно-векторными связями, представленная в конце этой работы, может быть альтернативой в отношении последних двух проблем. Более того, как хорошо известно, теории ВН не страдают от проблем глобальной устойчивости, обсуждавшихся в первой части этой работы [24; 27–30]. Однако важно отметить, что помимо двух уже рассмотренных эффектов, эти скалярно-фотонные связи требуют обширного анализа их наблюдательных следствий — например, в присутствии сильных магнитных полей — и большинство из них ещё нуждаются в ограничениях [69–71].

Цели и задачи диссертации

Цель данной диссертации — изучить свойства возмущений в двух новых скалярно-векторно-тензорных модификациях гравитации. В частности, первое — исследовать теорию Хорндески на пространстве-времени с кривизной и кручением и определить условия устойчивости несингулярных космологических решений. Актуальность этого исследования заключается в том, что теория Хорндески обычно страдает от неустойчивостей на пространстве-времени без кручения — фактически, это было сформулировано как запрещающая теорема [21; 22] — и, как мы узнаём из этого исследования, возможен обход запрещающей теоремы в

некоторых типах теорий Хорндески с кручением.

Во второй части диссертации основная цель — рассмотреть теории DHOST на пространстве-времени без кручения — обобщение теории Хорндески — и определить скалярно-фотонные связи, таким образом чтобы скорость гравитационных волн совпадала со скоростью света по построению — то есть без ограничения скалярных потенциалов. Это уже было показано в частном случае теории Хорндески в нашей работе [66], и анализ был частично расширен на “Расширенные теории Хорндески” (ВН) в [71]. Актуальность этого исследования состоит в обобщении этих результатов на значительно более широкий класс теорий DHOST. Более того, как мы узнаём из этого исследования, новая свобода в скалярных потенциалах — после включения скалярно-векторных связей, предложенных в данной диссертации — может быть использована для удовлетворения других ограничений.

Эти проблемы формулируются в рамках разложения первого порядка возмущений вокруг фонового решения FLRW с плоским пространством. Основные поля в данной работе, а именно метрика, векторное поле, скалярное поле и кокручение, разлагаются на неприводимые компоненты относительно группы вращений. Кручение вводится в формализме второго порядка. То есть, связность записывается вне массовой поверхности как сумма символов Кристоффеля и тензора кокручения — который является линейной комбинацией тензора кручения — так что уравнение движения для метрики остаётся второго порядка. Это аналогично случаю в теории Эйнштейна–Картана, поэтому мы называем модели в данной работе теорией Хорндески–Картана, поскольку это первое исследование данного сценария (однако, теория Хорндески с кручением рассматривалась ранее в других формализмах [45; 46; 72; 73]).

Поставленные цели достигаются в ходе следующих этапов:

Первая задача в данной работе — определить форму теории Хорндески–Картана. Поскольку теория Хорндески зависит от вторых производных скалярного поля, а вторые ковариантные производные с кручением не коммутируют на скалярном поле, необходимо определить все возможные неэквивалентные теории Хорндески–Картана, возникающие из различных способов свёртки индексов. На этом первом этапе мы начинаем с более простой теории Хорндески–Картана,

содержащей до второй степени вторых производных скалярного поля. Мы определяем важное однопараметрическое семейство теорий Хорндески–Картана и классифицируем степени свободы в зависимости от значения параметра.

Вторая задача — рассмотреть статус запрещающей теоремы для несингулярных космологических решений в теории Хорндески [21; 22], но в присутствии кручения. Мы устанавливаем необходимые предположения, при которых запрещающая теорема остаётся справедливой. Поскольку мы обнаруживаем, что в присутствии кручения требуется дополнительное предположение о скорости гравитационных волн, мы ставим задачу построить устойчивый космологический отскок, нарушающий это предположение. Это актуально, поскольку такое решение, в котором космологический отскок устойчив во все времена, в общем случае невозможно в теории Хорндески без кручения (Некоторые специальные альтернативы возможны [43], или с нестандартной асимптотикой [22; 44]). Однако подчеркнём, что необходимо предположить короткий период, в течение которого гравитон распространяется со скоростью, превышающей скорость света, что остаётся патологией решения.

Следующая задача — обобщить предыдущие результаты на полную теорию Хорндески–Картана, содержащую до третьей степени вторых производных скалярного поля. Цель — определить, остаётся ли запрещающая теорема справедливой в этом более общем случае. Поскольку мы обнаруживаем, что в этой значительно более общей теории запрещающая теорема не может выполняться, мы ставим финальную задачу для этой части диссертации: построить космологический отскок, устойчивый во все времена, и такой, что все моды распространяются со скоростями, не превышающими скорость света, ни в какой момент времени. Актуальность заключается в том, что этого в общем случае нельзя достичь в теории Хорндески без кручения.

Что касается второй части диссертации, для получения скалярно-векторных связей в DHOST, таких что векторная мода распространяется с той же скоростью, что и гравитационные волны, первая задача — вычислить компактификацию Калуцы–Клейна для теории DHOST, сформулированной в пяти измерениях. Для целей данной диссертации достаточно принять цилиндрическое условие и оставить только безмассовые моды. Вторая задача — определить теории DHOST со скалярно-векторными связями, которые могут удовлетворить огра-

ничению, предложенному в [53], для подавления распада гравитационных волн. Актуальность заключается в том, что последнее ограничение не может быть одновременно удовлетворено с условием на скорость гравитационных волн в большинстве теорий DHOST без скалярно-векторных связей.

Научная новизна диссертации

Все основные результаты, выносимые на защиту, являются новыми. Классификация теорий Хорндески–Картана вплоть до квадратичной степени проведена впервые в данной работе. Также доказана новая запрещающая теорема, которая выполняется при новом предположении. Важно отметить, что метод, использованный в доказательстве, аналогичен предыдущим запрещающим теоремам без кручения [21; 22]. Кроме того, новым результатом является тот факт, что полная теория Хорндески–Картана —содержащая до кубической степени вторых производных скалярного поля— опровергает аргументы запрещающей теоремы.

Более того, наши предыдущие работы по скалярно-векторным связям в теории Хорндески [66; 67] и связанные исследования в [71] расширены до новых результатов в DHOST, которые впервые представлены в научной литературе. Кроме того, новым результатом является тот факт, что теория ВН со скалярно-фотонными связями, представленная в данной диссертации —которая является расширением моделей, рассмотренных в [71]— может удовлетворять дополнительным ограничениям на распад гравитационных волн.

Теоретическая и практическая значимость диссертации

Результаты первой части данной диссертации имеют теоретическое значение. Они по существу показывают, что запрещающую теорему можно обойти, если существует смешивание метрики и скалярного поля с кручением. Устойчивый космологический отскок в теории Хорндески–Картана может служить отправной точкой для построения таких моделей с обычной асимптотикой. Более того, они мотивируют другие исследования на менее симметричных фонах, таких как космологии Бьянки, или также возмущения высшего порядка на FLRW, чтобы определить, не является ли теория сильно связанной.

Результаты второй части по теории DHOST имеют в основном теоретическое

значение, однако они также могут быть полезны для более феноменологических исследований. В частности, теория ВН со скалярно-фотонными связями, представленная в данной диссертации, может быть использована для исследования других “ортогональных” ограничений на эти модифицированные теории гравитации. Действительно, поскольку ограничения на скорость и условие нераспада уже могут быть удовлетворены, новые вычисления на других фонах и в присутствии сильных магнитных полей могут выявить новые ограничения на эти скалярно-фотонные связи и пролить свет на их полезность.

Методология диссертационного исследования

В данной работе в основном используются аналитические методы и стандартная теория возмущений. Также в одном частном случае применялись численные методы. На протяжении всей работы использовалось программное обеспечение Mathematica и расширения xTensor, xCoba и xPand.

Положения, выносимые на защиту

1. Условия устойчивости и дисперсионные соотношения в теории Хорндески-Картана второго порядка и в одном специальном подклассе третьего порядка.
2. В квадратичной теории Хорндески-Картана существует запрещающая теорема для несингулярных и устойчивых космологических решений без сверхсветовых скоростей звука. В данном подклассе существует устойчивое решение в виде космологического отскока, но со сверхсветовым (в течение короткого времени) гравитоном.
3. Запрещающая теорема нарушается в кубическом подклассе теории Хорндески-Картана: существует устойчивое отскоковое решение без возмущений, распространяющихся со сверхсветовыми скоростями, на протяжении всей эволюции.
4. Существует новая скалярно-векторно-тензорная теория, содержащая скалярно-тензорный сектор вырожденных теорий высшего порядка, в которой тензорные и векторные моды распространяются с одинаковой скоростью на космологическом фоне. Подкласс таких теорий, в котором векторный сектор

связан со скалярным сектором “Расширенных теорий Хорндески”, позволяет обойти проблему распада гравитонов на скаляры тёмной энергии.

Достоверность и обоснованность результатов

Результаты данной диссертации были опубликованы в международных рецензируемых научных журналах, а также представлены в виде докладов на международных и российских конференциях. Более того, в определённых предельных случаях — например, при устранении кручения — полученные результаты согласуются с работами других авторов.

Апробация результатов

Основные результаты данной диссертации были представлены на следующих конференциях, семинарах и симпозиумах:

1. Семинар в Институте теоретической и математической физики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия. 03.12.2025
2. Двадцать вторая конференция имени Ломоносова по физике элементарных частиц, Московский государственный университет имени Ломоносова, Москва, Россия. 21 - 27.07.2025
3. Международный симпозиум по космологии и физике частиц и астрофизике: CosPA 2025, Center for Theoretical Physics of the Universe (CTPU), Cosmology, Gravity and Astroparticle Physics Group (CGA), Тэджон, Южная Корея. 7 - 11.07.2025
4. 18-я Российская гравитационная конференция: Международная конференция по гравитации, астрофизике и космологии, Казанский федеральный университет, Казань, Россия. 25 - 29.11.2024
5. 27-я Международная конференция по физике частиц и космологии, Cosmo'24 Kyoto University, Киото, Япония. 21 - 25.10.2024
6. QUARKS 2024 XXII Международный семинар по физике высоких энергий, Переславль-Залесский, Россия. 19 - 24.05.2024

7. Международная конференция по физике частиц и космологии, посвященная памяти Валерия Рубакова, Alikhanyan National Laboratory, Ереван, Армения.
02 - 07.10.2023
8. Семинар в Институте теоретической и математической физики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
27.09.2023

Результаты также были представлены 27 октября 2025 г. на семинаре отдела теоретической физики Института ядерных исследований Российской академии наук.

Публикации

Основные результаты данной диссертации были опубликованы в четырёх статьях в рецензируемых научных журналах, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus:

1. S. Mironov and **M. Valencia-Villegas**, “Quartic Horndeski-Cartan theories in a FLRW universe,” *Phys.Rev.D* 108 (2023), 024057.
2. S. Mironov and **M. Valencia-Villegas**, “Stability of nonsingular cosmologies in Galileon models with torsion: A No-Go theorem for eternal subluminality,” *Phys.Rev.D* 109 (2024), 044073.
3. S. Mironov and **M. Valencia-Villegas**, “Healthy Horndeski cosmologies with torsion,” *JCAP* 07 (2024) 030.
4. S. Mironov, A. Shtennikova and **M. Valencia-Villegas**, “Luminal scalar-tensor theories for a not so dark dark energy,” *Phys.Rev.D* 111, (2025) L101501

а также в материалах конференций:

5. **M. Valencia-Villegas**, “Quartic Horndeski-Cartan theories: a review on the stability of nonsingular cosmologies,”
PoS ICPPCRubakov2023 (2024) 033.

Личный вклад автора

Все результаты, представленные к защите, были получены лично автором или при его непосредственном участии.

Структура, объем и краткое содержание работы

Диссертация состоит из введения, двух глав (первая — из четырёх разделов, вторая — из трёх), заключения в конце каждой главы, трёх приложений и списка литературы. Общий объем работы составляет 148 страницы. Диссертация содержит 1 таблицу и 16 рисунков. Список литературы включает 126 наименований.

Глава 1 данной диссертации посвящена теории Хорндески–Картана.

В разделе 1.1 мы рассматриваем *квадратичную* теорию Хорндески–Картана, которая представляет собой простейший пример нетривиальной теории Хорндески с кручением. Более конкретно, здесь мы рассматриваем только часть \mathcal{L}_4 действия Хорндески (3). В разделе 1.1.1 мы вводим обозначения для кручения. Там же мы определяем однопараметрическое семейство теорий и записываем действие с явным кручением. Затем в разделе 1.1.2 мы вводим обозначения для возмущений относительно плоского фонового решения FLRW. Мы также показываем их калибровочные преобразования в 1.1.2.1. Уравнения движения для фоновых полей в данной конкретной теории представлены в 1.1.3. Перед проведением линеаризации мы объясняем в разделе 1.1.4, почему в принципе можно ожидать большее количество степеней свободы в теории Хорндески–Картана. Затем мы показываем действия для возмущений первого порядка в 1.1.5. Демонстрируется, что фактически присутствуют только обычные 2 поляризации гравитона и одна скалярная мода, как обычно в теориях Хорндески. Там же мы показываем классификацию скалярной моды в зависимости от параметра c теории. В разделе 1.1.6 мы кратко анализируем условия устойчивости и отсутствия духов для случая $c = 0$ (1.1.6.1) и более подробно для случая $c \neq 0$ (1.1.6.2). Пример анализируется для последнего случая в 1.1.6.3. Мы завершаем этот раздел предварительными выводами в 1.1.7.

В разделе 1.2 мы детально анализируем квадратичную теорию Хорндески–Картана с параметром $c = 0$. Более конкретно, здесь мы рассматриваем части

\mathcal{L}_2 , \mathcal{L}_3 , \mathcal{L}_4 действия Хорндески (3). А именно, для упрощения на этом втором этапе мы игнорируем более сложную часть \mathcal{L}_5 действия. В разделе 1.2.1 мы формулируем и доказываем запрещающую теорему для устойчивости несингулярных космологических решений. Затем мы строим устойчивый космологический отскок в этой модели в разделе 1.2.2, который, однако, в соответствии с новой теоремой, демонстрирует короткий период, в течение которого гравитон движется со скоростью, превышающей скорость света. Мы приводим детали построения модели в 1.2.2.1 и проверяем, что эта модель сводится к теории гравитации Эйнштейна в асимптотическом прошлом и будущем в разделе 1.2.3. Мы завершаем этот раздел резюме теоремы и выводами в 1.2.4.

В разделе 1.3 мы наконец рассматриваем наиболее общую теорию Хорндески–Картана с включением \mathcal{L}_5 в действие. Конкретный выбор параметров внутри семейства теорий объясняется в начале раздела 1.3.1. Затем мы переходим в (1.3.2) к анализу дисперсионных соотношений для гравитона (1.3.2.1) и скалярной моды (1.3.2.2). Мы особо подчеркиваем причину, по которой запрещающая теорема не может выполняться в этой наиболее общей теории Хорндески–Картана. А именно, мы подробно объясняем различия между различными действиями для возмущений рассматриваемых теорий в данной диссертации и действием возмущений обычной теории Хорндески без кручения. Мы завершаем аргументацию в 1.3.3, показывая явную модель устойчивого космологического отскока, в котором все моды распространяются со скоростями, меньшими скорости света. Тем самым подтверждая, что запрещающая теорема нарушается в этой общей теории. Мы завершаем эту главу и первую часть диссертации выводами в 1.4.

Глава 2 данной диссертации посвящена скалярно-векторным связям для “вырожденных скалярно-тензорных теорий высшего порядка” (DHOST) и “Расширенных теорий Хорндески” (ВН) как частным случаям.

В разделе 2.1 мы суммируем текущее состояние скалярно-тензорных теорий в свете недавних измерений скорости гравитационных волн и даем мотивацию для исследования в этой части диссертации. Мы вводим DHOST теории в 2.1.1. Мы кратко рассматриваем классы вырожденности в DHOST, которые содержат теории Хорндески и ВН как частные случаи 2.1.1.1, и обсуждаем модели, которые были исключены тестами на скорость в случае без скалярно-фотонных связей 2.1.2. В разделе 2.2 мы объясняем наш подход к получению желаемых скалярно-

векторных связей, а именно, через компактификацию Калуцы–Клейна. Затем мы показываем новые скалярно-векторные связи для DHOST в разделе 2.2.1. Мы вычисляем скорости тензорных и векторных мод на космологическом фоне 2.2.1.1 и выделяем теории, в которых обе эти скорости одинаковы во все времена по построению. Там же мы обсуждаем мотивацию рассматривать этот $U(1)$ калибровочно инвариантный вектор как фотон, в свете недавнего ограничения на почти равенство скорости гравитации и света (1). Наконец, мы идентифицируем теории DHOST с гравитоном, для которых условие скорости совместимо или не совместимо с условием вырожденности в 2.2.1.2. Наконец, мы берем теорию ВН последнего типа, со скалярно-фотонными связями, и показываем, как новая свобода в скалярных потенциалах может быть использована для удовлетворения ограничения на распад гравитационных волн в 2.2.1.3. Мы завершаем выводами по части 2 в разделе 2.3.

В Приложении А мы приводим уравнения движения для квадратичной теории Хорндески-Картана, а также коэффициенты в квадратичных действиях для тензорного и скалярного секторов, для различных значений параметра c .

В Приложении В мы показываем коэффициент в квадратичном действии для скаляра, включая \mathcal{L}_2 , \mathcal{L}_3 , \mathcal{L}_4 с параметром $c = 0$.

В Приложении С мы приводим детали вычислений для наиболее общей теории Хорндески–Картана. В частности, уравнения для фоновых полей (включая \mathcal{L}_5). Коэффициенты в квадратичном действии для тензорных и скалярных мод и детали для дисперсионного соотношения гравитона.

Глава 1

Теория Хорндески в пространстве–времени с кручением

Многие теоретические разработки в модифицированной гравитации были выполнены в рамках теории Хорндески на искривленном пространстве-времени без кручения и с метрически совместимой связностью [7; 8; 11; 74–78] (см., например, [10; 18; 21; 22; 43; 79–86]). Несмотря на прогресс, недавние измерения скорости гравитационных волн — которые наложили ограничения на многие из этих теорий — ясно показывают необходимость исчерпать их широкий диапазон феноменологий [78]. Например, теория Хорндески в других формализмах, таких как метрически-аффинная гравитация и формализм Палатини, с кручением и неметричностью, изучена слабо, но она может предложить интересные новые подходы для решения современных расхождений с наблюдениями. Однако лишь недавно было отмечено, что могут возникать новые степени свободы помимо обычных скалярных и тензорных мод Хорндески [72; 73; 78; 87–97], и что в телепараллельной формулировке теории Хорндески проблема скорости гравитационных волн полностью отсутствует [46].

В этой работе мы начинаем анализ теорий Хорндески с кручением в *метрическом формализме второго порядка* и исследуем, изменяются ли степени свободы по сравнению с теориями Хорндески на пространстве-времени без кручения. В

этом формализме мы рассматриваем связность, которая *априори* метрически совместима и выражена через (метрически зависимую) связность Леви-Чивита и тензор кручения. Важная особенность этого формализма заключается в том, что в отличие от теории Эйнштейна-Картана, кручение может быть динамическим, поскольку оно взаимодействует со вторыми производными скаляра в лагранжиане, и при этом уравнения движения остаются второго порядка. Поскольку данная работа рассматривает кручение только в этом формализме, в дальнейшем мы будем называть эти модели теорией Хорндески-Картана. Отметим, что в других формализмах, таких как “формализм первого порядка”, уравнения движения могут быть высшего порядка, и поэтому могут появляться духи Остроградского [72; 73].

В этой первой части мы сначала анализируем теорию Хорндески с лагранжианом, содержащим до квадрата вторых производных скаляра $(\nabla\nabla\phi)^2$. Исторически для этих теорий был принят термин “квартичные” (от англ. “quartic”), поскольку в первоначальной формулировке теории с фиксированной функцией $G_{4X} = X$ и в плоском пространстве-времени, в членах $X (\nabla\nabla\phi)^2$ присутствовало четыре степени поля π . Мы использовали эту номенклатуру в наших работах [98–100]. Однако в данной работе мы принимаем другую возможную нотацию, также широко распространенную в литературе, а именно: теории Хорндески-Картана “до второго порядка” или “квадратические”, что отсылает к степени $p = 2$ в членах $(\tilde{\nabla}\tilde{\nabla}\phi)^p$, составляющих лагранжиан. Эти исследования займут разделы с 1.1 по 1.2.2. Там мы идентифицируем семейство теорий с кручением и анализируем степени свободы и их дисперсионные соотношения. В разделе 1.2 мы доказываем новую запрещающую теорему для устойчивости несингулярных космологий FLRW в этих квадратичных теориях Хорндески-Картана.

Затем мы перейдем в разделе 1.3 к полной теории Хорндески с лагранжианом, содержащим до куба вторых производных скаляра, а именно порядка $(\nabla\nabla\phi)^2$. Там мы покажем, что эта полная теория Хорндески-Картана может допускать полностью устойчивые решения, по крайней мере в первом порядке пертурбативного разложения.

1.1 Квадратичные лагранжианы Хорндески - Картана

Отказ от предположения о символах Кристоффеля для определения ковариантного дифференцирования на пространстве-времени вводит новые поля в теорию. В данной работе мы изначально предполагаем, при формулировке теории, что связность может быть выражена через метрику и тензор кручения. Более того, мы предполагаем нулевую неметричность. А именно, мы рассматриваем только метрически совместимые ковариантные производные.

Такой подход обычно известен как формализм второго порядка, в отличие от предыдущих работ, где можно было, например, начинать со связности, изначально предполагаемой независимой от метрики [72; 73; 78; 87].

В рамках формализма второго порядка естественный подход к теории Хорндески на пространстве-времени с кручением заключается в замене ковариантных производных без кручения на ковариантные производные с кручением в лагранжиане Хорндески. Однако это правило “Без кручения \rightarrow С кручением” не приводит к единственному выбору функции лагранжиана. Точнее, существует по крайней мере однопараметрическое семейство функций лагранжиана, которые сводятся к обычному квадратичному лагранжиану Хорндески при предположении о символах Кристоффеля.

Чтобы записать это точно, начнем с квадратичного лагранжиана Хорндески в обобщенной нотации Галилеона на пространстве-времени без кручения

$$\mathcal{L}_4 = G_4(\phi, X)R + G_{4,X} \left((\nabla_\mu \nabla^\mu \phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2 \right), \quad (1.1)$$

где G_4 — произвольная функция от ϕ и $X = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$, g — метрика с преимущественно + сигнатурой, $G_{4,X} = \partial G_4/\partial X$, а ковариантная производная без кручения на вектор V записывается как

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda \quad (1.2)$$

где

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}), \quad (1.3)$$

так что

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}. \quad (1.4)$$

Таким образом, ясно, что две ковариантные производные без кручения коммутируют на скаляре

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] \phi = 0, \quad (1.5)$$

и поэтому нет неоднозначности в свертке лоренцевых индексов в последнем члене $G_{4,X} (\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \phi)^2$ квадратичного лагранжиана Хорндески без кручения (1.1).

Теперь рассмотрим случай пространства-времени с кручением, где связность не симметрична (мы используем тильду для обозначения величин с кручением)

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\nu} \neq \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu}. \quad (1.6)$$

Записывая ковариантную производную с кручением как (придерживаемся соглашения о суммировании по второму индексу несимметричной связности)

$$\tilde{\nabla}_{\mu} V^{\nu} = \partial_{\mu} V^{\nu} + \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\nu} V^{\lambda}, \quad (1.7)$$

мы можем записать однопараметрическое (c) семейство квадратичных лагранжианов Хорндески-Картана, рассматривая все возможные свертки с метрикой членов вида $(\tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{\nabla}_{\nu} \phi)^2$ в “контрчлене” $G_{4,X}$, где кручение появляется только неявно в ковариантных производных с кручением

$$G_{4,X} \left(\left(\tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{\nabla}^{\mu} \phi \right)^2 + c \left(\tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{\nabla}_{\nu} \phi \right) \tilde{\nabla}^{\mu} \tilde{\nabla}^{\nu} \phi + s \left(\tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{\nabla}_{\nu} \phi \right) \tilde{\nabla}^{\nu} \tilde{\nabla}^{\mu} \phi \right), \quad (1.8)$$

с $c + s = -1$, так что члены (1.8) сводятся к стандартному контрчлену, пропорциональному $G_{4,X}$ в теории Хорндески (1.1), при предположении о символах Кристоффеля (а именно, по правилу $\tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$). Таким образом, эти теории Хорндески-Картана принимают вид

$$\mathcal{S}_{4c} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{4c}, \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4c} = & G_4(\phi, X) \tilde{R} \\ & + G_{4,X} \left(\left(\tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{\nabla}^{\mu} \phi \right)^2 - \left(\tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{\nabla}_{\nu} \phi \right) \tilde{\nabla}^{\nu} \tilde{\nabla}^{\mu} \phi - c \left(\tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{\nabla}_{\nu} \phi \right) \left[\tilde{\nabla}^{\mu}, \tilde{\nabla}^{\nu} \right] \phi \right), \end{aligned} \quad (1.10)$$

где \tilde{R} — скаляр Риччи с кручением, а c — вещественная константа. Ниже мы покажем, что выбор параметра c важен для определения динамики. Более того, подчеркнем, что член с константой c не вводит высших производных, поскольку антисимметричный двумерный тензор $c [\tilde{\nabla}^\mu, \tilde{\nabla}^\nu] \phi$ зануляет симметричные вторые производные скаляра $\partial_\mu \partial_\nu \phi$.

Действительно, отметим с самого начала, что в уравнениях движения, полученных из (1.9), нет производных выше второго порядка для любого значения c (см. Приложение А). Следовательно, как и ожидалось от теорий Хорндески в формализме второго порядка, все лагранжианы в (1.9) свободны от духа Остроградского.

1.1.1 Кручение в формализме второго порядка

В отличие от обычного лагранжиана G_4 Хорндески, где метрика и скаляр являются единственными полями, теперь появляется дополнительное поле кручения, необходимое для определения геометрии пространства-времени [101].

Чтобы явно записать кручение в квадратичном действии Хорндески-Картана (1.9) в формализме второго порядка (см., например, [78; 101]), поступим следующим образом: учитывая предположение (1.6) и тот факт, что любая разность связностей является тензором, определим тензор кручения как

$$T^\rho{}_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}^\rho{}_{\nu\mu}, \quad (1.11)$$

а для удобства введем тензор кокручения как

$$K^\rho{}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (T_\nu{}^\rho{}_\mu + T_\mu{}^\rho{}_\nu + T^\rho{}_{\mu\nu}), \quad (1.12)$$

где заметим антисимметрию

$$T^\rho{}_{\mu\nu} = -T^\rho{}_{\nu\mu} \quad (1.13)$$

$$K_{\mu\nu\sigma} = -K_{\sigma\nu\mu}. \quad (1.14)$$

Теперь прямое вычисление показывает, что связность с кручением выражается через символы Кристоффеля и тензор кокручения следующим образом

$$\tilde{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - K^\rho{}_{\mu\nu}. \quad (1.15)$$

С этими определениями кручения, кокручения и предыдущими соотношениями с символами Кристоффеля, мы можем переписать ковариантную производную с кручением явно через кокручение и ковариантную производную (∇), связанную с символами Кристоффеля, как

$$\tilde{\nabla}_\mu V^\nu = \nabla_\mu V^\nu - K^\nu{}_{\mu\lambda} V^\lambda, \quad (1.16)$$

и мы можем записать коммутатор ковариантных производных с кручением на скаляре как

$$[\tilde{\nabla}_\mu, \tilde{\nabla}_\nu] \phi = -T^\lambda{}_{\mu\nu} \partial_\lambda \phi. \quad (1.17)$$

С этим коммутатором мы можем переписать действие (1.9) в форме, более напоминающей обычный квадратичный лагранжиан Хорндески, но с ковариантными производными с кручением плюс низкопроизводный член c . Этот последний член параметризует различные выборы сверток лоренцевых индексов в теориях Хорндески-Картана. В терминах кокручения, (1.9) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{4c} = & \int d^4x \sqrt{-g} \left(G_4(\phi, X) \tilde{R} \right. \\ & + G_{4,X} \left((\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}^\mu \phi)^2 - (\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \phi) \tilde{\nabla}^\mu \tilde{\nabla}^\nu \phi \right) \\ & \left. + (1 - c) G_{4,X} K_{\nu\mu\sigma} (K^{\nu\mu\lambda} - K^{\mu\nu\lambda}) \tilde{\nabla}_\lambda \phi \tilde{\nabla}^\sigma \phi \right). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Наконец, запишем \tilde{R} через скаляр Риччи без кручения (R) и кокручение, как

$$\tilde{R} = R + K_{\mu\rho\nu} K^{\mu\nu\rho} + K^\mu{}_\mu{}^\nu{}_\nu K_\nu{}^\rho{}_\rho + 2\nabla_\nu K^\mu{}_\mu{}^\nu. \quad (1.19)$$

В итоге, с предыдущими определениями мы можем переписать квадратичные теории Хорндески (1.9) в терминах трёх явных тензорных полей: а именно, метрики, скаляра и тензора кокручения K как трёх фундаментальных полей¹

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{4c} = & \int d^4x \sqrt{-g} \left(G_4(R + K_{\mu\rho\nu} K^{\mu\nu\rho} + K^\mu{}_\mu{}^\nu{}_\nu K_\nu{}^\rho{}_\rho + 2\nabla_\nu K^\mu{}_\mu{}^\nu) \right. \\ & + G_{4X} (\nabla_\nu \nabla^\nu \phi + K^{\rho\nu}{}_\nu \nabla_\rho \phi)^2 \\ & - G_{4X} (K^\rho{}_{\gamma\mu} \nabla_\rho \phi + \nabla_\gamma \nabla_\mu \phi) (K^{\nu\gamma\mu} \nabla_\nu \phi + \nabla^\gamma \nabla^\mu \phi) \\ & \left. + (1 - c) G_{4,X} K_{\nu\mu\sigma} (K^{\nu\mu\lambda} - K^{\mu\nu\lambda}) \nabla_\lambda \phi \nabla^\sigma \phi \right). \end{aligned} \quad (1.20)$$

¹Заметим, что вместо K мы могли бы выбрать тензор кручения T в качестве фундаментального, используя уравнение (1.12).

1.1.2 Линеаризация: Разложение возмущений кокручения на неприводимые компоненты

Мы выполним разложение в ряд до первого порядка относительно фоновой метрики плоского пространства FLRW. Удобно разложить возмущения на неприводимые компоненты относительно малой группы вращений следующим образом: рассмотрим возмущенную метрику

$$ds^2 = (\eta_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu \quad (1.21)$$

где

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2(\eta) (-d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j) \quad (1.22)$$

– фоновая метрика плоского FLRW, η – конформное время, а пространственные индексы обозначаются латинскими буквами, например $i = 1, 2, 3$, а пространственно-временные индексы – греческими буквами, например $\mu = 0, 1, 2, 3$. Возмущение метрики записывается как

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = & a^2(\eta) (-2\alpha d\eta^2 + 2(\partial_i B + S_i) d\eta dx^i \\ & + (-2\psi \delta_{ij} + 2\partial_i \partial_j E + \partial_i F_j + \partial_j F_i + 2h_{ij}) dx^i dx^j), \end{aligned} \quad (1.23)$$

где α , B , ψ , E – скалярные возмущения, S_i , F_i – поперечные векторные возмущения, а h_{ij} – симметричное, бесследовое и поперечное тензорное возмущение.

Для возмущения кокручения, удовлетворяющего симметрии (1.14), имеется 24 независимые компоненты, которые могут быть записаны в терминах неприводимых компонент относительно малой группы вращений как: восемь скаляров, обозначаемых $C^{(n)}$ с $n = 1, \dots, 8$, шесть (двухкомпонентных) поперечных векторов, обозначаемых $V_i^{(m)}$ с $m = 1, \dots, 6$ и два (двухкомпонентных) бесследовых, симметричных, поперечных тензора $T_{ij}^{(1)}$, $T_{ij}^{(2)}$.

Явное разложение возмущения кокручения имеет вид, для скалярного сектора:

$$\begin{aligned}
\delta K_{i00}^{\text{scalar}} &= \partial_i C^{(1)} \\
\delta K_{ij0}^{\text{scalar}} &= \partial_i \partial_j C^{(2)} + \delta_{ij} C^{(3)} + \epsilon_{ijk} \partial_k C^{(4)} \\
\delta K_{i0k}^{\text{scalar}} &= \epsilon_{ikj} \partial_j C^{(5)} \\
\delta K_{ijk}^{\text{scalar}} &= (\delta_{ij} \partial_k - \delta_{kj} \partial_i) C^{(6)} + \epsilon_{ikl} \partial_l \partial_j C^{(7)} + (\epsilon_{ijl} \partial_l \partial_k - \epsilon_{kjl} \partial_l \partial_i) C^{(8)},
\end{aligned} \tag{1.24}$$

для векторного сектора:

$$\begin{aligned}
\delta K_{i00}^{\text{vector}} &= V_i^{(1)} \\
\delta K_{ij0}^{\text{vector}} &= \partial_i V_j^{(2)} + \partial_j V_i^{(3)} \\
\delta K_{i0k}^{\text{vector}} &= \partial_i V_k^{(4)} - \partial_k V_i^{(4)} \\
\delta K_{ijk}^{\text{vector}} &= \delta_{ij} V_k^{(5)} - \delta_{kj} V_i^{(5)} + \partial_j \partial_i V_k^{(6)} - \partial_j \partial_k V_i^{(6)},
\end{aligned} \tag{1.25}$$

и для тензорного сектора:

$$\begin{aligned}
\delta K_{ij0}^{\text{tensor}} &= T_{ij}^{(1)} \\
\delta K_{ijk}^{\text{tensor}} &= \partial_i T_{jk}^{(2)} - \partial_k T_{ji}^{(2)},
\end{aligned} \tag{1.26}$$

где мы не выписывали явно нулевые компоненты и те, что связаны с (1.24-1.26) симметрией (1.14). В итоге, компоненты возмущения кокручения имеют вид:

$$\delta K_{i\mu\nu} = \delta K_{i\mu\nu}^{\text{scalar}} + \delta K_{i\mu\nu}^{\text{vector}} + \delta K_{i\mu\nu}^{\text{tensor}}. \tag{1.27}$$

С другой стороны, ненулевые компоненты фонового тензора кокручения в однородном и изотропном пространстве-времени имеют вид:

$$\begin{aligned}
{}^0 K_{0jk} &= x(\eta) \delta_{jk} \\
{}^0 K_{ijk} &= y(\eta) \epsilon_{ijk},
\end{aligned} \tag{1.28}$$

так что в линейном приближении тензор кокручения со всеми опущенными индексами записывается как:

$$K_{\mu\nu\sigma} = {}^0 K_{\mu\nu\sigma} + \delta K_{\mu\nu\sigma} \tag{1.29}$$

Наконец, запишем скалярное поле как:

$$\phi = \varphi(\eta) + \Pi \tag{1.30}$$

где Π – зависящее от пространства-времени возмущение скалярного поля, а φ – фоновое скалярное поле.

1.1.2.1 Малые калибровочные преобразования

Действие (1.20) во втором порядке по возмущениям инвариантно относительно следующих калибровочных преобразований возмущений метрики:

$$\alpha \rightarrow \alpha - \dot{\xi}^0 - \frac{\dot{a}}{a}\xi^0 \quad B \rightarrow B + \xi^0 - \dot{\xi} \quad \psi \rightarrow \psi + \frac{\dot{a}}{a}\xi^0 \quad E \rightarrow E - \xi \quad (1.31)$$

$$S_i \rightarrow S_i - \dot{\xi}_i \quad F_i \rightarrow F_i - \xi_i \quad h_{ij} \rightarrow h_{ij},$$

преобразования возмущения скалярного поля:

$$\Pi \rightarrow \Pi - \xi^0 \dot{\varphi}, \quad (1.32)$$

и калибровочных преобразований возмущений кручения (в импульсном пространстве):

$$T_{ij}^{(1)} \rightarrow T_{ij}^{(1)} \quad T_{ij}^{(2)} \rightarrow T_{ij}^{(2)} \quad V_i^{(5)} \rightarrow V_i^{(5)} \quad V_i^{(6)} \rightarrow V_i^{(6)} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} V_i^{(1)} &\rightarrow V_i^{(1)} + \dot{\xi}_i x & V_i^{(2)} &\rightarrow V_i^{(2)} + \xi_i x - \dot{\omega}_i y \\ V_i^{(3)} &\rightarrow V_i^{(3)} + \xi_i x + \dot{\omega}_i y & V_i^{(4)} &\rightarrow V_i^{(4)} + \dot{\omega}_i y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^{(1)} &\rightarrow C^{(1)} + \dot{\xi} x & C^{(2)} &\rightarrow C^{(2)} + 2\xi x \\ C^{(3)} &\rightarrow C^{(3)} + \xi^0 \dot{x} + \dot{\xi}^0 x & C^{(4)} &\rightarrow C^{(4)} - \dot{\xi} y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^{(5)} &\rightarrow C^{(5)} + \dot{\xi} y & C^{(6)} &\rightarrow C^{(6)} + \xi^0 x \\ C^{(7)} &\rightarrow C^{(7)} + \xi y - \frac{1}{|\vec{p}|^2} \dot{y} \xi^0 & C^{(8)} &\rightarrow C^{(8)} - \xi y + \frac{1}{|\vec{p}|^2} \dot{y} \xi^0, \end{aligned}$$

где мы разложили калибровочный 4-вектор на два скалярных калибровочных параметра $\xi^0(\eta, \vec{p})$, $\xi(\eta, \vec{p})$ и поперечный вектор $\xi_i(\eta, \vec{p})$ (с $\partial_i \xi_i = 0$). Для удобства мы иногда записывали поперечный вектор ξ_i через ω_i как:

$$\xi_k = \epsilon_{ijk} \partial_i \omega_j \quad \partial_i \omega_i = 0. \quad (1.34)$$

1.1.3 Уравнения для фоновых полей

В итоге, имеется 4 фоновые величины для скаляра, метрики и кокручения: φ , a , x , y , которые удовлетворяют 5 уравнениям движения, из которых только 4 независимы из-за калибровочной инвариантности. А именно, сначала используем уравнение для ${}^0K_{ijk}$:

$$\mathcal{E}_{K_{ijk}} = \epsilon_{ijk} \frac{2}{a^6} G_4 y = 0, \quad (1.35)$$

которое фиксирует $y = 0$, затем имеем:

$$\mathcal{E}_{g_{00}} = (x + a\dot{a}) \left(\frac{3G_4(x - a\dot{a})}{a^8} - \frac{3G_{4,\phi}\dot{\varphi}}{a^6} + \frac{6G_{4,X}(2x + a\dot{a})\dot{\varphi}^2}{a^{10}} - \frac{3G_{4,\phi X}\dot{\varphi}^3}{a^8} + \frac{3G_{4,XX}(x + a\dot{a})\dot{\varphi}^4}{a^{12}} \right), \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{g_{ij}} = \delta_{ij} & \left(\frac{G_4 \left(-x^2 + a^4 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \right) \right)}{a^8} + \frac{G_{4,\phi\phi}\dot{\varphi}^2}{a^4} \right. \\ & + \frac{2G_{4,XX}(x + a\dot{a})\dot{\varphi}^3 \left(-\ddot{\varphi} + \frac{\dot{a}\dot{\varphi}}{a} \right)}{a^{10}} + \frac{G_{4,\phi X}\dot{\varphi}^2 \left(-2x\dot{\varphi} + a^2 \left(\ddot{\varphi} - \frac{3\dot{a}\dot{\varphi}}{a} \right) \right)}{a^8} \\ & + \frac{G_{4,\phi} \left(-x\dot{\varphi} + a^2 \left(\ddot{\varphi} + \frac{\dot{a}\dot{\varphi}}{a} \right) \right)}{a^6} + \frac{G_{4,X}\dot{\varphi} \left((-4x\ddot{\varphi} + \frac{6x\dot{a}\dot{\varphi}}{a} - 2\dot{\varphi}\dot{x}) \right)}{a^8} \\ & \left. + \frac{G_{4,X}\dot{\varphi} \left(-x^2\dot{\varphi} + a^4 \left(-\frac{2\ddot{\varphi}\dot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2\dot{\varphi}}{a^2} - 2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \dot{\varphi} \right) \right)}{a^{10}} \right), \quad (1.37) \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_{K_{ij0}} = \delta_{ij} \left(\frac{2G_4 x}{a^6} - \frac{G_{4,\phi}\dot{\varphi}}{a^4} + \frac{2G_{4,X}(x + a\dot{a})\dot{\varphi}^2}{a^8} \right), \quad (1.38)$$

$$\mathcal{E}_{\varphi} = -\frac{2a^2}{\dot{\varphi}^2} \left(\dot{\mathcal{E}}_{g_{00}} + (5\mathcal{E}_{g_{00}} + 3\mathcal{E}_{g_{ii}}) \frac{\dot{a}}{a} \right) + \frac{6x}{\dot{\varphi}^2} \left(\dot{\mathcal{E}}_{K_{ii0}} + 4\mathcal{E}_{K_{ii0}} \frac{\dot{a}}{a} \right), \quad (1.39)$$

где повторяющиеся пространственные индексы не суммируются в выражении (1.39), а оставшиеся фоновые уравнения имеют вид:

$$\mathcal{E}_{\varphi} = 0, \quad \mathcal{E}_{g_{00}} = 0, \quad \mathcal{E}_{g_{ij}} = 0, \quad \mathcal{E}_{K_{ij0}} = 0, \quad (1.40)$$

где производная по конформному времени η обозначается точкой, например $\dot{a} = \partial a / \partial \eta$.

1.1.4 Линеаризованная динамика в квадратичных теориях Хорндески - Картана

В отличие от случая Эйнштейна-Картана [101], мы в общем случае не ожидаем, что кручение будет разделяться как уравнения связи в квадратичной теории Хорндески-Картана, поскольку в действии (1.20) присутствуют члены вида $G_4 \tilde{\nabla} K$ и $G_{4,X} \left(\tilde{\nabla} \phi \right) \left(\tilde{\nabla} \tilde{\nabla} \phi \right) K$. Эти члены порождают вторые производные кокручения (K) в уравнении Эйлера-Лагранжа для скаляра (ϕ) и вторые производные скаляра в уравнении Эйлера-Лагранжа для кокручения.

Более точно, уравнения Эйлера-Лагранжа для ϕ , $g_{\mu\nu}$ и $K^\mu{}_{\nu\sigma}$, вычисленные из действия (1.20), имеют вид:

$$\mathcal{E}_\phi(\tilde{\nabla}^2 K, \tilde{\nabla}^2 \phi, \partial^2 g) = 0, \quad \mathcal{E}_{g_{\mu\nu}}(\tilde{\nabla}^2 \phi, \partial^2 g) = 0, \quad \mathcal{E}_{K^\mu{}_{\nu\sigma}}(\tilde{\nabla}^2 \phi) = 0, \quad (1.41)$$

где мы показали зависимости \mathcal{E}_ϕ , $\mathcal{E}_{g_{\mu\nu}}$, $\mathcal{E}_{K^\mu{}_{\nu\sigma}}$ от старших производных полей.

Они принимают форму:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\phi &= 2 G_{4X} \partial^\lambda \phi \left(\tilde{\nabla}_\lambda \tilde{\nabla}_\mu K^\nu{}_{\nu\mu} - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}^\nu K^\mu{}_{\mu\lambda} + \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu K^{\nu\mu}{}_\lambda \right) \\ &+ F(K, \tilde{\nabla} K; \tilde{\nabla}^2 \phi, \tilde{\nabla} \phi, \tilde{R}), \end{aligned} \quad (1.42)$$

где мы явно выписали все вторые производные кокручения в \mathcal{E}_ϕ , которые происходят от членов $G_4 \tilde{\nabla} K$ и $G_{4,X} \left(\tilde{\nabla} \phi \right) \left(\tilde{\nabla} \tilde{\nabla} \phi \right) K$ в действии (1.20),

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{K^\mu{}_{\nu\sigma}} &= G_{4,X} \left(\delta_\mu^\nu \left(\tilde{\nabla}^\sigma \tilde{\nabla}_\rho \phi \tilde{\nabla}^\rho \phi - \tilde{\nabla}_\rho \tilde{\nabla}^\rho \phi \tilde{\nabla}^\sigma \phi \right) \right. \\ &+ g^{\sigma\nu} \left(\tilde{\nabla}_\rho \tilde{\nabla}^\rho \phi \tilde{\nabla}_\mu \phi - \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\rho \phi \tilde{\nabla}^\rho \phi \right) + \tilde{\nabla}^\nu \tilde{\nabla}_\mu \phi \tilde{\nabla}^\sigma \phi - \tilde{\nabla}^\nu \tilde{\nabla}^\sigma \phi \tilde{\nabla}_\mu \phi \left. \right) \\ &+ G_{4,\phi} \left(\tilde{\nabla}_\mu \phi g^{\sigma\nu} - \tilde{\nabla}^\sigma \phi \delta_\mu^\nu \right) \\ &+ G_4 \left(\delta_\mu^\nu K^\sigma{}_{\rho}{}^\rho - g^{\sigma\nu} K_{\mu\rho}{}^\rho + K_\mu{}^{\sigma\nu} + K^\nu{}_{\mu}{}^\sigma \right) \\ &- (-1 + c) G_{4,X} \left(\nabla^\alpha \phi \left(g_{\mu\alpha} (K^{\nu\sigma}{}_\beta - K^{\sigma\nu}{}_\beta) \nabla^\beta \phi - (K_\alpha{}^\nu{}_\mu + K^\nu{}_{\mu\alpha}) \nabla^\sigma \phi \right) \right). \end{aligned} \quad (1.43)$$

где мы подчеркиваем зависимость $\mathcal{E}_{K^\mu{}_\nu\sigma}$ от членов второго порядка $\tilde{\nabla}^2\phi$. А $\mathcal{E}_{g_{\mu\nu}}$ и F приведены в Приложении А.

В итоге, имеются три уравнения поля (1.41) с производными до второго порядка для *всех* трех полей. Поэтому можно ожидать появления новых степеней свободы помимо обычных тензорных мод и единственной скалярной моды, которые обычно встречаются в квадратичной теории Хорндески без кручения².

Основная цель данной работы, в формализме второго порядка, состоит в точном определении степеней свободы для теории (1.20). Мы исследуем этот вопрос в линейном порядке в рамках возмущенного разложения.

1.1.5 Модификация степеней свободы Хорндески на пространстве - времени с кручением

Вопреки ожиданиям, основанным на выражении (1.42), в действительности нет явных кинетических членов для возмущений кокручения относительно пространственно плоского фона FLRW. Это можно явно увидеть в квадратичном действии для тензорного и скалярного секторов, соответственно (1.45), (1.46). С другой стороны, векторный сектор, который приведен в Приложении А, является тривиальным в том смысле, что все векторные возмущения нединамические. Нетривиальная часть квадратичного действия записывается как:

$$\mathcal{S}_{4c} = \mathcal{S}^{Tensor} + \mathcal{S}_c^{Scalar}, \quad (1.44)$$

где часть, относящаяся к трем тензорным возмущениям h_{ij} , $T_{ij}^{(1)}$, $T_{ij}^{(2)}$, имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{Tensor} = \frac{1}{2} \int d\eta d^3x & \left(v_1 (\dot{h}_{ij})^2 + v_2 (\partial_k h_{ij})^2 + v_3 (T_{ij}^{(1)})^2 \right. \\ & \left. + v_4 (\partial_k T_{ij}^{(2)})^2 + v_5 h_{ij} T_{ij}^{(1)} + v_6 \dot{h}_{ij} T_{ij}^{(1)} + v_7 (h_{ij})^2 \right), \end{aligned} \quad (1.45)$$

где коэффициенты v_i с $i = 1 \dots 7$, приведенные в Приложении А, зависят только от фоновых величин. В частности, они не зависят от параметра теории c . Следовательно, тензорные моды одинаковы в семействе квадратичных теорий

²В различных формализмах, таких как формализм Палатини, также отмечалось, что нехристоффелева связность может приводить к новым степеням свободы в теории Хорндески [73; 78]

Хорндески-Картана. С другой стороны, отметим заранее, что после исключения (с помощью уравнений связей) возмущений кручения $T_{ij}^{(1)}$, $T_{ij}^{(2)}$ и использования уравнений движения для фоновых полей массовый член для гравитона исчезает, аналогично случаю теории Хорндески без кручения.

Часть действия, относящаяся к 13 скалярным возмущениям $C^{(n)}$, α , B , ψ , E , Π с $n = 1, \dots, 8$, без фиксации калибровки, имеет вид:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_c^{Scalar} = & \frac{1}{2} \int d\eta d^3x \left(c \left(f_7 \partial_i B \partial_i C^{(1)} + f_{51} (\partial_i B)^2 + f_{52} (\partial_i C^{(1)})^2 \right) \right. \\
& + \left(f_1 \alpha \Pi + f_2 C^{(3)} \psi + f_3 \alpha \psi + f_4 \Pi \psi + f_5 C^{(3)} \Pi + f_6 C^{(3)} \alpha + f_8 \partial_i C^{(3)} \partial_i E \right. \\
& + f_9 \partial_i B \partial_i C^{(3)} + f_{10} \partial_i C^{(2)} \partial_i C^{(3)} + f_{11} \partial_i C^{(4)} \partial_i C^{(5)} + f_{12} \partial_i B \partial_i C^{(6)} \\
& + f_{13} \partial_i C^{(1)} \partial_i C^{(6)} + f_{14} \partial_i B \partial_i \Pi + f_{15} \partial_i E \partial_i \Pi + f_{16} \partial_i C^{(1)} \partial_i \Pi + f_{17} \partial_i C^{(2)} \partial_i \Pi \\
& + f_{18} \partial_i C^{(3)} \partial_i \Pi + f_{19} \partial_i C^{(6)} \partial_i \Pi + f_{20} \partial_i B \partial_i \alpha + f_{21} \partial_i E \partial_i \alpha + f_{22} \partial_i C^{(2)} \partial_i \alpha \\
& + f_{23} \partial_i C^{(6)} \partial_i \alpha + f_{24} \partial_i \alpha \partial_i \Pi + f_{25} \partial_i E \partial_i \psi + f_{26} \partial_i B \partial_i \psi + f_{27} \partial_i C^{(2)} \partial_i \psi \\
& + f_{28} \partial_i \Pi \partial_i \psi + f_{29} \partial_i \alpha \partial_i \psi + f_{30} \partial_i \partial_j C^{(7)} \partial_i \partial_j C^{(8)} + f_{31} \dot{\psi} \dot{\Pi} + f_{32} \alpha \dot{\Pi} + f_{33} C^{(3)} \dot{\Pi} \\
& + f_{34} \alpha \dot{\psi} + f_{35} C^{(3)} \dot{\psi} + f_{36} \dot{\Pi} \dot{\psi} + f_{37} \partial_i C^{(3)} \partial_i \dot{E} + f_{38} \partial_i \alpha \partial_i \dot{E} + f_{39} \partial_i B \partial_i \dot{\Pi} \\
& + f_{40} \partial_i E \partial_i \dot{\Pi} + f_{41} \partial_i C^{(2)} \partial_i \dot{\Pi} + f_{42} \partial_i C^{(6)} \partial_i \dot{\Pi} + f_{43} \partial_i \dot{E} \partial_i \dot{\Pi} + f_{44} \partial_i B \partial_i \dot{\psi} \\
& + f_{45} \partial_i C^{(2)} \partial_i \dot{\psi} + f_{46} \partial_i \dot{E} \partial_i \dot{\psi} + f_{47} (C^{(3)})^2 + f_{48} \alpha^2 + f_{49} \psi^2 + f_{50} \Pi^2 + f_{53} (\partial_i C^{(4)})^2 \\
& \left. \left. + f_{54} (\partial_i C^{(6)})^2 + f_{55} (\partial_i \Pi)^2 + f_{56} (\partial_i \psi)^2 + f_{57} (\partial_i \partial_j C^{(8)})^2 + f_{58} \dot{\Pi}^2 + f_{59} \dot{\psi}^2 \right) \right), \tag{1.46}
\end{aligned}$$

где коэффициенты f_i с $i = 1 \dots 59$ зависят только от фоновых величин и параметра теории c . Они приведены в Приложении А.

Что касается различий в динамике внутри семейства квадратичных лагранжианов Хорндески-Картана, важно отметить, что в скалярном секторе теория с $c = 0$ имеет на три члена меньше, как показано в первой строке выражения (1.46). В частности, *только* для теории с $c = 0$ возмущение метрики B и первый скаляр кручения $C^{(1)}$ являются множителями Лагранжа. Как мы покажем ниже, эти ограничения критичны в том смысле, что они приводят к различной динамике возмущения скалярного поля в теории с $c = 0$ по сравнению с квадратичными теориями Хорндески-Картана с ненулевым параметром c .

Хотя в (1.45) и (1.46) нет явных кинетических членов для возмущений кручения и скалярных возмущений, новые кинетические члены могут возникнуть

после использования некоторых уравнений движения. Как мы покажем ниже, это не так для квадратичных теорий Хорндески-Картана (1.20). А именно, для скалярного и тензорного секторов на пространственно плоском фоне FLRW (1.45), (1.46) можно использовать все уравнения связи, чтобы исключить *все* возмущения кручения $C^{(n)}$ ($n = 1, \dots, 8$), $T_{ij}^{(1)}$, $T_{ij}^{(2)}$, а также возмущения метрики α , B до фиксации калибровки. Для получения окончательного результата мы предполагаем, что фоновое скалярное поле $\varphi(\eta)$ не является постоянным ($\dot{\varphi} \neq 0$), что фоновое кручение x не равно нулю и что коэффициенты в действии (1.45) и (1.46), а также после использования уравнений связи не обращаются в нуль³. В итоге, действие второго порядка в унитарной калибровке, где $\Pi = 0$ и $E = 0$, разделяется только на тензорные моды h_{ij} и единственную скалярную моду ψ , что показывает, что в общем случае кручение на пространстве-времени не вводит дополнительных степеней свободы, а лишь модифицирует обычные тензорные и скалярные степени свободы, которые встречаются в стандартном квадратичном лагранжиане Хорндески без кручения. Окончательный вид действия для общего параметра c имеет вид:

$$S_{4c} = \frac{1}{2} \int d\eta d^3x a^4 \left[\frac{1}{a^2} \left(\mathcal{G}_\tau (\dot{h}_{ij})^2 - \mathcal{F}_\tau (\partial_k h_{ij})^2 \right) + \frac{1}{a^2} \left(\dot{\psi} \left(\mathcal{G}_{SI} - c \frac{1}{a^2} \mathcal{G}_{SII} \partial_i \partial_i \right) \psi - \mathcal{F}_S (\partial_i \psi)^2 \right) \right], \quad (1.47)$$

где

$$\mathcal{G}_\tau = 2 \frac{G_4^2}{G_4 + 2X G_{4,X}}, \quad (1.48)$$

$$\mathcal{F}_\tau = 2G_4, \quad (1.49)$$

$$\mathcal{G}_{SI} = \frac{m_1}{a^2 (-G_{4,\phi} G_{4,X} + G_{4,\phi X} G_4) (a^4 G_4^2 + (2G_{4,X}^2 - G_{4,XX} G_4) \dot{\varphi}^4)^2}, \quad (1.50)$$

$$\mathcal{G}_{SII} = \frac{8 G_{4,X}^3 G_4^3}{(G_4 + cX G_{4,X}) (G_{4,X} G_{4,\phi} - G_4 G_{4,\phi X})^2}, \quad (1.51)$$

³Это явно ограничивает даже самый общий результат классом функций G_4 с некоторыми ненулевыми производными. Например, мы предполагаем, что $G_{4,\phi} \neq 0$ и $G_{4,X} \neq 0$. Мы показываем конкретный пример в разделе 1.1.6.3. Мы также предполагаем нетривиальную ветвь решений для фоновых полей (1.40). Например, мы предполагаем, что $x + a\dot{a} \neq 0$, что является очень частной ветвью решений фонового уравнения $\mathcal{E}_{g_{00}} = 0$ (1.40), которая тривиальна в том смысле, что обнуляет многие коэффициенты в квадратичном лагранжиане.

$$\mathcal{F}_S = \frac{m_2}{m_3}, \quad (1.52)$$

где фоновые функции m_i с $i = 1, 2, 3$ не очень информативны и приведены в Приложении А.

Ключевой аспект, очевидный в действии (1.47), – это параметр теории c в коэффициенте члена $\dot{\psi}\partial_i\partial_i\dot{\psi}$. Этот вклад радикально модифицирует дисперсионное соотношение скаляра в случае, если он не равен нулю. Следовательно, этот результат выделяет квадратичную теорию Хорндески-Картана (1.9) с $c = 0$ как единственную, в которой скалярная степень свободы имеет регулярное волнообразное поведение. В таком случае скалярный сектор *не обязательно* совпадает в теориях Хорндески без кручения и с кручением, поскольку квадрат скорости звука

$$(c_s^{HC})^2 = \frac{\mathcal{F}_S}{\mathcal{G}_{SI}}, \quad (1.53)$$

различается в обоих случаях (см., например, раздел 3.2.1 в [77]).

Для теорий \mathcal{S}_{4c} с $c \neq 0$ есть некоторые ключевые аспекты, отличающиеся от теории с $c = 0$. А именно, когда параметр теории c не равен нулю: 1) $C^{(1)}$ *не* является множителем Лагранжа. 2) $C^{(1)}$ и B связаны. 3) Скаляр B *не* является множителем Лагранжа, в отличие от стандартной квадратичной теории Хорндески на пространстве-времени без кручения. Все эти три аспекта очевидны из первой строки выражения (1.46). Проясним, как эти особенности в конечном итоге приводят к различию в распространении скалярной моды в теориях с $c = 0$ и $c \neq 0$: ключевые аспекты, которые мы обсуждаем в скалярном секторе в выражении (1.47), могут быть записаны с лагранжианом вида

$$\mathcal{L}_{toy} = (1 - cp^2) \dot{x}_1^2 - p^2 x_1^2, \quad (1.54)$$

для поля x_1 в импульсном пространстве. Эта модель обладает тем свойством, что если $c \neq 0$, то поле x_1 имеет необычное дисперсионное соотношение вида, обсуждавшегося ранее. Однако существует эквивалентная модель для (1.54):

$$\mathcal{L}_{toy'} = \dot{x}_1^2 - p^2 x_1^2 + cp^2 (2x_2 \dot{x}_1 + x_2^2), \quad (1.55)$$

которая *вне массовой поверхности* кажется лагранжианом для степени свободы x_1 со стандартным волнообразным дисперсионным соотношением, но связанной с

дополнительным вспомогательным полем x_2 . Действительно, подставляя обратно в лагранжиан (1.55) уравнение движения для x_2 ($x_2 = -\dot{x}_1$), мы восстанавливаем модель (1.54).

Для теорий \mathcal{S}_{4c} существует упрощенная аналогия с моделью (1.55), которая следует из отождествления ψ и $C^{(6)}$ с x_1 и x_2 соответственно. Действительно, с одной стороны, члены модели (1.55), а именно $\dot{\psi}^2$, $p^2\psi^2$, $p^2(C^{(6)})^2$, присутствуют в начальном действии (1.46). С другой стороны, оставшийся ключевой член для завершения аналогии с моделью (1.55), а именно $p^2 C^{(6)}\dot{\psi}$, генерируется посредством члена $p^2 f_{23} C^{(6)}\alpha$ в начальном действии (1.46), поскольку на массовой поверхности (с точностью до зависящих от фона коэффициентов)

$$\alpha = \dot{\psi} + \dots \quad (1.56)$$

Теперь ясно, что для получения необычного дисперсионного соотношения в модели (1.55) x_2 не должен обращаться в нуль. Аналогично, вспомогательное поле $C^{(6)}$ не должно обращаться в нуль. Это возможно только при $c \neq 0$. Действительно, уравнение движения для первого скаляра кручения $C^{(1)}$, вычисленное из действия (1.46) в унитарной калибровке для теории с общим параметром c , имеет вид:

$$C^{(6)} = -c \frac{1}{f_{13}} (2 f_{52} C^{(1)} + f_7 B) . \quad (1.57)$$

Только если $c \neq 0$, первый скаляр кручения $C^{(1)}$ не является множителем Лагранжа (напомним здесь первое критическое различие, указанное выше между теориями с нулевым и ненулевым параметром c), и поэтому $C^{(6)}$ не обращается в нуль. Как следствие, по аналогии с эквивалентностью моделей (1.55) и (1.54), при $c \neq 0$ мы получаем нерегулярное волнообразное дисперсионное соотношение, как мы нашли в результате (1.47).

Эта скалярная степень свободы для теорий с $c \neq 0$ не имеет аналога в квадратичной теории Хорндески на пространстве-времени без кручения. Мы исследуем далее это необычное дисперсионное соотношение для теорий с $c \neq 0$ на конкретном примере в разделе 1.1.6.3.

Наконец, для тензорных мод квадрат скорости звука модифицируется по сравнению со стандартным (без кручения) случаем квадратичной теории Хорндески,

из [77]

$$(c_\tau^H)^2 = \frac{G_4}{G_4 - 2X G_{4,X}}, \quad (1.58)$$

в

$$(c_\tau^{HC})^2 = \frac{\mathcal{F}_\tau}{\mathcal{G}_\tau} = \left(1 + 2X \frac{G_{4,X}}{G_4}\right). \quad (1.59)$$

Различие между c_τ^H и c_τ^{HC} сводится к возмущению кручения $T_{ij}^{(1)}$, которое связано с h_{ij} . С другой стороны, $T_{ij}^{(2)}$ не связано с гравитоном. Отметим, что этот результат для тензорного сектора не зависит от фонового кручения $x(\eta)$.

Отметим также, что для краткости, в данной работе мы также определяем термин “световые возмущения” как возмущения, распространяющиеся со скоростью света. Аналогично, мы определяем “досветовые и сверхсветовые возмущения” как возмущения, распространяющиеся со скоростью ниже или выше скорости света, соответственно.

1.1.6 Устойчивость и классификация скалярной моды в квадратичных теориях Хорндески-Картана

Условия устойчивости для избежания духов и градиентных неустойчивостей для тензорных мод имеют вид:

$$\mathcal{G}_\tau > 0, \quad \mathcal{F}_\tau > 0, \quad (1.60)$$

которые не зависят от параметра теории s . Выражения (1.60) могут быть записаны вместе с требованием досветовой скорости гравитона $(c_\tau^{HC})^2 < 1$ как:

$$G_4 > -2X G_{4,X} > 0, \quad (1.61)$$

и легко сравниваются с аналогичными условиями для тензорных мод в квадратичной теории Хорндески без кручения [77]:

$$G_4 > 0 > 2X G_{4,X}. \quad (1.62)$$

С другой стороны, для скалярной моды требуется отдельный анализ для теорий с $s = 0$ и ненулевым s .

1.1.6.1 Устойчивость скалярной моды для теории с $c = 0$

В этой теории скалярная мода имеет обычное волнообразное дисперсионное соотношение, а условия отсутствия духов и устойчивости выглядят стандартно:

$$\mathcal{G}_{SI} > 0, \quad \mathcal{F}_S > 0, \quad (1.63)$$

при условии, что мы также требуем положительный знак для кинетического члена гравитона ($\mathcal{G}_\tau > 0$).

Дальнейший анализ устойчивости космологических решений в этой теории ($c = 0$) отложен до раздела 1.2, где мы доказываем запрещающую теорему. Пока же кратко проанализируем менее физически обоснованные теории с $c \neq 0$.

1.1.6.2 Условие отсутствия духов для скалярной моды в теориях с ненулевым c

В этом случае неволнообразное дисперсионное соотношение позволяет сформулировать условие отсутствия духов только как:

$$\mathcal{G}_{SI} > 0, \quad c\mathcal{G}_{SII} > 0. \quad (1.64)$$

Также, проводя аналогию с колебательной системой с восстанавливающей силой и ограниченной энергией снизу, мы можем потребовать аналогичное условие для градиентной устойчивости:

$$\mathcal{F}_S > 0. \quad (1.65)$$

Для дальнейшего анализа рассмотрим случай высоких импульсов. Тогда значимы только \mathcal{G}_{SII} и \mathcal{F}_S . В этом случае из уравнения (1.51) условие отсутствия духов для скаляра сводится к:

$$c\mathcal{G}_{SII} = \frac{8cG_{4,X}^3 G_4^3}{(G_4 + cX G_{4,X})(G_{4,X} G_{4,\phi} - G_4 G_{4,\phi X})^2} > 0. \quad (1.66)$$

Предполагая устойчивость, досветовость и условие отсутствия духов для гравитона (1.61), что явно ограничивается:

$$G_4 > 0, \quad G_{4,X} < 0, \quad (1.67)$$

поскольку для фоновых полей $X = \frac{1}{2a^2}\dot{\phi}^2 > 0$, мы можем переписать условие отсутствия духов для скаляра (1.66) как:

$$\frac{c}{(G_4 + c X G_{4,X})} < 0. \quad (1.68)$$

Используя снова устойчивость гравитона (1.61), переписанную как:

$$(G_4 + c X G_{4,X}) > (c - 2) X G_{4,X} \quad (1.69)$$

мы находим из (1.68), что скалярная степень свободы для теорий \mathcal{S}_{4c} с $c \neq 0$ может быть классифицирована в *приближении высоких импульсов* как не-дух для теорий с $c < 0$, и как дух, если $0 < c \leq 2$. Таким образом, мы приходим к важному выводу, что существуют квадратичные теории Хорндески-Картана ($c < 0$), в которых и гравитон, и скалярная мода *одновременно* свободны от духов в пределе высоких импульсов.

Подчеркнем, что эта классификация скалярной моды справедлива только при одновременном предположении, что гравитон досветовой, устойчив и свободен от духов (1.61), и не может быть выведена из соображений устойчивости только скалярной моды. Таблица 1.1 суммирует эти результаты.

Устойчивость скалярной моды в конкретном примере с $c \neq 0$ дополнительно исследуется в разделе 1.1.6.3.

1.1.6.3 Пример: скалярная мода в теориях Хорндески-Картана \mathcal{S}_{4c} с ненулевым c

Мы показали, что только квадратичная теория Хорндески-Картана \mathcal{S}_{4c} с $c = 0$ имеет скалярную моду, распространяющуюся с регулярным волнообразным дисперсионным соотношением на фоне FLRW. Для других теорий, а именно при $c \neq 0$, мы показали, что дисперсионное соотношение является необычным. В этом разделе мы рассматриваем пример теории с $c \neq 0$ и наблюдаем, что необычное дисперсионное соотношение не обязательно подразумевает неустойчивость.

Рассмотрим функцию G_4 , которая может удовлетворять условиям досветовости, отсутствия духов и устойчивости гравитона (1.61)

$$G_4 = \phi^2 - 2\kappa X, \quad (1.70)$$

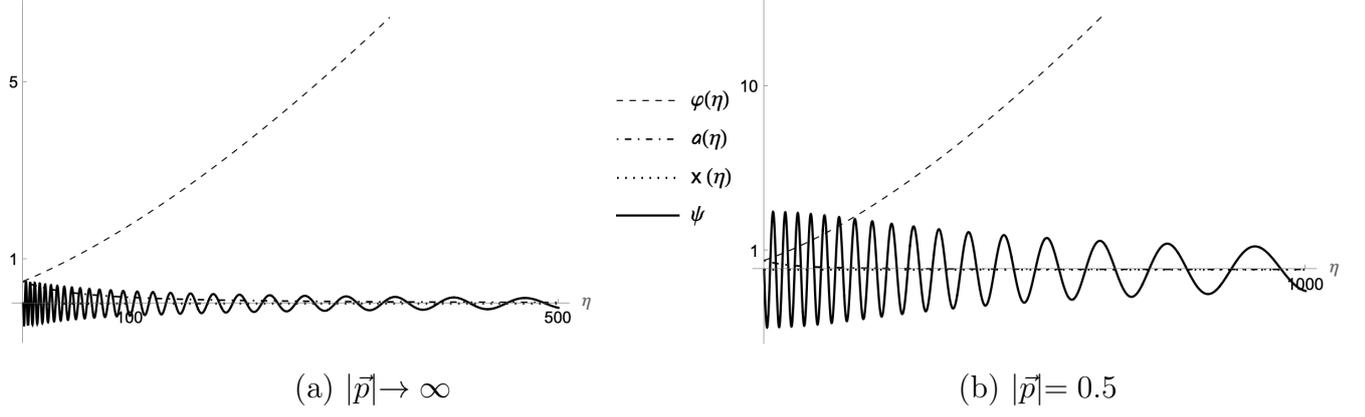


Рис. 1.1: Эволюция скалярной моды ψ для существенно различных импульсов. В обоих случаях амплитуда колебаний скалярной моды уменьшается, приближаясь к нулю до позднего времени, когда предположения нарушаются и возникает сингулярность при $\eta \approx 3983$. Положение этой сингулярности (не показано на рисунках) связано с моментом, когда $a \rightarrow 0$, и не зависит от импульса. Начальные данные выбраны так, что условия устойчивости фона по отношению к физически приемлемому гравитону (1.75) выполняются в начальный момент времени, а также $\varphi\dot{\varphi}|_{\eta=0} > 0$, так что предположения $\varphi(\eta) \neq 0$, $\dot{\varphi}(\eta) \neq 0$ выполняются для временных областей численного моделирования (Заметим, что $\varphi(\eta)$ монотонно возрастает в этих временных областях). Начальные условия: $\varphi(0) = 0.5$, $\dot{\varphi}(0) = 0.01$, $a(0) = 0.5$, $\psi(0, |\vec{p}|) = 0$, $\dot{\psi}(0, |\vec{p}|) = -0.9$.

где в естественных единицах κ - константа с размерностью длины в квадрате. Для простоты мы работаем в планковских единицах, поэтому выбираем $\kappa = 1$. Кроме того, рассмотрим теорию с отрицательным параметром c , $c = -\frac{1}{2}$, которая, как обсуждалось в предыдущем разделе, обладает свойством, что при выполнении условий устойчивости фона по отношению к гравитону (1.61), скаляр не является духом в приближении высоких импульсов (см. также Таблицу 1.1).

Используя окончательный вид действия (1.47) с выбором G_4 (1.70) и для теории $c = -\frac{1}{2}$, действие скалярного сектора имеет вид:

$$S_{4c}^{Scalar} = \frac{1}{2} \int d\eta d^3x a^2 \left(\mathcal{G}_{SI} \dot{\psi}^2 + c \frac{1}{a^2} \mathcal{G}_{SII} (\partial_i \psi)^2 - \mathcal{F}_S (\partial_i \psi)^2 \right), \quad (1.71)$$

где

$$\mathcal{G}_{SI} = \frac{24(a^2 \varphi^2 - 3\dot{\varphi}^2)(-a^2 \varphi^2 + \dot{\varphi}^2)^2(3a^4 \varphi^4 + 2a^2 \varphi^2 \dot{\varphi}^2 + 3\dot{\varphi}^4)}{a^2(a^4 \varphi^4 - 2a^2 \varphi^2 \dot{\varphi}^2 + 9\dot{\varphi}^4)^2}, \quad (1.72)$$

$$c \mathcal{G}_{SII} = \frac{4(a^2 \varphi^2 - \dot{\varphi}^2)^3}{a^4 \varphi^2 (2a^2 \varphi^2 - \dot{\varphi}^2)}, \quad (1.73)$$

$$\mathcal{F}_S = \frac{8(a^2 \varphi^2 - \dot{\varphi}^2)(27 \dot{\varphi}^8 + a^2 \varphi^2 \dot{\varphi}^4(28 a^2 \varphi^2 - 15 \dot{\varphi}^2) + a^6 \varphi^6(3 a^2 \varphi^2 - 11 \dot{\varphi}^2))}{a^2 \varphi^2(a^2 \varphi^2 - 3 \dot{\varphi}^2)(9 \dot{\varphi}^4 + a^2 \varphi^2(a^2 \varphi^2 - 2 \dot{\varphi}^2))}. \quad (1.74)$$

Отметим, что скаляр не является духом при выполнении условий досветовости, устойчивости и отсутствия духов для гравитона (1.61). Эти условия выполняются для временных областей, где

$$a^2 \varphi^2 - 3 \dot{\varphi}^2 > 0. \quad (1.75)$$

Когда гравитон является физически приемлемым, скаляр не является духом, потому что неравенство (1.75) подразумевает:

$$\mathcal{G}_{SI} > 0, \quad (1.76)$$

$$c \mathcal{G}_{SII} > 0. \quad (1.77)$$

Кроме того, в соответствии с нашими предположениями при выводе (1.47), фон кручения не обращается в нуль там, где гравитон является физически приемлемым (1.75) и где ϕ , a и $\dot{\varphi}$ не обращаются в нуль, что также было частью предположений:

$$x = \frac{a^4 \varphi \dot{\varphi} (a^2 \varphi^2 - \dot{\varphi}^2)}{9 \dot{\varphi}^4 + a^2 \varphi^2(a^2 \varphi^2 - 2 \dot{\varphi}^2)}. \quad (1.78)$$

Теперь из (1.71) мы можем вычислить уравнение движения для $\psi(\eta, \vec{x})$. Связанная система уравнений состоит из одного уравнения в частных производных для ψ с коэффициентами, зависящими только от времени, и двух обыкновенных дифференциальных уравнений для φ , a :

$$\ddot{\varphi}(\eta) - \dot{\varphi}^2 \frac{a^8 \varphi^8(a^2 \varphi^2 - 11 \dot{\varphi}^2) - 27 \dot{\varphi}^8(5 a^2 \varphi^2 - 3 \dot{\varphi}^2) + 2 a^4 \varphi^4 \dot{\varphi}^4(23 a^2 \varphi^2 + 25 \dot{\varphi}^2)}{2 a^4 \varphi^5 \dot{\varphi}^4(19 a^2 \varphi^2 - 33 \dot{\varphi}^2) + a^8 \varphi^9(3 a^2 \varphi^2 - 13 \dot{\varphi}^2) - 9 \varphi \dot{\varphi}^8(a^2 \varphi^2 + 9 \dot{\varphi}^2)} = 0, \quad (1.79)$$

$$\dot{a} + \frac{a^3 \varphi \dot{\varphi}(a^2 \varphi^2 + 3 \dot{\varphi}^2)}{9 \dot{\varphi}^4 + a^2 \varphi^2(a^2 \varphi^2 - 2 \dot{\varphi}^2)} = 0, \quad (1.80)$$

Для численного решения системы мы рассматриваем случай высоких и низких импульсов. Мы также ограничиваем эволюцию временными областями, где

гравитон является физически приемлемым (1.75), следовательно, когда (1.76) и (1.77) также выполняются и скаляр не является духом, и где выполняется условие градиентной устойчивости $\mathcal{F}_S > 0$.

Численные решения на Рисунках 1.1a, 1.1b показывают, что амплитуда колебаний скалярного возмущения ψ уменьшается и колеблется около нуля для поздних времен, для широкого диапазона импульсов. Такое поведение наблюдалось при ограничении начальными данными, удовлетворяющими условиям физически приемлемого гравитона (1.75), и до тех пор, пока выполняются предположения. В частности, существует сингулярность, не показанная на Рисунках 1.1a, 1.1b, которая возникает только на поздних временах и связана с обращением a в нуль.

С другой стороны, Рисунок 1.2 показывает типичный случай, когда сингулярность быстро возникает на ранних временах⁴, потому что начальные условия быстро приводят к нарушению предположения $\dot{\varphi} \neq 0$, на котором основана справедливость результата (1.71) и рисунков. Приближение к этой сингулярности, по-видимому, приводит к росту амплитуды скалярного возмущения, даже несмотря на то, что условие градиентной устойчивости $\mathcal{F}_S > 0$ выполняется в проверенной временной области на Рисунке 1.2. Таким образом, мы избегаем начальных условий для скаляра, которые быстро приводят к $\dot{\varphi} = 0$ и сингулярностям. Более точно, поскольку φ монотонна *по крайней мере в проверенной временной области*, мы можем легко избежать этой сингулярности, ограничиваясь начальными условиями скаляра, удовлетворяющими $\varphi\dot{\varphi}|_{\eta=0} > 0$.

В целом, несмотря на необычное дисперсионное соотношение для квадратичных теорий Хорндески-Картана с $c \neq 0$, результаты этого раздела для $c = -\frac{1}{2}$ позволяют предположить, что скалярная мода не обязательно неустойчива, потому что по крайней мере в некоторых случаях и в проверенных временных областях, которые мы выбрали совпадающими с областями, где гравитон также является физически приемлемым, амплитуда колебаний скалярного возмущения уменьшается со временем, стремясь к нулю для поздних времен, когда начальные условия не приводят к нарушению предположений, на которых основаны вычисления.

⁴Ранних по сравнению со случаем на Рисунке 1.1a. А именно, $\eta_{\text{singularity}} \sim 10$ на Рисунке 1.2 по сравнению с $\eta_{\text{singularity}} \sim 10^3$ на Рисунке 1.1a.

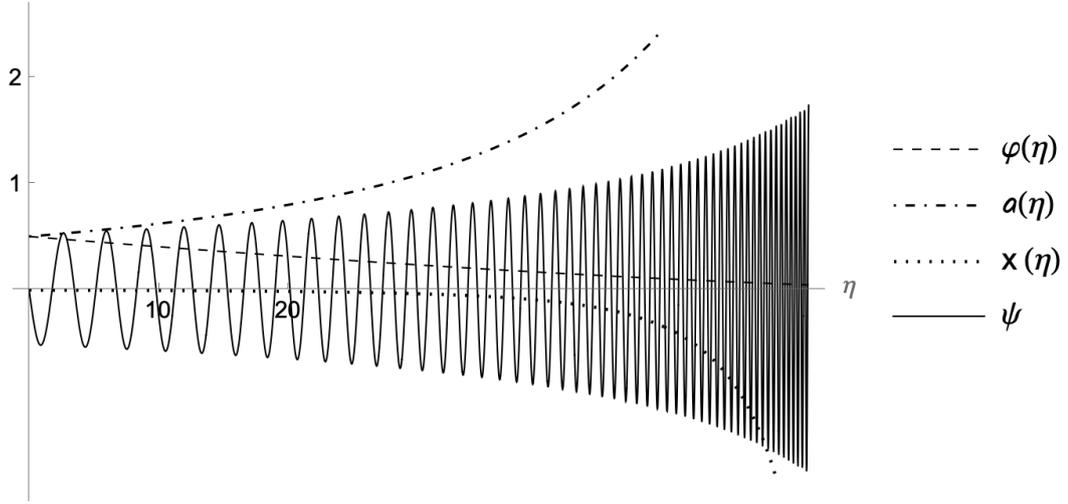


Рис. 1.2: Типичный случай, когда сингулярность быстро возникает в точке, где фоновый скаляр φ обращается в нуль. Такие сценарии обычно получаются, когда начальное значение φ и его скорость имеют противоположные знаки ($\varphi\dot{\varphi}|_{\eta=0} < 0$), потому что φ монотонна в проверенных временных областях. Обращение φ в нуль нарушает предположения для вывода действия (1.71) (Предел высоких импульсов. Начальные условия: $\varphi(0) = 0.5$, $\dot{\varphi}(0) = -0.01$, $a(0) = 0.5$, $\psi(0, |\vec{p}| \rightarrow \infty) = 0$, $\dot{\psi}(0, |\vec{p}| \rightarrow \infty) = -0.9$. Сингулярность при $\eta \approx 75$).

1.1.7 Частичные выводы по квадратичным теориям Хорндески – Картана

Вкратце, мы видели, что квадратичная теория Хорндески с кручением в формализме второго порядка может быть записана как однопараметрическое (c) семейство:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{4c} = & \int d^4x \sqrt{-g} \left(G_4(\phi, X) \tilde{R} \right. \\
& + G_{4,X} \left(\left(\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}^\mu \phi \right)^2 - \left(\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \phi \right) \tilde{\nabla}^\mu \tilde{\nabla}^\nu \phi \right) \\
& \left. + (1 - c) G_{4,X} K_{\nu\mu\sigma} \left(K^{\nu\mu\lambda} - K^{\mu\nu\lambda} \right) \tilde{\nabla}_\lambda \phi \tilde{\nabla}^\sigma \phi \right), \quad (1.81)
\end{aligned}$$

где тильда обозначает величины с кручением, и теории (1.81) для всех c сводятся к стандартному действию Хорндески без кручения путем замены $\tilde{R} \rightarrow R$, и $\tilde{\nabla} \rightarrow \nabla$ так, что $[\nabla^\mu, \nabla^\nu] \phi = 0$, где ∇ обозначает ковариантную производную, определённую с помощью символов Кристоффеля.

Мы показали в возмущенном разложении, что эти квадратичные теории

Хорндески-Картана в линейном порядке на пространственно плоском фоне FLRW не вводят дополнительных степеней свободы и что связность с кручением только модифицирует обычные тензорные и скалярные степени свободы по сравнению со стандартной квадратичной теорией Хорндески без кручения. Действительно, квадратичное действие для однопараметрического семейства теорий (1.81) может быть окончательно записано для гравитона h_{ij} и единственного скалярного возмущения поля ψ в виде:

$$S_{4c} = \frac{1}{2} \int d\eta d^3x a^4 \left[\frac{1}{a^2} \left(\mathcal{G}_\tau (\dot{h}_{ij})^2 - \mathcal{F}_\tau (\partial_k h_{ij})^2 \right) + \frac{1}{a^2} \left(\dot{\psi} \left(\mathcal{G}_{SI} - c \frac{1}{a^2} \mathcal{G}_{SII} \partial_i \partial_i \right) \dot{\psi} - \mathcal{F}_S (\partial_i \psi)^2 \right) \right], \quad (1.82)$$

где \mathcal{G}_τ , \mathcal{F}_τ , \mathcal{G}_{SI} , \mathcal{G}_{SII} , \mathcal{F}_S являются функциями G_4 и ее производных.

Мы вычислили скорость звука для гравитона, которая одинакова во всех квадратичных теориях Хорндески-Картана, и обнаружили, что условия досветовости⁵, отсутствия духов и устойчивости аналогичны стандартной теории Хорндески без кручения, как показано в Таблице 1.1. Мы также показали, что для теорий (1.81) с параметром $c \neq 0$ дисперсионное соотношение скалярной моды радикально модифицировано и не имеет аналога с обычной скалярной модой в теории Хорндески без кручения, что видно по члену, пропорциональному c в выражении (1.82). Мы проанализировали последнее на конкретном примере и наблюдали, что необычное неволнообразное дисперсионное соотношение при $c \neq 0$ не обязательно подразумевает неустойчивость. Более того, мы показали, что существуют теории Хорндески-Картана ($c < 0$), в которых и гравитон, и скалярная мода одновременно свободны от духов в пределе высоких импульсов, при условии, что гравитон также устойчив и досветовой.

Мы обнаружили, что теория с параметром $c = 0$ является единственной в семействе, в которой скалярное возмущение поля распространяется с регулярным волнообразным дисперсионным соотношением, и тем не менее, она *не обязательно* совпадает с квадратичной теорией Хорндески без кручения, потому что ее скорость звука отличается [98].

⁵Напомним, что в рамках принятых в данной работе обозначений мы определяем “досветовые и сверхсветовые возмущения” как возмущения, распространяющиеся со скоростью ниже или выше скорости света, соответственно.

Таблица 1.1: Сводная классификация тензорных и скалярных мод в зависимости от параметра c теории. *Под *физически приемлемым* гравитоном понимается устойчивый, свободный от духов и досветовой. Условия отсутствия духов для скалярной моды указаны только если они связаны с предположением о физически приемлемом гравитоне. В противном случае требуются дополнительные предположения в зависимости от G_4 .

	$c < 0$	$c = 0$	$0 < c \leq 2$	$c > 2$
Скалярная мода	Неволнообразное дисперсионное соотношение. <i>Не дух</i> (в пределе высоких импульсов) если гравитон является физически приемлемым*.	<i>Волнообразное</i> дисперсионное соотношение.	Неволнообразное дисперсионное соотношение. <i>дух</i> (в пределе высоких импульсов) если гравитон является физически приемлемым*.	Неволнообразное дисперсионное соотношение.
Гравитон	Безмассовый. Условия отсутствия духов, устойчивости и досветовости ($\mathcal{G}_\tau > 0$, $\mathcal{F}_\tau > 0$, $\frac{\mathcal{F}_\tau}{\mathcal{G}_\tau} < 1$) выполняются если $G_4 > -2X$ $G_{4,X} > 0$.			
Векторный сектор	Нединамический.			

Важно отметить, что результат в (1.82), показывающий только гравитон и единственное скалярное возмущение относительно фона FLRW, противоречит наивным ожиданиям, поскольку в действии (1.81) присутствуют члены, указывающие на кинетическое смешивание скаляра Хорндески с кручением, как мы объясняли в начале раздела 1.1.5. Например, существуют члены, где кручение связывается со вторыми ковариантными производными скаляра. Это ставит вопрос о наличии скрытых симметрий в полной теории или случайных симметрий для линейных возмущений на данном конкретном фоне, подобно другим теориям с кручением [102–104] и с неметричностью [105].

Это может означать сильную связность, проявляющуюся в разрыве количества степеней свободы между возмущенными разложениями относительно разных фоновых решений. Гамильтонов анализ мог бы прояснить этот аспект,

но учитывая сложность данных теорий, другие потенциально более простые подходы включают выполнение возмущений высших порядков, как в [104], или исследование менее симметричных фоновых решений. Однако последний подход может потребовать анализа каждого конкретного случая в зависимости от фона (см., например, [105]).

В целом, сопоставление доказательств, представленных в данной работе, с результатами, полученными с помощью указанных подходов, может быть важным для понимания, страдают ли рассматриваемые теории от сильной связи или нет, и для оценки их жизнеспособности, по крайней мере, в космологических приложениях, где фон FLRW имеет первостепенное значение.

1.2 Запрещающие теоремы в теориях Хорндески - Картана до второго порядка

В предыдущем разделе мы проанализировали семейство теорий Хорндески, возникающее после введения кручения в пространство-время. Теперь мы сосредоточимся на конкретной теории с параметром $c = 0$, которая, как упоминалось ранее (см. Таблицу 1.1), является единственной теорией Хорндески–Картана второго порядка, чья скалярная мода распространяется с обычным волновым дисперсионным соотношением.

В частности, в этом разделе мы задаемся вопросом: могут ли эти теории допускать несингулярные, устойчивые космологические решения на всех временах? Мотивацией для этого вопроса служит хорошо известная запрещающая теорема в теории Хорндески без кручения, которая утверждает, что несингулярные решения, как правило, страдают от градиентных неустойчивостей в некоторый момент всей эволюции, за исключением особых случаев [17; 20–23; 25; 26; 29; 43]. Хотя эти патологии могут возникать вне физически значимой фазы, окончательное разрешение этой проблемы на всех временах в общих моделях кажется маловероятным, поскольку аргумент запрета на устойчивость также справедлив при наличии очень общей дополнительной материи [23; 26; 29].

Частичный ответ — в рамках теорий Хорндески–Картана до второго порядка — на предыдущий вопрос отрицательный. Однако это будет иначе в случае полной теории Хорндески–Картана, то есть не ограниченной членами вида $(\nabla^2\phi)^p$ с p не более 2 — как мы покажем в разделе ниже 1.3. На данный момент мы расширяем запрещающую теорему в теории Хорндески на пространство-время с кручением в указанном выше случае. Мы показываем, что геометрия с кручением может допускать устойчивые решения только в том случае, если существует сверхсветовая фаза. Это может *формально* происходить как глубокое УФ-несоответствие в произвольный момент времени, то есть оно может быть сколь угодно кратким и не связанным с гораздо более длинными физически значимыми масштабами длины, *например*, шириной отскока. Но это ставит под сомнение УФ-пополнения, инвариантные относительно Лоренца [40; 106; 107]. В разделе 1.2.2 мы построим модель для отскока, который *всегда* устойчив.

Модель, которую мы рассматриваем в этом разделе, — это теория Хорндески–Картана до второго порядка

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(G_2 - G_3 \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}^\mu \phi + G_4 \tilde{R} + G_{4,X} \left(\left(\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}^\mu \phi \right)^2 - \left(\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \phi \right) \tilde{\nabla}^\nu \tilde{\nabla}^\mu \phi \right) \right), \quad (1.83)$$

где, как и ранее, G_2, G_3, G_4 — произвольные функции от ϕ и $X = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$, \tilde{R} и $\tilde{\nabla}$ обозначают скаляр Риччи и ковариантную производную, вычисленные с кручением (мы следуем обозначениям для кручения, введенным в разделе 1.1.1). По сравнению с предыдущим разделом мы добавили части G_2 и G_3 действия Хорндески. Член G_2 не зависит от кручения. Он включает космологическую постоянную и большую часть скалярного потенциала. Он также известен как к-эссенция. Член G_3 — простейший, который “чувствует” кручение в пространстве-времени.

Для части G_4 в (1.83) обратим внимание на конкретный порядок свертки лоренцевых индексов в последнем члене $\left(\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \phi \right) \tilde{\nabla}^\nu \tilde{\nabla}^\mu \phi$. Это соответствует теории с кручением при $c = 0$. Как показано в предыдущем разделе, другой порядок свертки $\left(\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \phi \right) \tilde{\nabla}^\mu \tilde{\nabla}^\nu \phi$ привел бы к другому дисперсионному соотношению для скалярной моды. Различие возникает из-за того, что вторые ковариантные производные с кручением не коммутируют на скаляре. Выбор $c = 0$ важен для вопроса о том, как другая геометрия может способствовать устойчивости обычных степеней свободы Хорндески.

Снова мы анализируем устойчивость фона FLRW относительно линейных возмущений (мы следуем обозначениям для возмущений, введенным в разделе 1.1.2). По сравнению с предыдущим разделом добавление членов G_2 и G_3 немного изменяет выражения, но не меняет выводы. Действительно, как и в предыдущем разделе, все независимые компоненты кручения в (1.83) не являются динамическими. Вкратце: 4 фоновых поля ϕ, a, x, y подчиняются 5 уравнениям, из которых только 4 независимы (из-за калибровочной избыточности), что в обозначениях предыдущего раздела дает $\mathcal{E}_0 K_{ijk} = -2 \epsilon_{ijk} G_4 \frac{y}{a^6} = 0$, таким образом устанавливая $y(\eta) \equiv 0$, а $\mathcal{E}_0 K_{0ij} = 0$ решает $x(\eta)$ через a, ϕ

$$x(\eta) = -\frac{a^3 \mathcal{G}_\tau (8 H X G_{4,X} + a \dot{\phi} (G_3 - 2 G_{4,\phi}))}{8 G_4^2}. \quad (1.84)$$

Таким образом, фон кручения полностью определяется обычными начальными условиями для фонового скалярного поля ϕ и масштабного фактора.

Квадратичное действие для трех тензорных возмущений h_{ij} , $T_{ij}^{(1)}$, $T_{ij}^{(2)}$ получается, как в предыдущем разделе, и оно подразумевает $T_{ij}^{(2)} \equiv 0$ и

$$T_{ij}^{(1)} = \frac{2a^2 X G_{4,X}}{G_4 + 2X G_{4,X}} \dot{h}_{ij} - 2x h_{ij}. \quad (1.85)$$

Использование этих уравнений обратно в квадратичном действии дает окончательное квадратичное действие для гравитона Ур. (1.87).

Аналогично, часть квадратичного действия, относящаяся к тринадцати скалярным возмущениям Π , α , B , ψ , E , $C^{(n)}$ (с $n = 1, \dots, 8$), записывается как (1.88) после исключения (с помощью уравнений связей) всех восьми нединамических возмущений кручения $C^{(n)}$. Это проще в унитарной калибровке, где $\Pi = 0$ и $E = 0$, потому что можно распознать (см. предыдущий раздел для случая $c = 0$), что есть пять множителей Лагранжа $C^{(1)}$, $C^{(5)}$, $C^{(7)}$, $C^{(2)}$, B . Уравнения ограничений, накладываемые первыми тремя множителями Лагранжа, подразумевают обращение в нуль $C^{(6)}$, $C^{(4)}$, $C^{(8)}$ соответственно, а с уравнением для $C^{(2)}$ можно выразить единственное нетривиальное скалярное кручение как

$$C^{(3)} = -\frac{2a^2 X G_{4,X}}{G_4 + 2X G_{4,X}} \dot{\psi} + 2x \psi - \frac{a^3 (2G_4 H + \Theta) + a^2 \dot{\phi} G_{4,\phi}}{2G_4} \alpha. \quad (1.86)$$

где, Θ определяется уравнением (1.90).

Окончательный вид квадратичного действия

Важный аспект заключается в том, что мы можем привести квадратичное действие теорий Хорндески-Картана до второго порядка к виду, напоминающему обычную теорию Хорндески без кручения [10]. А именно, из (1.83)

$$\mathcal{S}_\tau = \int d\eta d^3x a^4 \left[\frac{1}{2a^2} \left(\mathcal{G}_\tau (\dot{h}_{ij})^2 - \mathcal{F}_\tau (\partial_k h_{ij})^2 \right) \right] \quad (1.87)$$

является действием для гравитона h_{ij} со скоростью $c_g^2 = \mathcal{F}_\tau / \mathcal{G}_\tau$. Векторный сектор не является динамическим. Скалярный сектор в унитарной калибровке

имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_s = \int d\eta d^3x a^4 & \left(-3 \frac{\mathcal{G}_\tau}{a^2} \dot{\psi}^2 + \frac{\mathcal{F}_\tau}{a^2} (\partial_i \psi)^2 + 6 \frac{\Theta}{a} \alpha \dot{\psi} \right. \\ & \left. + 2 \frac{T}{a^2} \partial_i \alpha \partial_i \psi + 2 \frac{\partial_i \partial_i B}{a^2} \left(a \Theta \alpha - \mathcal{G}_\tau \dot{\psi} \right) + \Sigma \alpha^2 \right), \end{aligned} \quad (1.88)$$

где ψ , α и B – скалярные возмущения, а

$$\mathcal{G}_\tau = 2 \frac{G_4^2}{G_4 + 2X G_{4,X}}, \quad \mathcal{F}_\tau = 2 G_4, \quad T = \mathcal{F}_\tau (c_g^2 - 2), \quad (1.89)$$

$$\Theta = \frac{4\mathcal{G}_\tau^2 \theta}{a \mathcal{F}_\tau^4}, \quad \Sigma = \frac{2\mathcal{G}_\tau^3 \sigma}{a \mathcal{F}_\tau^6}, \quad (1.90)$$

$$\begin{aligned} \theta = & -2a G_4 H(G_4^2 + 4(2G_{4,X}^2 - G_{4,XX} G_4) X^2) \\ & - (G_{4,\phi}(G_4^2 + 4G_{4,X}^2 X^2 - 2G_4 X(G_{4,X} + 2G_{4,XX} X)) \\ & + G_4 X(-(G_{3,X} - 2G_{4,\phi X})(G_4 + 2G_{4,X} X) \\ & + G_3(3G_{4,X} + 2G_{4,XX} X))) \dot{\phi}, \end{aligned} \quad (1.91)$$

и σ (показано в Приложении В) зависит от двух фоновых полей: масштабного фактора метрики FLRW $a(\eta)$ и скаляра Хорндески, который в контексте линейных выражений мы также обозначаем как $\phi(\eta)$ и $X = \frac{\dot{\phi}^2}{2a^2}$.

Отметим, что, несмотря на сходство между квадратичными действиями в теории Хорндески с кручением и без него, есть ключевое различие в (1.88), которое способствует устойчивости теории с кручением: а именно, $\mathcal{G}_\tau \neq T$. Это различие возникает из-за уравнений ограничений, накладываемых возмущениями кручения.

Наконец, приведем (1.88) к более полезному виду, используя уравнение для множителя Лагранжа B ($\alpha = \frac{1}{a} \frac{\mathcal{G}_\tau}{\Theta} \dot{\psi}$) в \mathcal{S}_s . Таким образом, мы получаем единственную скалярную моду

$$\mathcal{S}_s = \int d\eta d^3x a^4 \left(\frac{1}{a^2} \mathcal{G}_S \dot{\psi}^2 - \frac{1}{a^2} \mathcal{F}_S (\partial_i \psi)^2 \right), \quad (1.92)$$

где

$$\mathcal{G}_S = 3\mathcal{G}_\tau + \frac{\mathcal{G}_\tau^2 \Sigma}{\Theta^2}, \quad \mathcal{F}_S = \frac{1}{a^2} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{a \mathcal{G}_\tau T}{\Theta} \right) - \mathcal{F}_\tau. \quad (1.93)$$

1.2.1 Запрещающая теорема

Для теории Хорндески до второго порядка в пространстве-времени с кручением (1.83) следующие предположения для решений в первом порядке возмущений относительно FLRW взаимно несовместимы

- I) Несингулярная космология: то есть существует нижняя граница для масштабного фактора $a(\eta) > b_1 > 0$.
- II) Гравитон и скалярная мода не являются духами и не имеют градиентных неустойчивостей:
 $\mathcal{G}_\tau > 0, \mathcal{F}_\tau > 0, \mathcal{F}_S > 0, \mathcal{G}_S > 0$.
- III) Гравитон всегда до/световой: $(c_g)^2 \leq 1$
- IV) Существует нижняя граница $\mathcal{F}_\tau(\eta) > b_2 > 0$ при $\eta \rightarrow \pm\infty$ (Нет “сильной гравитации” в линейном порядке [22; 44]).
- V) Θ обращается в нуль не более чем в конечном числе моментов времени (Чтобы охватить общие теории, не определяемые уравнением $\Theta \equiv 0$ [43]).

Доказательство: мы следуем аналогичному рассуждению, как в [20] в отношении червоточин, или как первоначально доказано для подкласса теории Хорндески без кручения в [21], а затем расширено на полное действие Хорндески в [22].

Ключевым является замечание, что (I–III) подразумевают

$$N =: \frac{a \mathcal{G}_\tau \mathcal{F}_\tau (c_g^2 - 2)}{\Theta} \neq 0, \quad (1.94)$$

потому что по (I–II) Θ является регулярной (конечной) функцией от H, ϕ .

Проинтегрируем третье неравенство в (II). Используя (1.93)

$$\begin{aligned} \Delta N &= N_f - N_i > I(\eta_i, \eta_f), \\ I(\eta_i, \eta_f) &= \int_{\eta_i}^{\eta_f} d\eta a^2 \mathcal{F}_\tau, \end{aligned} \quad (1.95)$$

где N_f и N_i — значения N в некоторые (конформные) моменты времени η_f и η_i соответственно. Теперь, по (I), (II) и (IV)

A) $\frac{dN}{d\eta} > a^2 \mathcal{F}_\tau > b_1^2 b_2 > 0,$

- определяя $I(\eta_i) := I(\eta_i, \eta_f)|_{\eta_f}$ и $I(\eta_f) := I(\eta_i, \eta_f)|_{\eta_i}$, мы замечаем, что это *положительные и возрастающие* функции от η_i и η_f , для фиксированных η_f и η_i соответственно. $I(\eta_i)$ и $I(\eta_f)$ дифференцируемы и, следовательно, непрерывны, потому что $a^2 \mathcal{F}_\tau$ непрерывна,
- N монотонно возрастает и, следовательно, обозначая через η_z любой нуль Θ , тогда $N(\eta) \rightarrow \infty$ при $\eta \rightarrow \eta_z^-$ (η приближается к η_z слева) и $N(\eta) \rightarrow -\infty$ при $\eta \rightarrow \eta_z^+$,

B) $\Delta N > 0,$

C) $I(\eta_i)$ и $I(\eta_f)$ не сходятся при $\eta_i \rightarrow -\infty, \eta_f \rightarrow \infty$, соответственно.

Теперь, по (V) N почти всюду конечен, поэтому возьмем фиксированное значение $-\infty < N_i < 0$ в некоторый фиксированный момент времени η_i . По (1.94) следует $N_f(\eta_f) < 0$ (Без потери общности мы можем безопасно предположить, что нет η_z (нуля Θ) такого, что $\eta_i < \eta_z < \eta_f$ ⁶). Тогда ΔN также ограничено сверху как $|N_i| > \Delta N = |N_i| - |N_f| > 0$. Теперь, по A), C) $I(\eta_f)$ не только растет с η_f , но и не ограничено сверху, тогда существует достаточно поздний в эволюции критический момент η_c такой, что если $\eta_f > \eta_c$, $I(\eta_f) > |N_i| > \Delta N$ для каждого фиксированного значения N_i . Это нарушает (1.95), и поэтому мы должны иметь $N(\eta) > 0$. Однако, по аналогичному аргументу, фиксируя значение $\infty > N_f > 0$ в некоторый η_f , необходимо $N_i(\eta_i) > 0$ ⁷, тогда $N_f > \Delta N = N_f - N_i > 0$, и по A), C) $I(\eta_i)$ не ограничено сверху и существует η_c достаточно ранний, такой что если $\eta_i < \eta_c$, $I(\eta_i) > N_f > \Delta N$. Таким образом, в конечном итоге в эволюции (1.95) не выполняется.

⁶ Действительно, если Θ имеет один нуль η_z такой, что $\eta_i < \eta_z < \eta_f$, то по (A) N должно быть **положительным** сколь угодно близко **слева от** η_z . Но наше фиксированное значение $N_i(\eta_i) < 0$ означает, что $N(\eta)$ уже должно было обратиться в нуль в некоторый момент η , с $\eta_i < \eta < \eta_z < \eta_f$ (потому что $N(\eta)$ непрерывно для $\eta_i < \eta < \eta_z$), **таким образом уже нарушая** (1.94). Это явно распространяется на любое количество нулей. Таким образом, при условии нашей начальной точки $-\infty < N_i(\eta_i) < 0$, мы можем исключить случай любого η_z в интервале времени (η_i, η_f) .

⁷ По аналогичному аргументу, как в ⁶, при условии нашей начальной точки $\infty > N_f > 0$ мы можем исключить без потери общности любой η_z в интервале времени (η_i, η_f) .

Фактически, (III) можно ослабить до $c_g^2 < 2$, и аргумент все еще будет справедлив. Но гравитон, почти всюду досветовой, переходящий к $c_g^2 \geq 2$ в течение произвольно короткого интервала, достаточен, чтобы избежать этого аргумента запрета, как мы показываем ниже. Очевидно, минимальный пример требует $G_{4,X} \neq 0$.

1.2.2 Пример: везде устойчивый космологический отскок в теории Хорндески с кручением

Запрещающая теорема в теории Хорндески-Картана до второго порядка, доказанная в предыдущем разделе, отличается от аналогичной теоремы в теории Хорндески без кручения. Ключевое различие заключается в том, что в последней — без кручения — теорема справедлива независимо от скорости гравитона. Таким образом, при наличии кручения появляется больше гибкости для построения везде устойчивых несингулярных решений, таких как отскок.

Достаточным предположением для обхода запрещающей теоремы и получения везде устойчивых решений является, например, период *ненулевой* ширины сверхсветового движения гравитона в некоторый момент эволюции и по крайней мере на величину $c_g \geq \sqrt{2}c$ ($c = 1$ в наших единицах). Таким образом, в принципе, ширина τ_s возможно нефизической сверхсветовой фазы, центрированной в момент времени η_s , может быть *сколь угодно малой* и не связанной с шириной τ_b и временем возникновения физически значимой фазы отскока, центрированной в момент времени η_b .

В качестве доказательства принципа покажем в этом разделе на примере модели, что можно достичь устойчивости фона FLRW отскока относительно возмущений первого порядка, даже когда нет связи между временными масштабами, связанными со сверхсветовой фазой, необходимой для обхода запрещающей теоремы, и фазой отскока. Мы предполагаем, что η_s, η_b конечны и без потери общности $\eta_s < \eta_b = 0$. Кроме того, мы требуем, чтобы наше решение в асимптотическом прошлом и будущем сводилось к решению, которое можно также получить из обычной гравитации Эйнштейна с *световым* гравитоном, минимально связанным с безмассовым скаляром, и чтобы фон кручения асимптотически исчезал. Более точно, мы рассматриваем, что $a(\eta)$ положителен и ограничен

снизу, отскок происходит в минимуме $a(\eta_b)$, и для указанных асимптотик требуем, чтобы ведущие члены функций Лагранжа в (1.83) и фона кручения вели себя следующим образом при $\eta \rightarrow \pm\infty$:

$$G_2(\phi, X) \rightarrow \frac{1}{2a^2} \dot{\xi}^2, \quad G_4(\phi, X) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad (1.96)$$

$$G_3(\phi, X) \rightarrow 0, \quad x(\eta) \rightarrow 0.$$

где ξ — некоторая обратимая функция скаляра Хорндески ϕ , и мы выбираем $M_{pl}^2/8\pi = 1$.

1.2.2.1 Построение модели

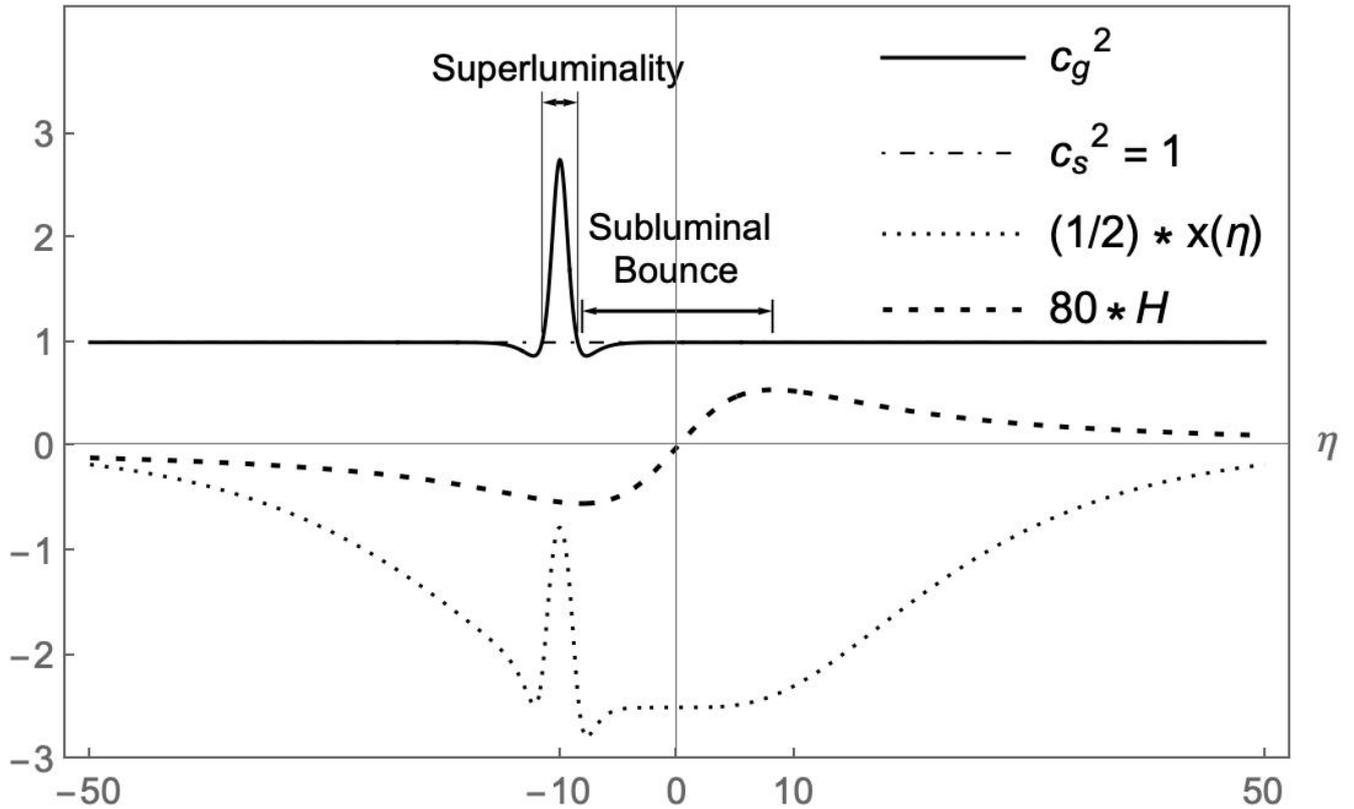


Рис. 1.3: Параметр Хаббла для отскока в $\eta_b = 0$ с $\tau_b = 10$. Скорость звука для скалярной моды c_s^2 . Скорость гравитона c_g^2 с короткой сверхсветовой фазой ($\tau_s \ll \tau_b$), происходящей в $\eta_s = -10$ до отскока (для удобства отображения графиков здесь выбрано $\tau_b = 10 \tau_s$). Гравитон быстро становится досветовым около η_s и приближается к световой скорости снизу в прошлом, а также во время фазы отскока и в будущем. Фон кручения $x(\eta)$ экспоненциально затухает в асимптотическом прошлом и будущем.

Процедура: Следующий анзац для функций Лагранжа обладает достаточной структурой, чтобы мы могли удовлетворить асимптотическим условиям (1.96), а также требованию устойчивости *на всех временах* (II), одновременно решая все уравнения движения:

$$G_2(\phi, X) = g_{20}(\phi) + g_{21}(\phi) X + g_{22}(\phi) X^2, \quad (1.97)$$

$$G_3(\phi, X) = g_{30}(\phi) + g_{31}(\phi) X, \quad (1.98)$$

$$G_4(\phi, X) = \frac{1}{2} + g_{40}(\phi) + g_{41}(\phi) X. \quad (1.99)$$

Мы восстанавливаем 7 неизвестных функций Лагранжа в (1.97)-(1.99), а именно g_{20} , g_{21} , g_{22} , g_{30} , g_{31} , g_{40} и g_{41} , сначала задавая некоторые решения, удовлетворяющие нашим требованиям для $a(\eta)$ и асимптотик (1.96), а затем работая в обратном направлении, чтобы найти функции Лагранжа, динамика которых соответствует последним. Мы действуем следующим образом: без потери общности выбираем модель с решением для параметра Хаббла, показанного на Рис. 1.3, и фонового скалярного поля Хорндески:

$$a = (\tau_b^2 + \eta^2)^{\frac{1}{4}}, \quad H = \frac{\dot{a}}{a^2} = \frac{\eta}{2(\tau_b^2 + \eta^2)^{\frac{5}{4}}}, \quad \phi = \eta, \quad (1.100)$$

таким образом, что наше определение отскока удовлетворяется. $\tau_b > 0$ фиксирует максимум H и ширину фазы отскока как длину области, где $\dot{H}(\eta) > 0$ около η_b . При таком решении $X = 1/(2(\tau_b^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}})$. Теперь решаем неизвестные функции Лагранжа в (1.97)-(1.99):

Решение для g_{40} и g_{41} при условии $\mathcal{G}_\tau > 0$, $\mathcal{F}_\tau > 0$ на все времена, T обращается в ноль хотя бы один раз в некоторый критический момент и асимптотики G_4 (1.96): \mathcal{G}_τ , \mathcal{F}_τ и критическая функция T (1.89) зависят только от G_4 . Следовательно, мы можем решить для g_{40} и g_{41} из двух алгебраических уравнений по этим переменным:

$$\mathcal{F}_\tau(g_{40}, g_{41}) = 1, \quad (1.101)$$

$$T(g_{40}, g_{41}) = -1 - \frac{5}{4} \text{Sech} \left(\frac{\eta - \eta_s}{\tau_s} \right) + 3 \text{Sech} \left(\frac{\eta - \eta_s}{\tau_s} \right)^2 \quad (1.102)$$

Уравнение (1.101) — это простой *выбор* для реализации желаемых асимптотик G_4 (1.96) и очевидного удовлетворения $\mathcal{F}_\tau > 0$. Уравнение (1.102) — это явный

выбор для нарушения предположения о досветовом гравитоне хотя бы в течение короткого времени $\tau_s \ll \tau_b$, что позволяет обойти запрещающую теорему, как показано на Рис. 1.4. Решения для g_{40} и g_{41} из системы уравнений (1.101), (1.102) прямолинейны и везде несингулярны. Их графики показаны на Рис. 1.7. Можно легко проверить, что эти решения также подразумевают $\mathcal{G}_\tau > 0$. Они могут быть записаны в ведущем порядке при $\eta \rightarrow \pm\infty$ в виде:

$$g_{40} = -g_{41} X = \frac{5}{8} e^{\mp \frac{(\eta - \eta_s)}{\tau_s}}. \quad (1.103)$$

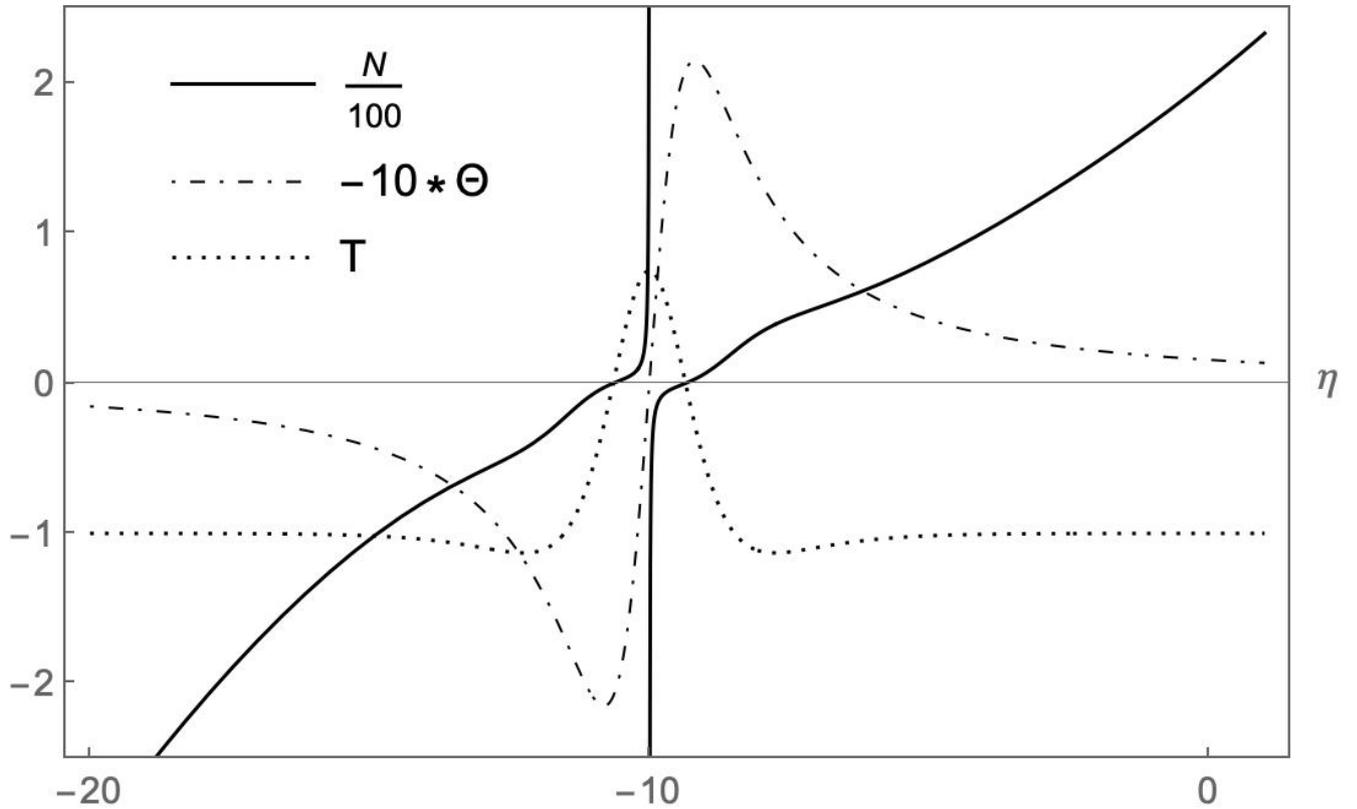


Рис. 1.4: Обход запрещающей теоремы: этот выбор для T (1.102) не удовлетворяет условию отрицательности на все времена, что критически означает, что гравитон является сверхсветовым в течение короткого этапа эволюции, около $\eta_s = -10$, как показано на Рис. 1.3, и что функция N в уравнении (1.94) обращается в ноль. Следовательно, запрещающая теорема не выполняется, и мы можем построить везде устойчивые решения. ($\tau_b = 10$, $\tau_s = 1$, $\eta_b = 0$, $\eta_s = -10$)

Решение для g_{30} и g_{31} при условии $\mathcal{F}_S > 0$, отсутствие кручения и асимптотики G_3 (1.96): \mathcal{F}_S и фон кручения (x) зависят от G_4 , который теперь полностью фиксирован, и от G_3 . Следовательно, мы можем решить

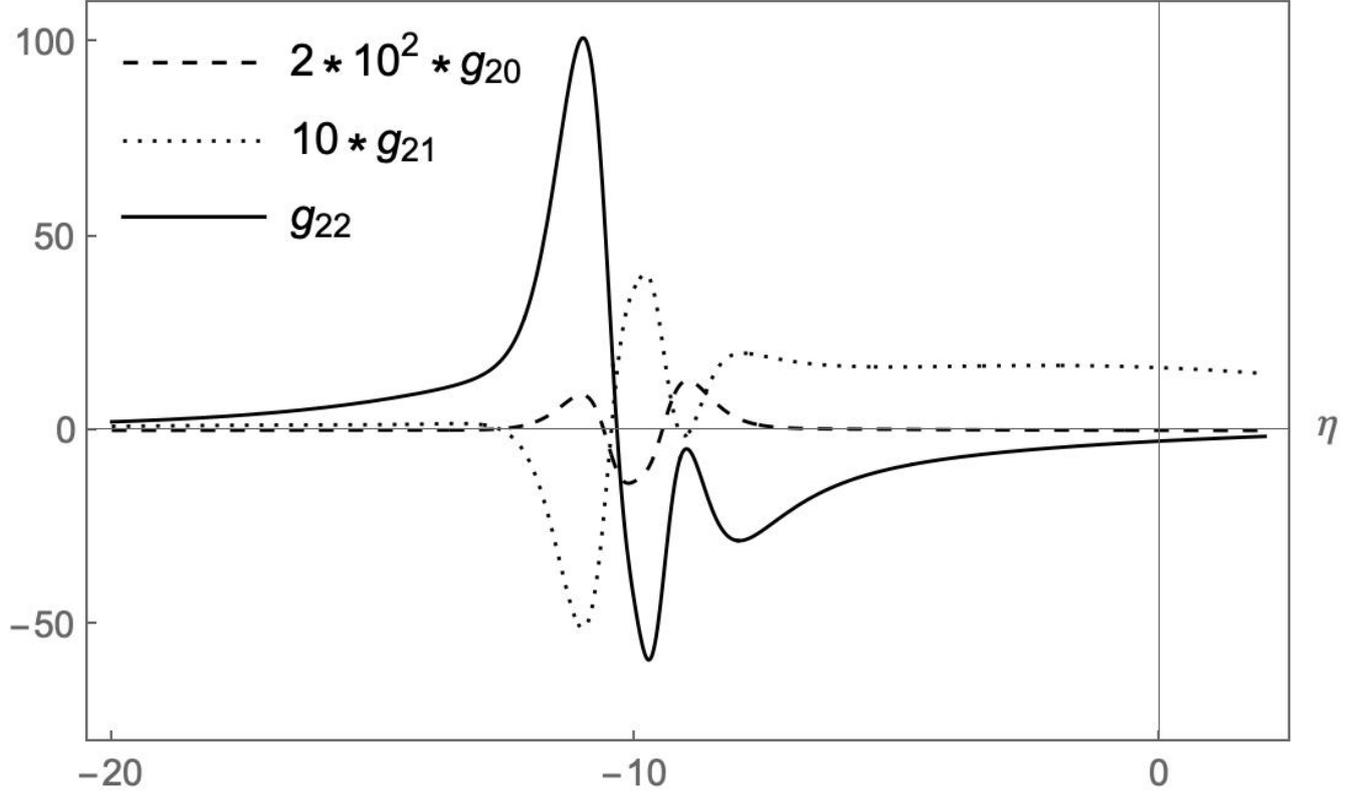


Рис. 1.5: Везде регулярные функции Лагранжа g_{20} , g_{21} и g_{22} .

только для g_{30} и g_{31} из двух уравнений, которые являются алгебраическими относительно этих функций:

$$G_3(g_{30}, g_{31}) = \text{Sech}\left(\frac{\eta}{\tau_b}\right), \quad \Theta(g_{30}, g_{31}) = -H_s, \quad (1.104)$$

где

$$H_s = \frac{\eta - \eta_s S}{2(\tau_b^2(1-S) + \tau_s^2 S + (\eta - \eta_s S)^2)^{\frac{5}{4}}}, \quad (1.105)$$

и S — ступенчатая функция, которую мы уточним ниже.

Выбор G_3 , центрированный в точке отскока $\eta_b = 0$ (1.104), экспоненциально быстро затухает в асимптотическом прошлом и будущем, что удовлетворяет (1.96). С другой стороны, мы выбираем уравнение для Θ , потому что это единственная свободная функция в \mathcal{F}_S . Она должна удовлетворять двум оставшимся условиям: (i) она должна соответствовать требуемым асимптотикам (1.96) и (ii) она должна обеспечивать $\mathcal{F}_S > 0$ везде. Для (i) тщательное изучение Θ в терминах анзаца (1.97)-(1.99) показывает, что для восстановления стандартного

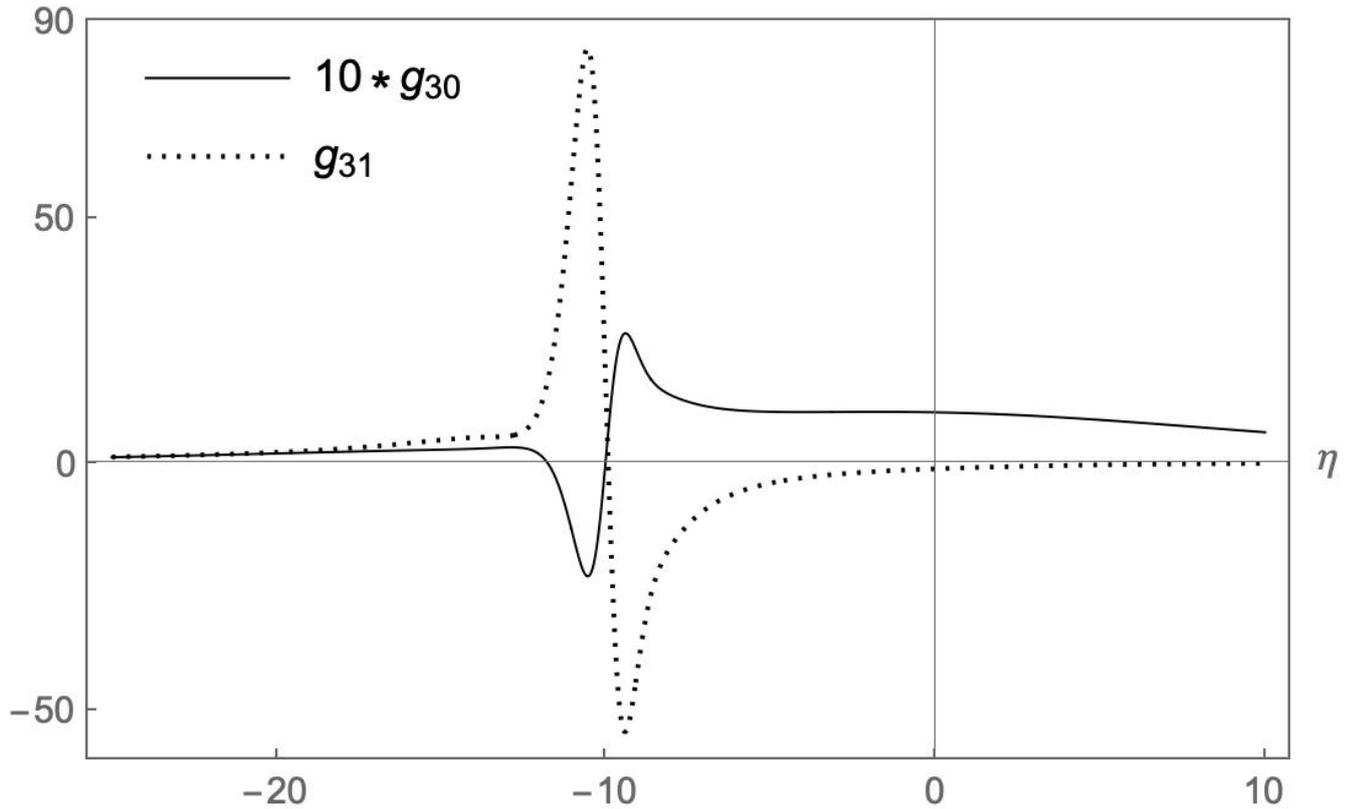


Рис. 1.6: Везде регулярные функции Лагранжа. g_{30} и g_{31} .

скаляра, минимально связанного с гравитацией Эйнштейна (1.96), необходимо, чтобы $\Theta \xrightarrow{\eta \rightarrow \pm\infty} -H$ ⁸. Следовательно, в уравнении (1.104) *первое требование* к ступенчатой функции S заключается в том, что она должна подавлять факторы τ_s и η_s в H_s достаточно быстро, чтобы в асимптотическом прошлом и будущем мы восстановили асимптотики нашего параметра Хаббла (1.100) с *необходимой точностью* по η ⁹. С другой стороны, (ii) может быть легко удовлетворено с помощью ступени S , которая почти равна 1 в области конечной длины $(\eta_s - \delta, \eta_b + \delta)$, где $\infty > \delta > 0$, для достаточно большого δ , зависящего

⁸Аналогично случаю без кручения, этот выбор вводит известную устранимую сингулярность в унитарной калибровке, известную как γ -пересечение, которая может быть признана безвредной для регулярности возмущений, как в [108].

⁹В частности, нетривиальным фактом является то, что необходимо выбрать ступенчатую функцию S так, чтобы предел $\Theta = -H_s \rightarrow -H$ при $\eta \rightarrow \pm\infty$ выполнялся **более** чем в ведущем порядке по η , чтобы удовлетворить требуемые асимптотики функций Лагранжа (1.96) **только** в ведущем порядке.

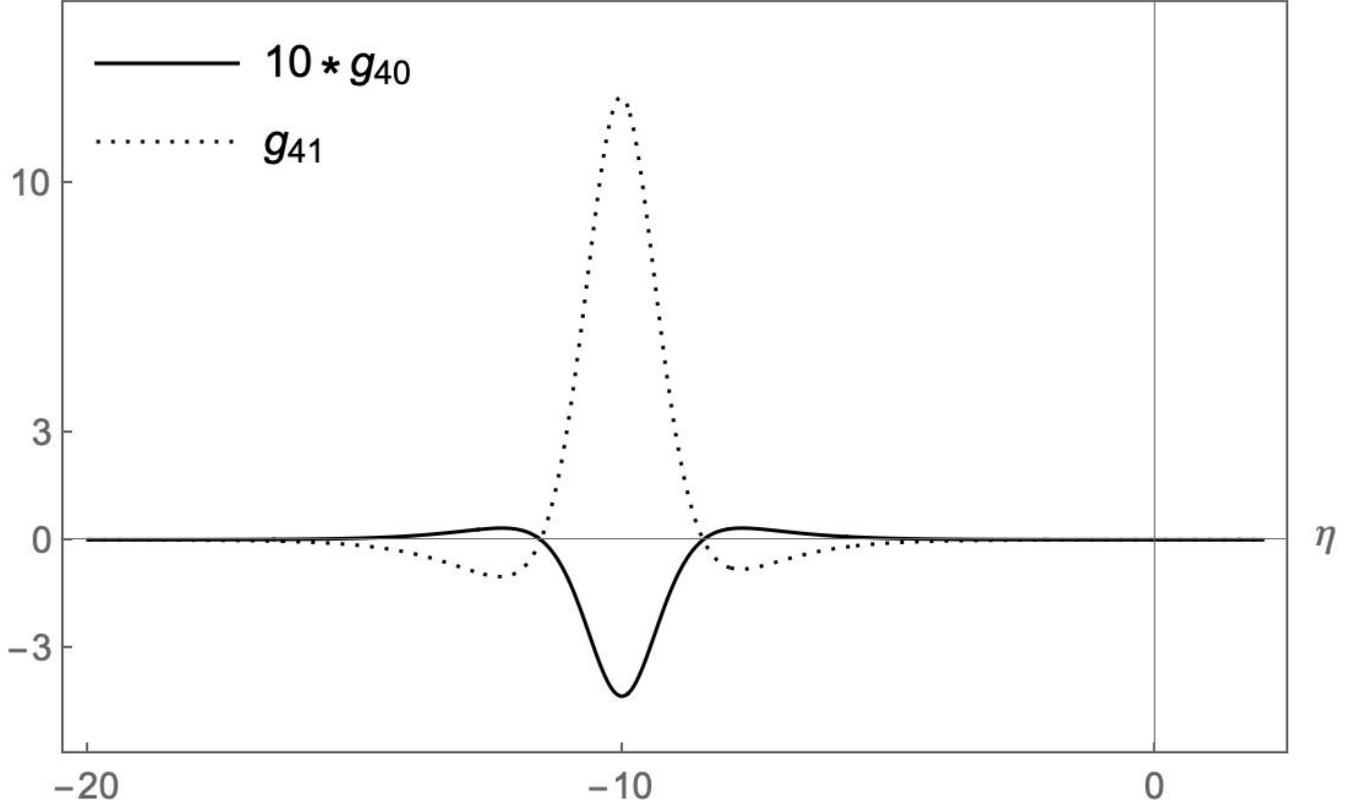


Рис. 1.7: Везде регулярные функции Лагранжа g_{40} и g_{41} .

от параметров τ_b , τ_s , η_b , η_s . В качестве доказательства принципа мы выбираем:

$$S = \text{Sech} \left(\frac{\tau_s (\eta - \eta_s)}{\tau_b \eta_s} \right), \quad (1.106)$$

которая удовлетворяет (i) и $\mathcal{F}_S > 0$ везде. Достаточно сказать для этой модели, что этот выбор удовлетворяет требованиям, как показано на Рис. 1.4, например, для параметров отскока $\eta_b = 0$, $\tau_b = 10$ и более ранней и более короткой сверхсветовой фазы $\eta_s = -10$, $\tau_s = \tau_b/10$.

Решения для g_{30} и g_{31} , полученные из (1.104), везде регулярны, и их графики показаны на Рис. 1.6. Они могут быть записаны в ведущем порядке при $\eta \rightarrow \pm\infty$ в виде:

$$g_{30} = -g_{31} X = \frac{3}{2} \frac{\eta_s}{\eta^2} e^{\mp \frac{\tau_s (\eta - \eta_s)}{\tau_b |\eta_s|}}, \quad (1.107)$$

где мы использовали $\eta_s < 0$, а фон кручения может быть записан в ведущем порядке при $\eta \rightarrow \pm\infty$ как:

$$x = \mp \eta e^{\mp \frac{\eta}{\tau_b}}. \quad (1.108)$$

Решение для g_{20} , g_{21} и g_{22} при условии $\mathcal{G}_s > 0$, всегда досветовой скаляр и уравнения Эйлера-Лагранжа для фоновых полей: \mathcal{G}_s и уравнения Эйлера-Лагранжа для фоновых полей $\mathcal{E}_{g_{00}} = 0$, $\mathcal{E}_{g_{ij}} = 0$ зависят от G_3 , G_4 , которые полностью фиксированы, и от G_2 . Следовательно, мы можем решить для функций Лагранжа $g_{20}(\phi)$, $g_{21}(\phi)$ и $g_{22}(\phi)$ из следующей системы трех уравнений, которая, опять же, является алгебраической и линейной относительно этих функций:

$$\mathcal{G}_S = \mathcal{F}_S, \quad \mathcal{E}_{g_{00}} = 0, \quad \mathcal{E}_{g_{11}} = \mathcal{E}_{g_{22}} = \mathcal{E}_{g_{33}} = 0. \quad (1.109)$$

Поскольку функции Лагранжа $g_{30}(\phi)$ и $g_{31}(\phi)$ таковы, что $\mathcal{F}_S > 0$, выбор уравнения (1.109) — это одна из возможностей для одновременного удовлетворения условия отсутствия духов $\mathcal{G}_S > 0$ и условия световости для скалярной моды $c_s^2 = \mathcal{F}_S/\mathcal{G}_S = 1$. Мы выбираем световость исключительно для простоты, хотя выбор досветовости безопаснее и лучше подходит во многих других случаях. Уникальные решения для $g_{20}(\phi)$, $g_{21}(\phi)$ и $g_{22}(\phi)$, полученные из (1.109), несингулярны везде, и их графики показаны на Рис. 1.5. Они могут быть записаны в ведущем порядке при $\eta \rightarrow \pm\infty$ как:

$$g_{20} = -\frac{\tau_b^2}{2} (\pm\eta)^{-5}, \quad g_{21} X = \frac{3}{4} (\pm\eta)^{-3}, \quad (1.110)$$

$$g_{22} X^2 = \mp \frac{3}{4} (\pm\eta)^{-3} \frac{\tau_s}{\tau_b} e^{\mp \frac{\tau_s}{\tau_b} \frac{(\eta-\eta_s)}{|\eta_s|}}. \quad (1.111)$$

Отметим, что поскольку G_2 , G_3 , G_4 таковы, что уравнения Эйлера-Лагранжа (1.109) и их производные удовлетворяются, то решение отскока (1.100) является правильным для модели с только что решенными функциями Лагранжа. Более того, оставшееся уравнение Эйлера-Лагранжа для фонового скаляра ($\mathcal{E}_\phi = 0$) следует из остальных благодаря калибровочной инвариантности, что легко проверить, что подтверждает, что решение $\phi = \eta$ в (1.100) также является правильным для модели с только что построенными функциями Лагранжа.

1.2.3 Асимптотический лагранжиан: восстановление ОТО

Ведущие порядковые выражения функций Лагранжа при $\eta \rightarrow \pm\infty$ (1.103), (1.107), (1.110), (1.111) в анзаце (1.97)-(1.99) показывают, что в ведущем порядке

единственными ненулевыми функциями Лагранжа являются $G_4 = \frac{1}{2}$ и G_2 . Следовательно, с решением $\phi = \eta$ и ведущим порядковым выражением $X = 1/(2\eta)$, учитывая только ведущие вклады в G_2 , а именно $g_{21} X$, мы можем идентифицировать в ведущем порядке соответствующее действие (1.83) в асимптотическом прошлом и будущем:

$$S^\infty = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (R - \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi) \quad (1.112)$$

для безмассового скалярного поля $\xi = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln(\phi)$, минимально связанного с гравитацией Эйнштейна и с исчезающим фоном кручения (1.108). Действительно, можно проверить, что полевые уравнения и уравнения Фридмана, полученные из (1.112), удовлетворяются ведущими порядковыми вкладками при $\eta \rightarrow \pm\infty$ решений, с которых мы начали в (1.100): а именно, $a = \eta^{\frac{1}{2}}$, $H = \frac{1}{2}\eta^{-\frac{3}{2}}$, $\phi = \eta$, $\xi = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln(\eta)$ решают:

$$\ddot{\xi} + 2aH\dot{\xi} = 0, \quad \dot{\xi}^2 - 6a^2H^2 = 0. \quad (1.113)$$

1.2.4 Итоги по запрещающей теореме

Мы расширили запрещающую теорему из [21; 22] на теорию Хорндески-Картана до второго порядка, Ур. (1.83). Мы показали, что в этих общих моделях с кручением невозможно получить несингулярную космологию FLRW, которая всегда свободна от градиентных неустойчивостей относительно скалярных возмущений и имеет вечно досветовой гравитон.

Мы также проиллюстрировали на явном примере в разделе 1.2.2, что в отличие от теории без кручения, где неустойчивости возникают с необходимостью в некоторый момент всей эволюции [21; 22], пространство-время с кручением может допускать *линейно* устойчивые несингулярные решения в теории Хорндески на все времена, если существует в произвольный момент сверхсветовая фаза для гравитона по крайней мере на величину $c_g \geq \sqrt{2}c$. Мы явно показали, что эта нефизическая фаза может формально возникать как глубокое УФ-несоответствие, то есть быть сколь угодно короткой и не связанной с физически значимыми масштабами длины, относящимися к этим моделям, такими как время и гораздо большая ширина отскока. Кроме того, эта патология в

классических решениях может все же быть информативной, поднимая вопрос о возможности лоренц-инвариантных УФ-завершений [106; 107] и о возникновении причинных парадоксов [8; 17; 40; 84; 109; 110]. В целом, пример показал отскакивающую космологию, которая всегда устойчива, где короткая сверхсветовая фаза происходит перед отскоком и которая переходит в гравитацию Эйнштейна, связанную с безмассовым скаляром и с исчезающим кручением в асимптотическом прошлом и будущем.

По крайней мере, в том, что касается устойчивости и скорости решений, это показывает, что теория Хорндески-Картана фундаментально отличается от теории Хорндески на геометрии без кручения, в отличие от, *например*, эквивалентности Эйнштейна-Картана и общей теории относительности [99].

1.3 Космологические модели, свободные от патологий, в теории Хорндески–Картана

В этом разделе мы расширяем представленные выше исследования. Теперь мы рассматриваем полную теорию Хорндески с кручением. А именно, в отличие от предыдущих разделов, мы не ограничиваем анализ только теорией до второго порядка — ранее определенной как содержащую члены до $(\nabla^2\phi)^2$ в действии — но теперь мы также рассматриваем члены действия до $(\nabla^2\phi)^3$ — известные как \mathcal{L}_5 . Это представляет полное действие Хорндески. Ниже показано, что для этой полной теории Хорндески–Картана запрещающие теоремы о “свободных от патологий” космологических решениях не могут выполняться.

Здесь мы принимаем следующее определение “свободного от патологий” решения: 1) несингулярное, 2) устойчивые фоновые поля против 3) “до/ световых” возмущений первого порядка. Для краткости, в данной работе мы также определяем термин “световые возмущения” как возмущения, распространяющиеся со скоростью света. Аналогично, мы определяем “досветовые и сверхсветовые возмущения” как возмущения, распространяющиеся со скоростью ниже или выше скорости света, соответственно.

Таким образом, мы завершаем эту часть работы, показывая, что обнуление кручения в обычной теории Хорндески лишь упрощает задачу, но за счет “искусственного” включения глобальных проблем устойчивости. В итоге, полная теория Хорндески–Картана с \mathcal{L}_5 может быть альтернативой для построения “свободных от патологий” космологических решений.

В этом разделе мы сначала аргументируем, что глобальные проблемы устойчивости в *более простых формах* теории Хорндески — включая теорию без кручения [21; 22] и “теорию до второго порядка с кручением” из предыдущего раздела — могут рассматриваться как *случайные следствия предположений*: а именно, в привычной теории Хорндески без кручения многие коэффициенты квадратичного действия для гравитона жёстко связаны с коэффициентами квадратичного действия для скалярной моды, и это не более чем следствие принятия *ad-hoc* упрощений. Эта связь между коэффициентами приводит к известным противоречивым требованиям для физически приемлемого гравитона

и скалярной моды (запрещающие теоремы). Простое практическое решение — отказ от предположений: включение кручения модифицирует действие для гравитона и скалярной моды во всё более *расходящиеся* стороны по мере учета большего числа членов полного действия Хорндески. Эти модификации происходят от нетривиальных тензорных и скалярных возмущений кручения, которые смешиваются с возмущениями метрики. Чем больше смешивание, тем сильнее разрывается связь между действиями для гравитона и скаляра. Например, в “теории до второго порядка с кручением” из предыдущего раздела смешивание большего числа возмущений достаточно, чтобы нарушить стандартную запрещающую теорему [21; 22], что приводит к более слабой форме этой теоремы, где можно достичь устойчивости и несингулярной космологии, но ценой произвольно короткой сверхсветовости гравитона. В этой работе мы показываем, что если мы ослабим дальнейшие “упрощающие предположения” и рассмотрим полную форму теории Хорндески — включая часть \mathcal{L}_5 — больше возмущений кручения не разделяются, а скорее сильнее смешиваются с возмущениями метрики. Это приводит к разделению уравнений, которые должны быть выполнены для отсутствия патологий в обоих секторах. Они становятся двумя наборами очень разных комбинаций функций Лагранжа от \mathcal{L}_2 до \mathcal{L}_5 . Таким образом, становится проще независимо удовлетворить эти уравнения не только локально, но и без противоречий в какой-либо момент эволюции. А именно, достигается глобальная устойчивость. В этой работе мы показываем явную модель с глобально свободными от патологий космологическими решениями.

Более того, *гравитационные волны во всех потенциально свободных от патологий гравитациях Хорндески с кручением* следуют характеристическому дисперсионному соотношению, которое не является общим для любой более простой формы теории Хорндески на фоне пространственно-плоской метрики FLRW. Их дисперсионное соотношение нетривиально зависит от длины волны. Это следует из-за большего числа возмущений кручения, которые не разделяются, что необходимо для избежания запрещающих теорем.

Ниже мы действуем следующим образом: в разделе 1.3.1 мы определяем модель. В разделе 1.3.2.1 мы суммируем характерные особенности гравитационных волн во всех потенциально свободных от патологий моделях.

В разделе 1.3.2.2 мы сравниваем ситуацию с глобальной устойчивостью между

тремя формами теории Хорндески: **(i.)** без кручения, **(ii.)** на пространстве-времени с кручением, но без \mathcal{L}_5 (а именно “теория Хорндески–Картана до второго порядка”), и **(iii.)** на пространстве-времени с кручением с полным действием Хорндески (которое мы обозначаем как полное действие Хорндески–Картана). Мы объясняем, как запрещающая теорема выполняется для более простых форм теории **(i.)**, **(ii.)**, и как стандартный анализ нарушается для **(iii.)**, что впервые предполагает, что с полным действием Хорндески–Картана **(iii.)** могут быть построены свободные от патологий решения.

Наконец, в разделе 1.3.3 мы показываем, что существует модель, взятая из общих теорий Хорндески–Картана, которая имеет классическое решение, несингулярное, устойчивое и до/сверхсветовое *во все времена*, тем самым показывая, что “запрещающая теорема” не может существовать. Мы завершаем выводами в разделе 1.4.

1.3.1 Модель: теория Хорндески–Картана до кубического порядка

В дополнение к общим функциям G_2 , G_3 , G_4 , теперь мы также рассматриваем дополнительный сектор со свободной функцией G_5 . Напомним, что они зависят от вещественного скалярного поля ϕ и его первых производных $X = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$. Эти общие функции появляются в специфических лоренц-инвариантных комбинациях членов со второй производной $(\tilde{\nabla}_\mu\tilde{\nabla}_\nu\phi)^p$ с $p \leq 3$, так что уравнения движения всех полей являются не более чем второго порядка, что позволяет избежать духа Остроградского.

Если мы рассматриваем пространство-время с кривизной и кручением, базовый блок для построения части действия Хорндески второго порядка $(\tilde{\nabla}_\mu\tilde{\nabla}_\nu\phi)$ не симметричен при перестановке индексов $\mu \leftrightarrow \nu$ (мы следуем обозначениям для кручения, введенным в разделе 1.1.1). Таким образом, существует больше способов построить лоренц-инвариантные комбинации типа $(\tilde{\nabla}_\mu\tilde{\nabla}_\nu\phi)^p$ и сохранить уравнения движения второго порядка. Эти множественные выборы лагранжианов Хорндески на пространстве-времени с кручением могут быть названы с помощью нескольких свободных параметров. Другими словами, появляются многопараметрические семейства теорий Хорндески–Картана. Например,

в предыдущем разделе было идентифицировано однопараметрическое¹⁰ семейство в случае до $(\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \phi)^2$. Теперь, с членами до $(\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \phi)^3$ возможны больше комбинаций сверток лоренцевых индексов, и разные выборы могут привести к принципиально разной динамике внутри семейства теорий Хорндески–Картана [98; 111].

В этом исследовании мы выбираем теорию внутри многопараметрического семейства, которая имеет больше множителей Лагранжа в разложении первого порядка по возмущениям. Основная причина этого — простота вычислений. Вторая причина заключается в том, что в случае теории Хорндески–Картана второго порядка этот выбор привел к наиболее физически убедительному типу: а именно, теории, которая, кроме гравитона, также распространяет скалярную моду с волновым дисперсионным соотношением. Последнее окажется верным даже с членами $(\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \phi)^3$.

Обозначая величины с кручением символом “тильда” ($\tilde{}$), модель, рассматриваемая в этом разделе, записывается как:

$$\mathcal{S} = \int d^4x (\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5), \quad (1.114)$$

$$\mathcal{L}_2 = G_2, \quad (1.115)$$

$$\mathcal{L}_3 = -G_3 \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}^\mu \phi, \quad (1.116)$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4 \tilde{R} + G_{4,X} \left((\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}^\mu \phi)^2 - (\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \phi) \tilde{\nabla}^\nu \tilde{\nabla}^\mu \phi \right), \quad (1.117)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 = & G_5 \tilde{G}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \phi - \frac{1}{6} G_{5,X} \left((\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}^\mu \phi)^3 \right. \\ & \left. + (\tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\rho \phi) \left(2(\tilde{\nabla}^\mu \tilde{\nabla}^\nu \phi) \tilde{\nabla}^\rho \tilde{\nabla}_\mu \phi - 3(\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}^\mu \phi) \tilde{\nabla}^\rho \tilde{\nabla}^\nu \phi \right) \right). \end{aligned} \quad (1.118)$$

Заметим, что действие с \mathcal{L}_2 , \mathcal{L}_3 , \mathcal{L}_4 такое же, как в предыдущем разделе. В частности, мы сохранили тот же порядок свертки лоренцевых индексов в последнем члене \mathcal{L}_4 , и с такой теорией запрещающая теорема выполняется. Однако добавление члена \mathcal{L}_5 — с акцентом на специфический порядок лоренцевых индексов в уравнении (1.118) — кардинально меняет глобальную устойчивость теории.

¹⁰Фактически, в теории Хорндески–Картана до второго порядка может быть идентифицирован дополнительный параметр, если также учитывать $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \phi) \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\rho \phi$. Этот член не исчезает тождественно, поскольку $[\tilde{\nabla}_\mu, \tilde{\nabla}_\nu] \phi \neq 0$, однако нетривиальный анализ показывает, что он несущественен для возмущений первого порядка [111].

Ниже показано, что для полной теории (1.114) запрещающая теорема не может выполняться.

1.3.2 Свойства возмущений в кубической теории Хорндески – Картана

Снова мы исследуем устойчивость возмущений на фоне пространственно-плоской метрики FLRW. Как и прежде, нет динамических векторных возмущений. И аналогично теории Хорндески без кручения, есть обычные две поляризации гравитона и скалярная мода. Однако их скорость и устойчивость заметно отличаются для полной теории с кручением:

1.3.2.1 Модифицированный гравитон

Для всех действий типа (1.114), содержащих структуру G_5 на пространстве-времени с кручением, дисперсионное соотношение гравитационных волн (ω) на фоне FLRW таково, что скорость, вообще говоря, зависит от длины волны¹¹,

$$\omega^2 = \frac{f_0 + \vec{p}^2 f_1}{f_2 + \vec{p}^2 f_3} \vec{p}^2, \quad (1.119)$$

где мы явно записали всю зависимость от импульса (\vec{p}), а f_0, f_1, f_2, f_3 зависят от функций Лагранжа. Они приведены в Приложении С.

Для нашего анализа уместно использовать приближение коротких волн и рассматривать скорость гравитационных волн при $\vec{p}^2 \rightarrow \infty$,

$$c_g^2 = \frac{f_1}{f_3}. \quad (1.120)$$

Эта своеобразная дисперсионная зависимость для гравитона сохраняется для всех теорий Хорндески с кручением, содержащих G_5 , независимо от порядка свертки лоренцевых индексов в любом члене действия (1.114). Действительно, полезно заметить в уравнении (1.119), что $f_1 \propto f_3 \propto G_5^2$. Таким образом, мы уже можем заключить, что *все потенциально свободные от патологий* модели Хорндески на пространстве-времени с кручением будут характеризоваться

¹¹Это не так уж удивительно, учитывая, что космологический фон спонтанно нарушает лоренц-инвариант

дисперсионным соотношением (1.119), потому что они должны содержать часть G_5 . Действительно, в предыдущем разделе было доказано, что запрещающая теорема выполняется для более простой формы Хорндески с кручением без G_5 (см. также анализ ниже).

Давайте теперь посмотрим, как этот новый гравитон с характерным уравнением (1.119) способствует устойчивости моделей Хорндески по сравнению с более простыми формами теории:

1.3.2.2 Обход запрещающих теорем

Давайте кратко рассмотрим, как дисперсионное соотношение в уравнении (1.119) становится существенно отличным по сравнению с более простыми формами теории Хорндески. Оно получается следующим образом: как и прежде, определяя кручение как разность связностей $T^\rho{}_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}^\rho{}_{\nu\mu}$, мы отмечаем, что благодаря антисимметрии по нижним индексам оно имеет 24 независимые компоненты, из которых мы выделяем два двухкомпонентных тензорных возмущения $T_{ij}^{(1)}$, $T_{ij}^{(2)}$ на фоне пространственно-плоской метрики FLRW (мы следуем обозначениям для возмущений, введенным в разделе 1.1.2). Таким образом, при h_{ij} как тензорном возмущении метрики, действие (1.114) для всех тензорных возмущений на фоне FLRW (в конформном времени), в импульсном пространстве принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\tau = & \int d\eta d^3p \left(b_1 (\dot{h}_{ij})^2 + b_2 \vec{p}^2 (h_{ij})^2 + b_3 (h_{ij})^2 \right. \\ & + \left(c_1 \vec{p}^2 (T_{ij}^{(2)})^2 + c_2 h_{ij} T_{ij}^{(1)} + c_3 \dot{h}_{ij} T_{ij}^{(1)} + c_4 (T_{ij}^{(1)})^2 \right) \\ & \left. + \vec{p}^2 \left(d_1 T_{ij}^{(1)} + d_2 \dot{h}_{ij} + d_3 h_{ij} \right) T_{ij}^{(2)} + d_4 \vec{p}^2 h_{ij} T_{ij}^{(1)} \right), \end{aligned} \quad (1.121)$$

где b_A , c_A , d_A зависят от трех фоновых полей: масштабного фактора метрики FLRW $a(\eta)$, скаляра Хорндески, который в контексте линеаризованных выражений мы также обозначаем как $\phi(\eta)$, и нетривиального фона кручения $x(\eta)$, который, однако, может быть выражен через $a(\eta)$, $\phi(\eta)$ (см. Приложение С).

Ситуация для гравитационных волн сравнивается следующим образом между различными формами теории Хорндески:

- (i.) без кручения,
- (ii.) на пространстве-времени с кручением с действием (1.114), но без \mathcal{L}_5 (а именно, “теория Хорндески–Картана до второго порядка”), и

(iii.) на пространстве-времени с кручением с действием (1.114), включая \mathcal{L}_5 (которое мы обозначаем как полное действие Хорндески–Картана¹²).

i. На пространстве-времени без кручения вкладывают только члены b_A в первой строке (1.121). В этом случае можно видеть, что гравитон безмассовый ($b_3 = 0$) после использования уравнений для фоновых полей.

ii. На пространстве-времени с кручением, но без \mathcal{L}_5 , вкладывают первая и вторая строки в (1.121), но третья строка отсутствует (а именно, $d_A = 0$). Опять гравитон оказывается безмассовым, но его скорость модифицируется из-за связи c_2, c_3 с одним из возмущений кручения, $T_{ij}^{(1)}$. Ключевой аспект заключается в том, что в этом случае $T_{ij}^{(2)}$ полностью разделяется, потому что $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ (а именно, его уравнение дает $c_1 T_{ij}^{(2)} \equiv 0$), и как следствие, модификация гравитона в теории Хорндески–Картана до второго порядка не так выражена, как в (1.119), что подробно объяснено в предыдущем разделе.

iii. С другой стороны, для полного действия Хорндески–Картана (1.114) третья строка в (1.121) также вкладывает, и теперь $T_{ij}^{(2)}$ больше не разделяется. Это критическое отличие. Его уравнение движения решает кручение как:

$$T_{ij}^{(2)} = -\frac{1}{2c_1} \left(d_1 T_{ij}^{(1)} + d_2 \dot{h}_{ij} + d_3 h_{ij} \right). \quad (1.122)$$

С этим решением, подставленным обратно в (1.121), мы теперь получаем вклад $-\frac{d_1^2}{4c_1} \vec{p}^2$ в импульс для $(T_{ij}^{(1)})^2$, помимо члена c_4 . Действительно, теперь есть член вида $-\frac{1}{4c_1} (-4c_1 c_4 + \vec{p}^2 d_1^2) (T_{ij}^{(1)})^2$. Это лежит в основе своеобразного дисперсионного соотношения гравитона, потому что $T_{ij}^{(1)}$ также связывается с \dot{h}_{ij} и h_{ij} , и, если $d_1 \propto G_5$ не тождественно равен нулю, тогда будет вклад $\frac{1}{\mathcal{O}(\vec{p}^2)}$ в кинетические и градиентные члены для гравитона.

Действительно, опуская несущественные для этого обсуждения детали, возмущение кручения $T_{ij}^{(1)}$ может быть окончательно решено в (1.114) через h_{ij}, \dot{h}_{ij} , и критически, с членами порядка $\frac{1}{\mathcal{O}(\vec{p}^2)}$, при условии, что c_1, c_2, c_3

¹²Однако отметим, что можно рассматривать дополнительные свертки лоренцевых индексов.

не тождественно равны нулю,

$$T_{ij}^{(1)} = \frac{1}{f_2 + \bar{p}^2 f_3} \left((2 c_1 c_3 - \bar{p}^2 d_1 d_2) \dot{h}_{ij} + (2 c_1 c_2 - \bar{p}^2 (d_1 d_3 - 2 c_1 d_4)) h_{ij} \right), \quad (1.123)$$

где $f_2 = -4 c_1 c_4$, $f_3 = d_1^2$. Наконец, используя решения уравнения (1.123), (1.122), мы можем записать действие (1.121) для обычного гравитона с двумя поляризациями как:

$$\mathcal{S}_\tau = \int d\eta d^3 p a^4 \left[\frac{1}{2 a^2} \frac{1}{f_2 + \bar{p}^2 f_3} \left(\bar{\mathcal{G}}_\tau (\dot{h}_{ij})^2 - \bar{p}^2 \bar{F}_\tau (h_{ij})^2 \right) \right] \quad (1.124)$$

где,

$$\bar{\mathcal{G}}_\tau = \frac{2}{a^2} c_1 (c_3^2 - 4 b_1 c_4), \quad \bar{F}_\tau(\bar{p}^2) = \frac{\bar{f}_0 + \bar{p}^2 \bar{f}_1}{f_2 + \bar{p}^2 f_3} \quad (1.125)$$

из которого мы идентифицируем дисперсионное соотношение (1.119) с $f_0 = \bar{f}_0 / \bar{\mathcal{G}}_\tau$, $f_1 = \bar{f}_1 / \bar{\mathcal{G}}_\tau$. Удобно также определить¹³

$$\mathcal{G}_\tau = \frac{\bar{\mathcal{G}}_\tau}{f_2 + \bar{p}^2 f_3}, \quad \mathcal{F}_\tau = \frac{\bar{F}_\tau}{f_2 + \bar{p}^2 f_3}. \quad (1.126)$$

Теперь, в большинстве форм теории Хорндески требования устойчивости или отсутствия духов для тензорного и скалярного секторов противоречивы. Проблема заключается в том, что коэффициенты в действии для тензорного и скалярного секторов жёстко связаны. В теории Хорндески–Картана до второго порядка также досветовость гравитона является частью противоречивых предположений. Давайте посмотрим, как жесткая связь между тензорным и скалярным действиями нарушается для полного действия Хорндески с кручением (1.114).

Скалярный сектор для действия (1.114) может быть приведен к форме, типичной для теорий Хорндески в унитарной калибровке, после исключения (с

¹³Глобальный фактор в части действия для тензорных мод, порядка $\frac{1}{\mathcal{O}(\bar{p}^2)}$, может указывать лишь на то, что при очень высоких импульсах теория становится сильно связанной, что мы уже ожидаем от этой эффективной теории. Однако ясно, что скорость гравитационных волн хорошо определена в любом случае. Вопрос о том, представляет ли это опасность в рамках возмущенного разложения, выходит за рамки первого приближения в этой работе, ограниченного линейным порядком.

помощью уравнений связей) всех скалярных возмущений кручения, поскольку они не динамические (мы показываем это подробно в Приложении С). А именно:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_s = \int d\eta d^3x a^4 \left(-3 \frac{\bar{\mathcal{G}}_S}{a^2} \dot{\psi}^2 + \frac{\bar{\mathcal{F}}_S}{a^2} (\partial_i \psi)^2 + 6 \frac{\Theta}{a} \alpha \dot{\psi} \right. \\ \left. + 2 \frac{T}{a^2} \partial_i \alpha \partial_i \psi + 2 \frac{\partial_i \partial_i B}{a^2} \left(a \Theta \alpha - \bar{\mathcal{G}}_S \dot{\psi} \right) + \Sigma \alpha^2 \right), \end{aligned} \quad (1.127)$$

где ψ , α и B - скалярные возмущения метрики, а коэффициенты $\bar{\mathcal{G}}_S$, $\bar{\mathcal{F}}_S$, Θ , T , Σ , приведенные в Приложении С, зависят от фонов $a(\eta)$, $\phi(\eta)$, но *не зависят от пространственного импульса*. Или, используя уравнение связи $\alpha = \frac{\bar{\mathcal{G}}_S}{a\Theta} \dot{\psi}$, накладываемое множителем Лагранжа B в уравнении (1.127), действие для единственной динамической скалярной моды окончательно принимает вид:

$$\mathcal{S}_s = \int d\eta d^3x a^4 \left(\frac{1}{a^2} \mathcal{G}_S \dot{\psi}^2 - \frac{1}{a^2} \mathcal{F}_S (\partial_i \psi)^2 \right), \quad (1.128)$$

где,

$$\mathcal{G}_S = 3\bar{\mathcal{G}}_S + \frac{\bar{\mathcal{G}}_S^2 \Sigma}{\Theta^2}, \quad \mathcal{F}_S = \frac{1}{a^2} \frac{dN}{d\eta} - \bar{\mathcal{F}}_S, \quad (1.129)$$

где $c_s^2 = \mathcal{F}_S/\mathcal{G}_S$ - квадрат скорости скалярной моды, и где мы определили

$$N =: \frac{a \bar{\mathcal{G}}_S T}{\Theta}, \quad (1.130)$$

что является величиной первостепенной важности для дальнейшего обсуждения.

Теперь давайте посмотрим, как аргумент об устойчивости сравнивается между различными формами теории Хорндески **(i.)** до **(iii.)**, определенными ранее: предполагая “нормальную” асимптотику - более точно, предполагая отсутствие сильной гравитации в асимптотическом прошлом или будущем $\mathcal{F}_\tau(\eta) > b_2 > 0$ при $\eta \rightarrow \pm\infty$ - следующие убедительные предположения (A), (B) уже взаимно противоречивы в случае **(i.)** теории Хорндески без кручения¹⁴:

¹⁴В этом обсуждении мы остаемся в рамках общих теорий Хорндески, не определяемых частным уравнением $\Theta \equiv 0$, которое решает проблемы в теории Хорндески без кручения ценой потери общности, имея только два варианта: либо модель не содержит скалярных возмущений на несингулярном фоне FLRW, либо скалярное возмущение распространяется на фоне пространства-времени Минковского [43].

А) несингулярное космологическое решение (нижняя граница на масштабный фактор $a(\eta) > b_1 > 0$),

В) гравитон и скалярная мода не являются духами и не имеют градиентных неустойчивостей, $\mathcal{G}_\tau > 0$, $\mathcal{F}_\tau > 0$, $\mathcal{F}_S > 0$, $\mathcal{G}_S > 0$.

В случае **(ii.)** теории Хорндески с кручением до второго порядка обнаруживается противоречие, если вместе с предположениями (А), (В) также предполагать, что

С) гравитон всегда до/сверхсветовой ($c_g^2 \leq 1$).

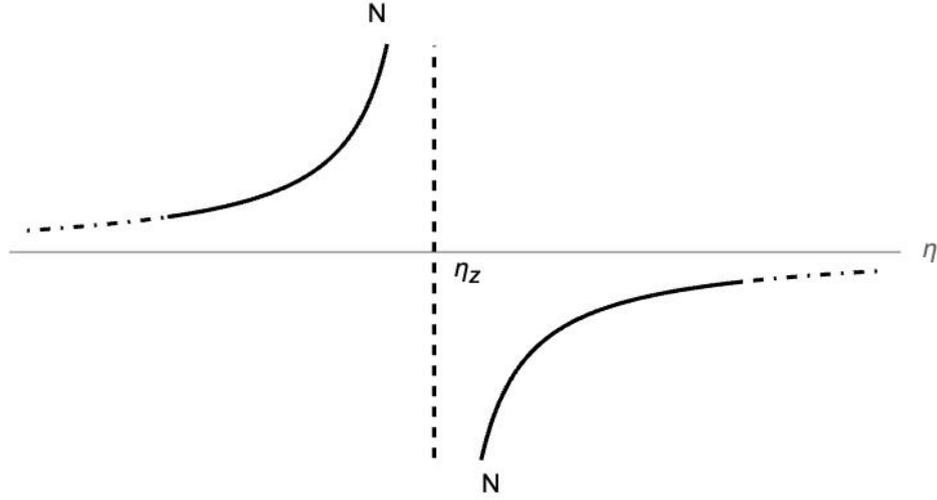


Рис. 1.8: Поведение $N(\eta)$ вокруг нулей Θ (обозначенных как η_z): N монотонно возрастает вокруг любого нуля η_z .

Действительно, следуя аргументу, изначально показанному в [20–22] и затем расширенному на случай с кручением в предыдущем разделе, мы можем видеть противоречие в обоих случаях **(i.)**, **(ii.)**. Давайте кратко суммируем аргумент предыдущего раздела следующим образом:

С одной стороны, N не должна обращаться в нуль при условии предположения о несингулярной космологии вместе с условием отсутствия духов и до/сверхсветовости гравитона: а именно, в **(i.)** $\bar{\mathcal{G}}_S = T = \mathcal{G}_\tau$ и $\bar{\mathcal{F}}_S = \mathcal{F}_\tau$, следовательно $N \propto a \mathcal{G}_\tau^2 \neq 0$. А в **(ii.)**, $\bar{\mathcal{G}}_S = \mathcal{G}_\tau > 0$, $\bar{\mathcal{F}}_S = \mathcal{F}_\tau$ и $T = \mathcal{F}_\tau (c_g^2 - 2) < 0$, следовательно $N \propto a \mathcal{G}_\tau T \neq 0$.

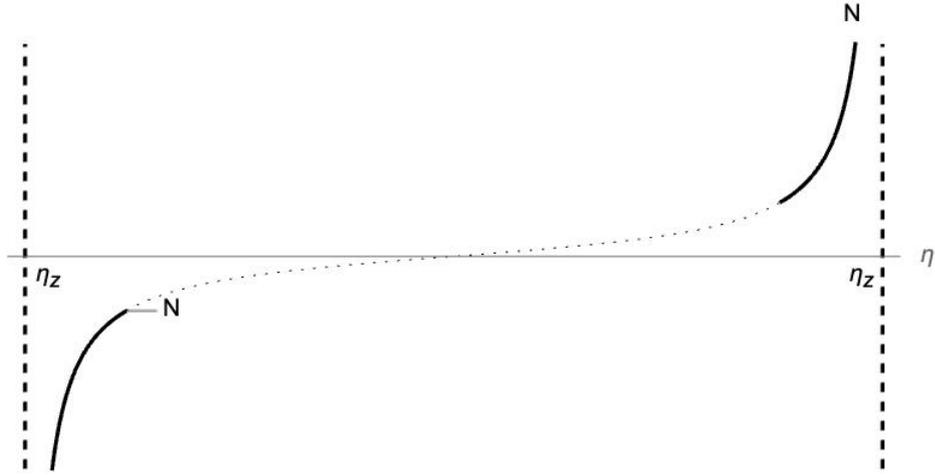


Рис. 1.9: Поведение $N(\eta)$ вокруг нулей Θ : N между любыми двумя нулями η_z . N непрерывна на этом интервале и, следовательно, обращается в нуль в некоторой точке.

С другой стороны, требование устойчивости для скалярной моды $\mathcal{F}_S > 0$ в (В) говорит, во-первых, что функция N монотонно возрастает $\frac{dN}{d\eta} > a^2 \mathcal{F}_\tau > 0$. Это раскрывает поведение N вокруг любых изолированных нулей Θ , которые мы обозначаем как η_z , как на Рисунке 1.8. В частности, это означает, что между любыми двумя нулями Θ , N должна обращаться в нуль, как на Рисунке 1.9. Во-вторых, $\mathcal{F}_S > 0$ также говорит, что наклон N ограничен снизу асимптотически: $\frac{dN}{d\eta} > b_1^2 b_2 > 0$ при $\eta \rightarrow \pm\infty$. Это означает, что N также обратится в нуль в любом бесконечном интервале - даже если Θ никогда не обращается в нуль - потому что N не может иметь горизонтальную асимптоту. См., например, Рисунок 1.10 в случае самого левого нуля Θ . Это противоречит последнему абзацу, следовательно, физически убедительные предположения в каждом случае (i.), (ii.) взаимно противоречивы.

Наконец, в случае (iii.) ситуация существенно отличается. Рассматривая выражение (1.130) для N , давайте увидим, что оно может обращаться в нуль многими способами: во-первых, заметим, что в общем случае условие (В) $\mathcal{G}_\tau > 0$ не ограничивает знак $\bar{\mathcal{G}}_S$, потому что $\bar{\mathcal{G}}_S \neq \mathcal{G}_\tau(\vec{p}^2)$ ¹⁵. Это очевидно, потому что

¹⁵Хотя обозначения для $\bar{\mathcal{G}}_S$ и \mathcal{G}_S схожи, это очень разные функции (см. уравнение (1.129), и обратите внимание, что Σ - сложная функция функций Лагранжа.). Таким образом, условие

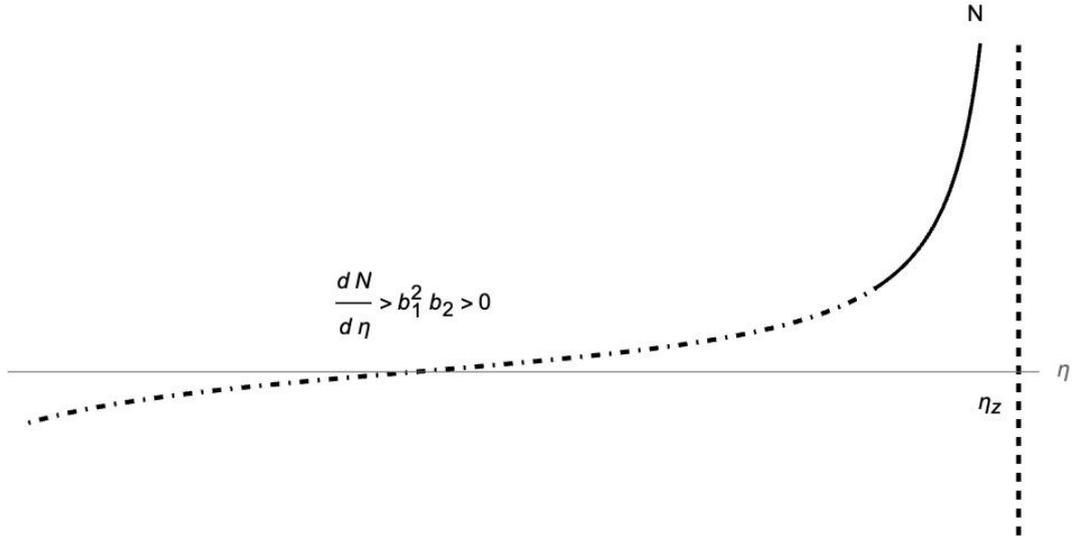


Рис. 1.10: N в полубесконечном интервале $(-\infty, \eta_z)$. Аналогично N обращается в нуль в некоторый момент времени в интервале (η_z, ∞) или если нет нулей η_z в любой момент эволюции, потому что N не может иметь горизонтальные асимптоты $\frac{dN}{d\eta} > b_1^2 b_2 > 0$ с b_1 и b_2 положительными константами при $\eta \rightarrow \pm\infty$.

последняя зависит от импульса, а первая - нет. Более того, при внимательном рассмотрении выражения для T в уравнении (2.171) в Приложении С видно, что последнее не связано простым образом со скоростью гравитона - определенной только в приближении коротких волн *приближении* (1.120) - что является ключевым аспектом, который обычно связывает устойчивость со сверхсветовостью в теории Хорндески–Картана до второго порядка (ii.). Это неудивительно, потому что дисперсионное соотношение в уравнении (1.119) сложным образом зависит от импульса, в то время как коэффициент T в скалярном секторе не зависит от импульса.

Следовательно, обычные предположения о наличии классически свободного от патологий решения (А)-(С) при некоторых импульсах - в частности $\mathcal{G}_\tau(\vec{p}^2) > 0$ и $c_g^2 \leq 1$ - не ограничивают $\bar{\mathcal{G}}_S$ ни T , и можно потенциально разработать теорию, где (А)-(С) выполняются, и $\bar{\mathcal{G}}_S$ или T обращаются в нуль в некоторый момент времени, и, следовательно, N также обращается в нуль. В целом, *если существует аргумент запрещающей теоремы, он должен быть утверждением, зависящим от импульса. Общее утверждение неверно, потому что действие* $\overline{(B)} \mathcal{G}_S > 0$ не ограничивает знак $\bar{\mathcal{G}}_S$.

для тензорных и скалярных мод модифицируется кручением существенно различными способами.

Теперь важно упомянуть потенциально особый случай. Для этого сначала заметим общее тождество:

$$\bar{\mathcal{G}}_\tau = f_2 \bar{\mathcal{G}}_S, \quad (1.131)$$

что все еще не является сильной связью между тензорными и скалярными модами при всех импульсах - даже если $\mathcal{G}_\tau > 0$ и $\bar{\mathcal{G}}_\tau > 0$ по условию (В) - потому что знак $f_2(\eta)$ в принципе не ограничен. Однако, по соотношению (1.131) и форме \mathcal{G}_τ в уравнении (1.126) ясно, что при низких импульсах возникает более жёсткая связь между тензорными и скалярными модами¹⁶: а именно при $\vec{p}^2 \rightarrow 0$ мы находим:

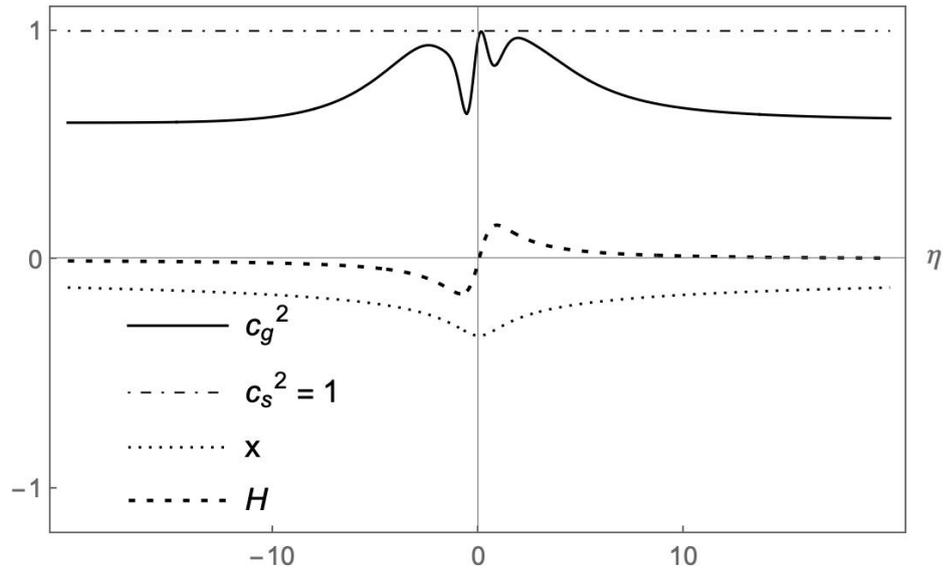
$$\mathcal{G}_\tau(\vec{p}^2 = 0) = \bar{\mathcal{G}}_S, \quad \mathcal{F}_\tau(\vec{p}^2 = 0) = \bar{\mathcal{F}}_S. \quad (1.132)$$

Таким образом, согласно неравенствам (В) отсутствие духов и устойчивость тензорных мод при низких импульсах ограничивают знак $\bar{\mathcal{G}}_S$ и $\bar{\mathcal{F}}_S$ скалярной моды. Очевидно, это уменьшает способы, которыми N может обращаться в нуль при низких импульсах, но напомним, что T не зависит от импульса, и, как мы показываем в Приложении С, он может обращаться в нуль многими различными способами, что делает неправдоподобным точную запрещающую теорему даже в этом случае низких импульсов. Действительно, мы показываем явный контрпример к запрещающей теореме в следующем разделе.

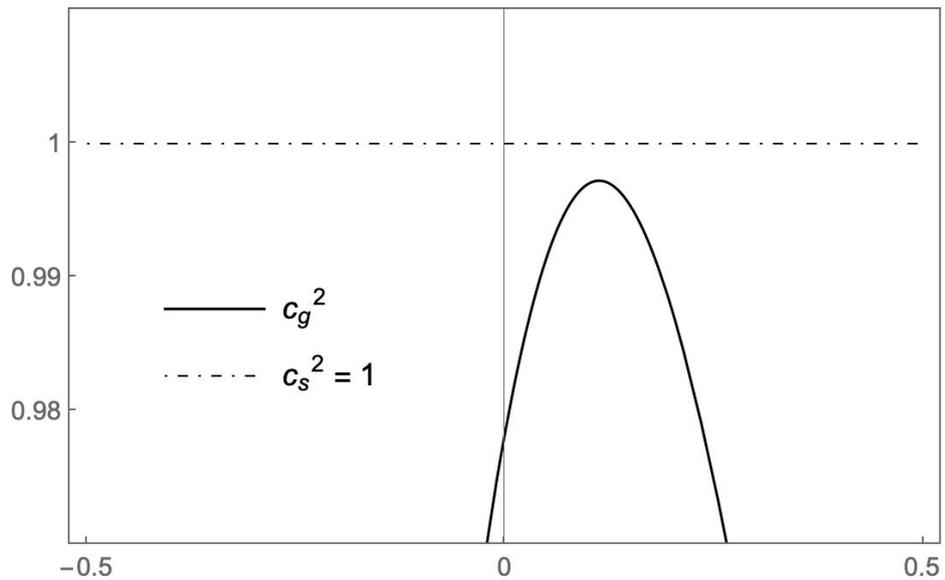
1.3.3 Контрпример к “запрещающим теоремам”: всегда устойчивая, несингулярная космологическая модель с досветовым распространением возмущений.

Мы подтверждаем предыдущее обсуждение, демонстрируя существование модели, взятой из общих теорий Хорндески-Картана (с G_5) (1.114), которая имеет классическое решение, являющееся несингулярным, стабильным и до/световым

¹⁶Это неудивительно, учитывая, что в уравнении (1.119) предел низких импульсов $\vec{p}^2 \rightarrow 0$ эквивалентен пределу $G_5 \rightarrow 0$. А именно, предел низких импульсов восстанавливает дисперсионное соотношение гравитона, подобное форме теорий “до второго порядка” (напомним, что $f_1 \propto G_5^2$ и $f_3 \propto G_5^2$).



(а) Скорость гравитационных волн и скалярной моды. Параметр Хаббла, показывающий короткую фазу отскока с центром в $\eta = 0$ и шириной $\tau = 1$. Изотропный фон кручения $x(\eta)$.



(б) Детали скорости гравитационных волн вблизи фазы отскока.

Рис. 1.11: Физически значимые величины.

во все времена (мы используем термин “световые моды” для обозначения степеней свободы, которые распространяются с той же скоростью, что и свет), тем самым показывая, что “запрещающие теоремы” не могут существовать.

Наше единственное намерение - показать, что существуют такие потенциально

интересные модели. Таким образом, наши критерии ограничены последним, и вопрос о том, могут ли быть достигнуты дополнительные особенности - такие как физически интересные асимптотики - остается открытым.

Стратегия построения модели состоит в том, чтобы взять анзац для скалярных потенциалов G_2 до G_5 в виде разложения по степеням X с коэффициентами, являющимися общими функциями ϕ . Затем, предполагая набор физически убедительных решений для космологии отскока, H и ϕ (Ур. (1.133), (1.134)), мы работаем в обратном направлении, чтобы решить свободные функции в анзаце так, чтобы уравнения движения фоновых полей были удовлетворены.

Прежде чем углубляться в детальное построение модели, давайте проясним: в нашей модели фоновые поля:

$$a = (\tau^2 + \eta^2)^{\frac{1}{6}}, \quad H = \frac{\dot{a}}{a^2} = \frac{\eta}{3(\tau^2 + \eta^2)^{\frac{7}{6}}}, \quad \phi = \eta, \quad x = -\frac{1}{3(1 + \eta^2)^{\frac{1}{6}}}, \quad (1.133)$$

и для выполнения условий (А)-(С), данных выше для тензорных возмущений при всех импульсах, выполняются следующие неравенства:

$$\bar{\mathcal{G}}_\tau > 0, \quad \bar{f}_0 > 0, \quad \bar{f}_1 > 0, \quad f_2 > 0, \quad f_3 = d_1^2 > 0, \quad c_g^2 = \frac{f_1}{f_3} \leq 1, \quad (1.134)$$

которые мы показываем на Рис. 1.12 и 1.11. Четвертое неравенство в (1.134) гарантирует, что в глобальном факторе тензорного сектора для всех \vec{p} выполняется: $(f_2 + \vec{p}^2 d_1^2) > 0$. Следовательно, условия стабильности и отсутствия духов остаются одинаковыми для всех импульсов. Аналогично, второе неравенство требуется для стабильности гравитона при всех импульсах.

Для (независящего от импульса) скалярного сектора неравенства, которые должны выполняться, просто те, что в (В) в предыдущем разделе, которые мы показываем для нашей модели на Рис. 1.13.

Теперь, поскольку N должен обращаться в нуль и одновременно у нас нет духов гравитона при низком импульсе $\mathcal{G}_\tau(\vec{p}^2 = 0) = \bar{\mathcal{G}}_S > 0$, мы выбрали модель, где T обращается в нуль, как на Рис. 1.16, что было единственным оставшимся вариантом, чтобы избежать каких-либо патологий. Важно, что все уравнения Эйлера-Лагранжа для фоновых полей $a(\eta)$, ϕ , x (1.133) удовлетворены, и функции Лагранжа везде регулярны. Действительно, анзац для функций Лагранжа G_2 до G_5 окончательно решен, как на Рис. 1.14, 1.15. На Рис. 1.11 мы также показываем параметр Хаббла, скорость тензорных мод и скалярной моды, а также фон кручения.

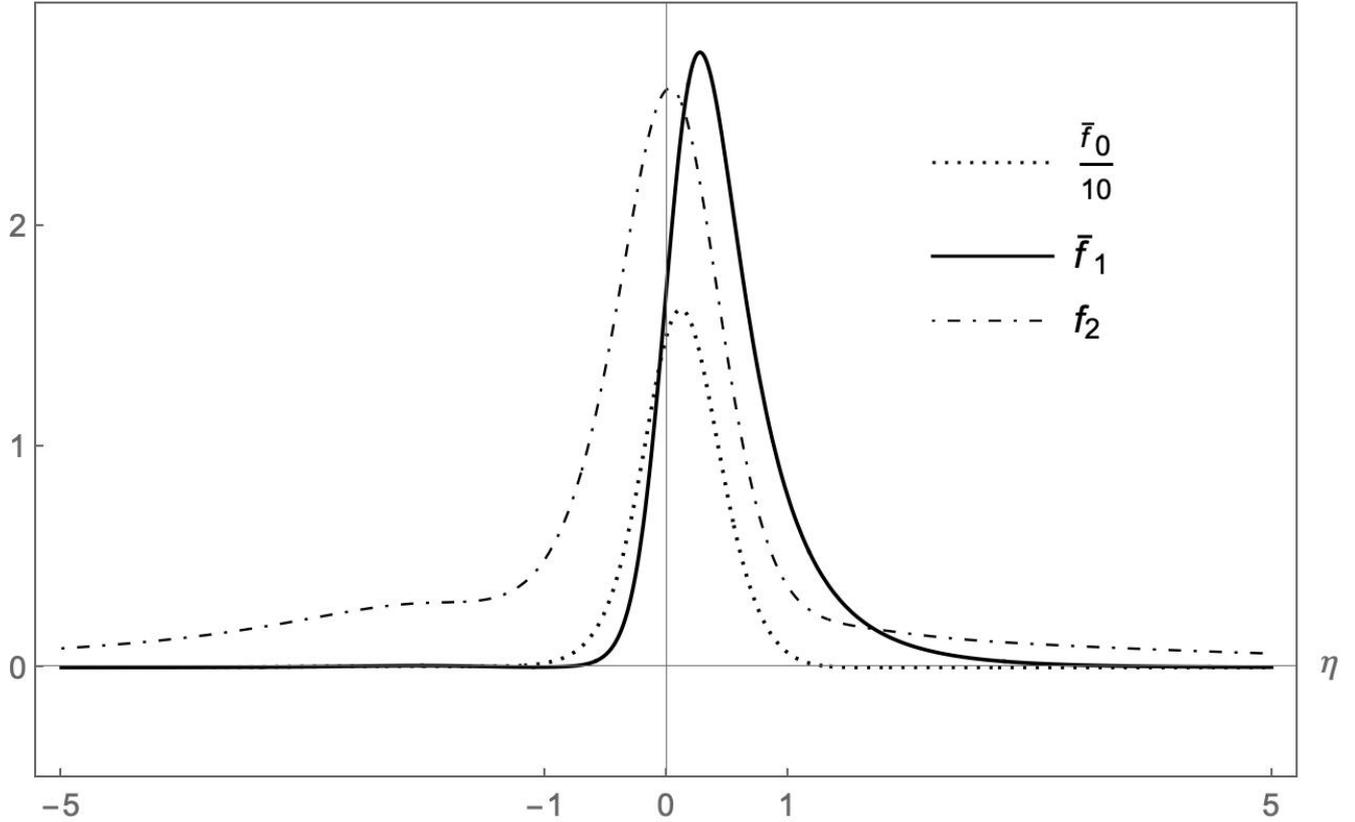


Рис. 1.12: Градиентная стабильность гравитона при всех импульсах выполняется, потому что $\bar{f}_0 > 0$, $\bar{f}_1 > 0$. Знак условия отсутствия духов для гравитона остается инвариантным для *всех импульсов*, потому что $f_2 > 0$ и $f_3 = d_1^2 > 0$ (то, что $d_1 \neq 0$, ясно видно на графике скорости на Рис. 1.11 или также на Рис. 1.15).

С изложенной стратегией давайте пройдемся по деталям:

Реконструкция функций Лагранжа G_3, G_4 : Разумное предположение состоит в том, что взяв несингулярное и стабильное в любой момент времени решение отскока с *коротким периодом сверхсветовости*, построенное в предыдущем разделе, можно *устранить проблему сверхсветовости с помощью вклада от новой части действия G_5* (1.114). Это наш подход ниже. Это сделано из простоты. А именно, тщательный анализ показывает, что построение такой модели, включающей G_5 , с методом “реконструкции”, использованным в предыдущем разделе [99; 108], является вычислительно сложным. Основная проблема в том, что простые *анзацы* обычно приводят к дифференциальным уравнениям для функций Лагранжа G_A , которые трудно решить.

Таким образом, в качестве первого шага к “Свободной от патологий модели”,

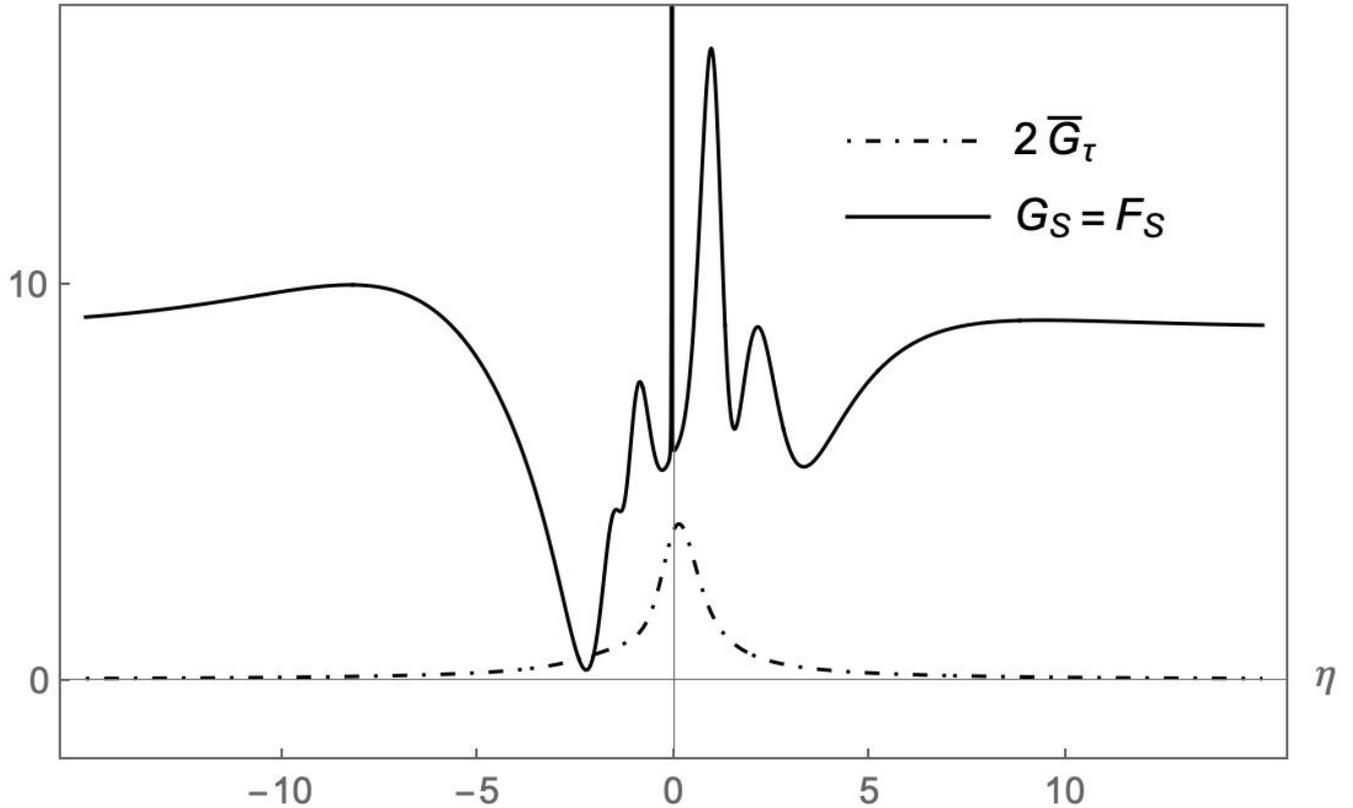


Рис. 1.13: Гравитон, свободный от патологий. Устойчивая скалярная мода, свободная от патологий и распространяющаяся со скоростью света.

включающей G_5 , давайте сначала построим модель с решением отскока, но только до G_4 . Из предыдущего раздела мы знаем, что без G_5 модель будет страдать по крайней мере от нестабильностей или периодов сверхсветовости. Мы будем называть последнее “Патологической частью” модели. Стратегия затем состоит в том, чтобы ввести G_5 для устранения этих проблем.

Для “Патологической части” мы будем точно следовать примеру, построенному в предыдущем разделе. Поэтому пока давайте сначала рассмотрим действие (1.114) без \mathcal{L}_5 . В этом случае мы также можем получить ту же форму действий (1.124), (1.127), и мы используем то же обозначение для этих упрощенных функций, которые, давайте подчеркнем еще раз, *только* в этом разделе не содержат G_5 и ее производных.

Используя в наших интересах общность теории Хорндески, давайте выберем следующий анзац для общих функций Лагранжа G_3 и G_4 :

$$G_3(\phi, X) = g_{30}(\phi) + g_{31}(\phi)(X - X_0), \quad (1.135)$$

$$G_4(\phi, X) = g_{40}(\phi) + g_{41}(\phi) (X - X_0), \quad (1.136)$$

где мы выбираем X_0 как функцию X , вычисленную на выборе фоновых полей (1.133), таким образом $X_0 = 1/(2(\tau^2 + \phi^2)^{\frac{1}{3}})$. Этот выбор должен быть таким, чтобы уравнения Эйлера-Лагранжа для фоновых полей полной теории Хорндески-Картана (включая G_5) были решены. Мы гарантируем это в следующих разделах, соответствующим образом фиксируя функции Лагранжа g_{30} , G_2 .

Теперь давайте решим для g_{31} , g_{40} , g_{41} алгебраически из следующих трех уравнений:

$$\mathcal{F}_\tau(g_{40}, g_{41}) = \frac{23}{25}, \quad (1.137)$$

$$\frac{T(g_{40}, g_{41})}{\mathcal{F}_\tau} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{4} \operatorname{sech} \left(\frac{29\eta}{50\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \operatorname{sech} \left(\frac{2}{5} \left(\frac{\eta}{\tau} + \frac{3}{2} \right) \right) \quad (1.138)$$

$$\Theta(g_{30}, g_{31}, g_{40}, g_{41}) = -H, \quad (1.139)$$

где только для этих уравнений мы подставляем анзац:

$$x =: -\frac{8a^3 H X G_{4,X} + a^2 \dot{\phi} (G_3 - 2G_{4,\phi})}{4(G_4 + 2X G_{4,X})}. \quad (1.140)$$

Подчеркнём, что уравнение (1.140) имеет физический смысл только в контексте *квадратичной* теории Хорндески-Картана (см. предыдущий раздел для подробностей). А именно, выражение (1.140) лишено смысла для полной теории Хорндески-Картана с G_5 , и в этой заметке оно просто является анзацем для функции $x(\eta)$, которая появляется в функциях $\mathcal{F}_\tau(g_{40}, g_{41})$, $T(g_{40}, g_{41})$, $\Theta(g_{30}, g_{31}, g_{40}, g_{41})$ в этом разделе. Здесь мы принимаем это определение исключительно для практических целей построения “Патологической части модели” так же, как в предыдущем разделе. До этого момента это сводится не более чем к выбору теории (части свободных функций Лагранжа G_3 , G_4).

Теперь ключевая проблема решения уравнения Эйлера-Лагранжа, выведенного из полной теории Хорндески-Картана (с G_5), будет решена позже путем соответствующей фиксации свободных функций Лагранжа g_{30} , G_2 .

Функции Лагранжа G_2 , G_5 Давайте возьмем эту “Патологическую часть модели” за основу. А именно, сохраняя наш выбор g_{31} , g_{40} , g_{41} , которые являются

функциями времени и g_{30} , но не зависят от G_5 и G_2 , давайте теперь рассмотрим полное действие Хорндески-Картана (1.114) с G_5 и возьмем анзац:

$$G_2(\phi, X) = g_{20}(\phi) + g_{21}(\phi)(X - X_0) + g_{22}(\phi)(X - X_0)^2, \quad (1.141)$$

$$G_5(\phi, X) = g_{50}(\phi) + g_{51}(\phi)(X - X_0) + g_{52}(\phi)(X - X_0)^2. \quad (1.142)$$

С этим конкретным анзацем все уравнения для удовлетворения критериев стабильности, досветового распространения возмущений и отсутствия духов становятся дифференциальными уравнениями для свободных функций Лагранжа g_{50} , g_{51} . Чтобы избежать этих проблем, мы принимаем практический простой подход и, выбирая анзац для функций g_{50} , g_{51} , показываем, что существует модель с желаемыми особенностями. Действительно, тщательный выбор параметров с общим анзацем (и потенциальной тонкой настройкой¹⁷) доказывает, что следующего выбора достаточно для наших целей:

$$g_{50} = \frac{1}{100} \left(-94 - 26 \operatorname{sech} \left(\frac{1}{2} - \eta \right) + 49 \tanh \left(\frac{3}{2} - \eta \right) - 90 \operatorname{sech}(\eta) \tanh(\eta) - 80 \operatorname{sech} \left(\frac{7}{10}(\eta + 1) \right) \tanh \left(\frac{7}{10}(\eta + 1) \right)^2 \right), \quad (1.143)$$

$$g_{51} = \frac{1}{20} \left(95 + 97 \operatorname{sech} \left(\frac{37}{25} - \eta \right) + 20 \tanh(\eta + 1) + 150 \operatorname{sech} \left(\frac{3}{5} \left(\eta - \frac{7}{4} \right) \right) \tanh \left(\frac{3}{5} \left(\eta - \frac{7}{4} \right) \right) + 20 \operatorname{sech} \left(\frac{7}{10} \left(\eta + \frac{11}{20} \right) \right) \tanh \left(\frac{7}{10} \left(\eta + \frac{11}{20} \right) \right)^2 \right). \quad (1.144)$$

Теперь, подставляя эти функции Лагранжа g_{50} , g_{51} и g_{31} , g_{40} , g_{41} из предыдущего раздела, мы можем решить для g_{30} , g_{52} алгебраически из следующих уравнений:

$$\Theta(g_{30}, g_{52}) = -H + \frac{1}{100} \left(7 \operatorname{sech} \left(3 \left(\eta + \frac{27}{20} \right) \right) - 10 \operatorname{sech} \left(2 \left(\eta - 1 \right) \right) \right), \quad (1.145)$$

$$\mathcal{E}_{0K_{0ij}}(g_{30}) = 0, \quad (1.146)$$

¹⁷Это, скорее всего, проблема анзаца и нашего подхода. Можно ли этого избежать - открытый вопрос, который мы не рассматриваем в этой работе.

где $\mathcal{E}_f = 0$ обозначает уравнение Эйлера-Лагранжа для фонового поля f , а $\Theta(g_{30}, g_{52})$ (который соответствует функции Θ , полученной из действия (1.127)) вычисляется из полного лагранжиана Хорндески-Картана (1.114) с G_5 . Важно отметить, что $\Theta(g_{30}, g_{52})$ в (1.145) полностью отличается от функции (1.139) $\Theta(g_{30}, g_{31}, g_{40}, g_{41})$ из предыдущего раздела, которая вычислялась без G_5 только для выбора функций Лагранжа g_{31}, g_{40}, g_{41} .

Кроме того, для простоты - и чтобы имитировать профиль $x(\eta)$ из предыдущего раздела - при решении (1.145), (1.146) мы выбрали модель в рамках полных теорий Хорндески-Картана (1.114), чей фон кручения:

$$x(\eta) = -\frac{1}{3(1 + \eta^2)^{\frac{1}{6}}}. \quad (1.147)$$

Другими словами, решая уравнение Эйлера-Лагранжа (1.146), мы соответствующим образом нашли функцию Лагранжа g_{30} , которая приводит к нашему желаемому решению (1.147). Таким образом, фон кручения (1.147) имеет реальный физический смысл, потому что он используется для решения уравнений движения (1.146) и (1.148) ниже, в отличие от функции (1.140), которую мы приняли как анзац исключительно для практических целей в трех *ad-hoc* уравнениях в предыдущем разделе только для выбора функций Лагранжа g_{31}, g_{40}, g_{41} .

Подход в этом разделе фиксации $x(\eta)$ и нахождения g_{30} из уравнения Эйлера-Лагранжа проще, потому что $\mathcal{E}_{0K_{0ij}}(g_{30})$ квадратично по первому и линейно по последнему.

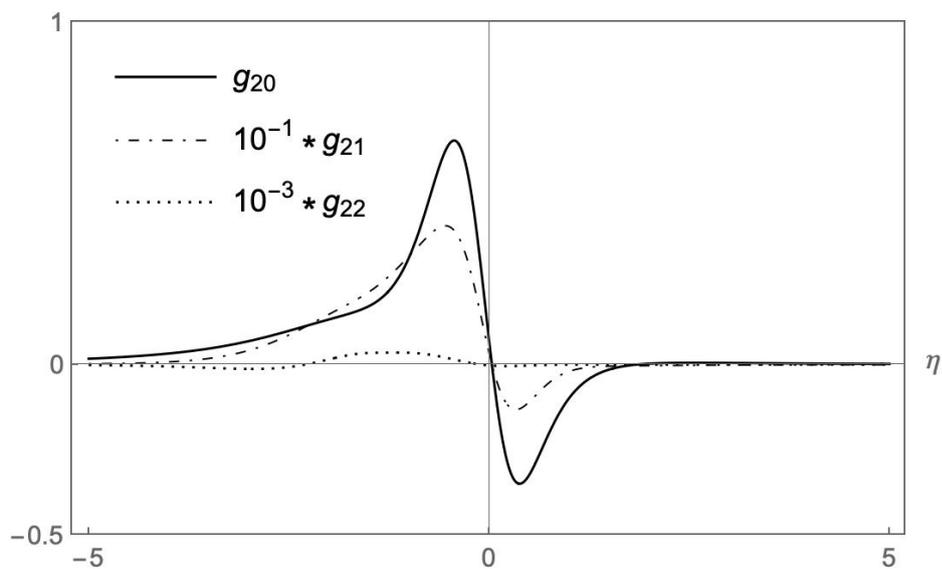
Наконец, чтобы сделать наш выбор фоновых полей $a(\eta), \phi(\eta), x(\eta)$ (1.133) и (1.147) согласованным, мы должны удовлетворить оставшиеся уравнения Эйлера-Лагранжа. Мы делаем это, выбирая модель в рамках общего действия (1.114) (с G_5) с g_{20}, g_{21}, g_{22} , решая алгебраически три независимых уравнения:

$$\mathcal{G}_S = \mathcal{F}_S, \quad \mathcal{E}_{g_{00}} = 0, \quad \mathcal{E}_{g_{11}} = \mathcal{E}_{g_{22}} = \mathcal{E}_{g_{33}} = 0, \quad (1.148)$$

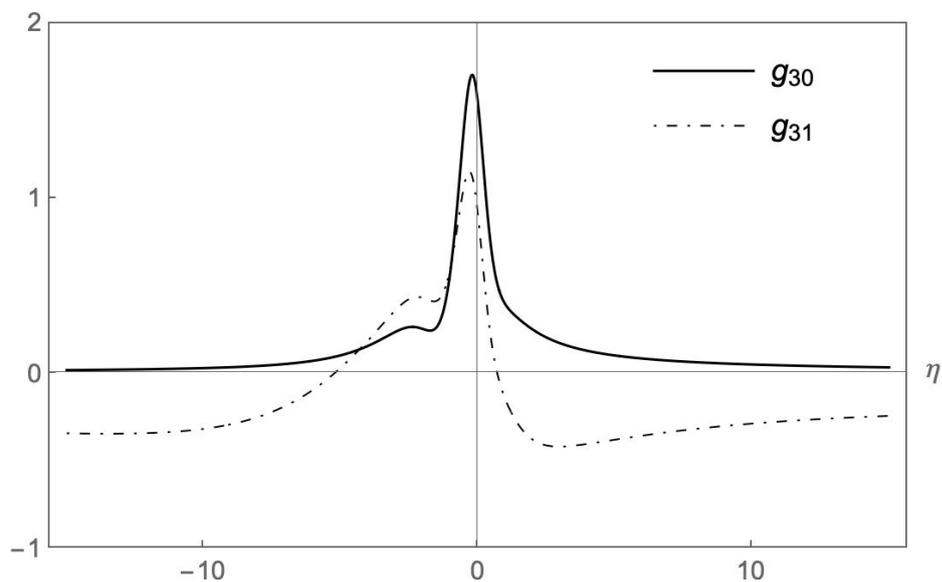
из которых первое уравнение подразумевает модель со *скалярной модой, распространяющейся точно со скоростью света*. Решение для функций Лагранжа неингулярно везде. Они показаны на Рис. 1.14 и 1.15.

В целом, мы показали модель, где все критерии отсутствия патологий могут быть удовлетворены. Мы предполагаем, что получение моделей с физически

значимыми асимптотиками помимо критериев отсутствия патологий является вычислительной проблемой, а не фундаментальным препятствием.

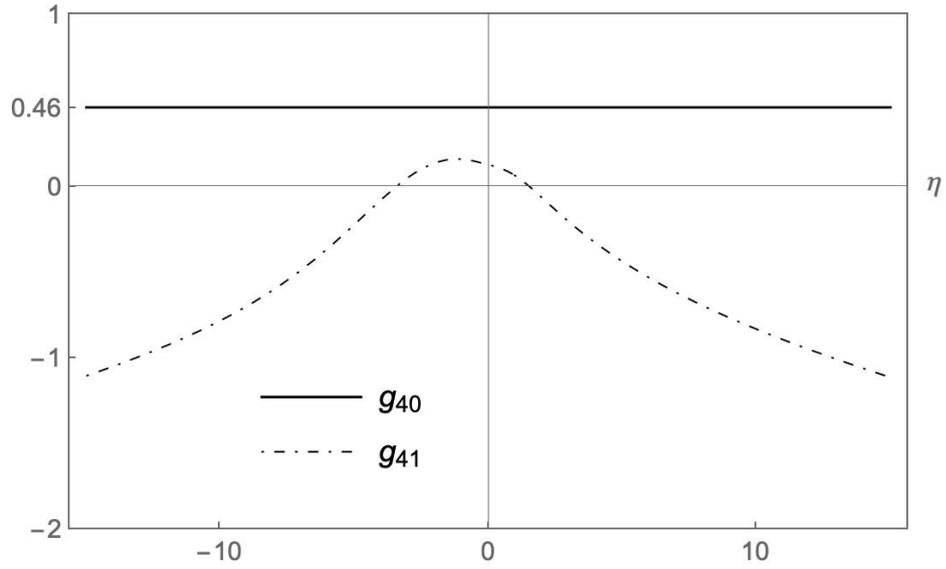


(а) График g_{20} , g_{21} , g_{22} , которые мы выбрали для удовлетворения двух уравнений движения для фоновых полей и условия распространения скаляра со скоростью света.

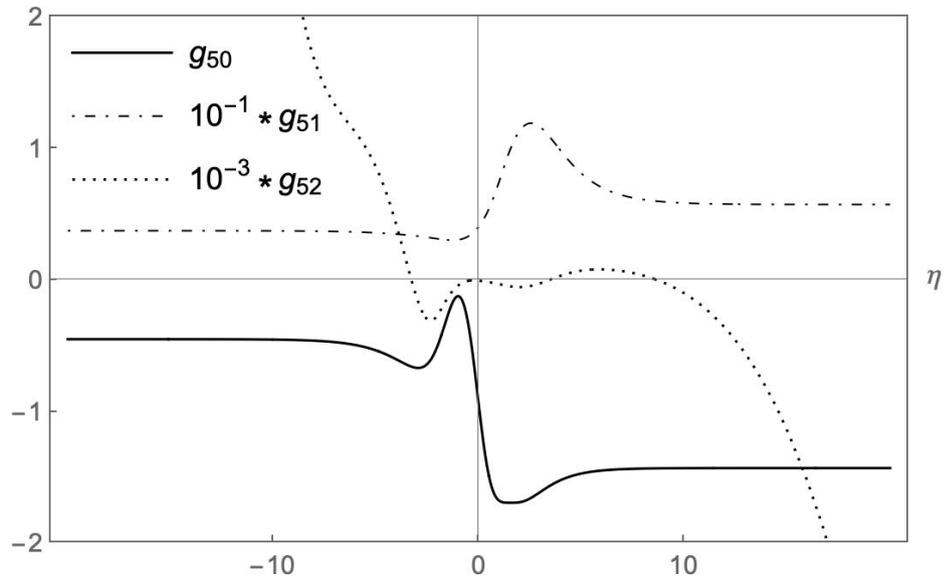


(б) График g_{30} , g_{31} , которые мы выбрали для удовлетворения третьего независимого уравнения движения фоновых полей и фиксации функции Θ

Рис. 1.14: Везде регулярные функции Лагранжа G_2 , G_3

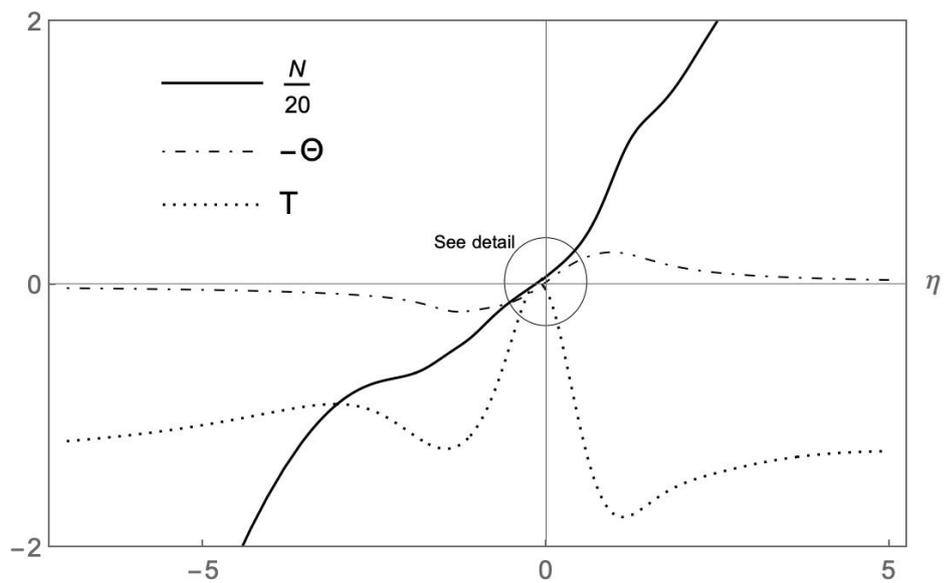


(a) График g_{40}, g_{41}

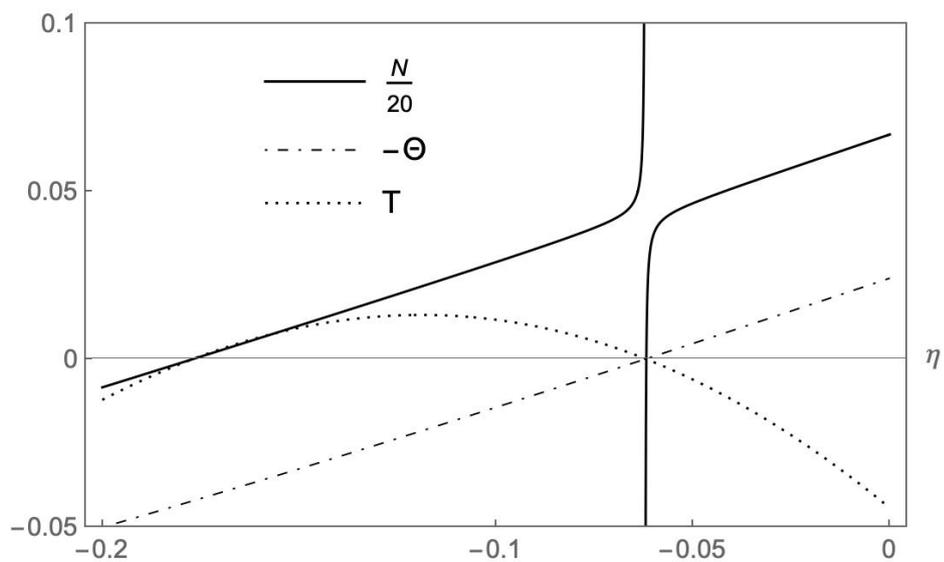


(b) График g_{50}, g_{51} , которые мы тщательно выбрали с единственным критерием получения устойчивости в любой момент времени и досветового распространения возмущений при отскоке.

Рис. 1.15: Везде регулярные функции Лагранжа G_4, G_5 . Заметим, что $f_3 \propto d_1 \propto G_5 = g_{50}$ на массовой поверхности, что не обращается в нуль. Следовательно, скорость гравитационных волн $\propto f_3^{-1}$ в Ур. (1.120) хорошо определена.



(a) График функции T , которую мы спроектировали так, чтобы она обращалась в нуль в двух точках около фазы отскока (Мы выбрали $-\Theta = H$). N монотонно возрастает, как требуется, и обращается в нуль в нулях T .



(b) Детали обращения в нуль T и N .

Рис. 1.16: Обход запрещающих теорем

1.4 Выводы по главе

Сначала мы классифицировали все квадратичные теории Хорндески с кручением. Мы доказали запрещающую теорему для этих теорий, которая устанавливает, что невозможно получить несингулярную FLRW-космологию, которая всегда свободна от градиентных неустойчивостей против скалярного возмущения и имеет гравитон, который всегда распространяется со скоростью, не превышающей скорость света.

Однако при обобщении на полные теории Хорндески-Картана — а именно, не ограничиваясь более простой квадратичной теорией и включая члены до $(\nabla\nabla\phi)^3$ в действии — мы показали, что запрещающая теорема не может выполняться, и возможно построить классически “свободные от патологий” модели, то есть с несингулярными, устойчивыми в любой момент времени и досветовыми¹⁸ космологическими решениями, по крайней мере в линейном порядке теории возмущений.

Сначала мы обсудили, как последнее сравнивается с более простыми формами теории, а именно: с исторически общей формой Хорндески без кручения и упрощенной версией теории с кручением (а именно, без G_5). Мы подробно объяснили, где обычные запрещающие теоремы нарушаются при обобщении от первых двух к последней полной теории Хорндески-Картана.

Кратко говоря, мы отметили, что математически и физически необоснованное предположение о пространстве-времени без кручения (или ограничение до квадратичной теории с кручением) приводит к случайным соотношениям в линейном порядке, которые ограничивают “свободные от патологий” решения в этих более простых вариациях теории в форме “запрещающих теорем”.

Кручение решает проблемы просто потому, что *тензорный сектор* и *скалярный сектор* связываются *различными способами* с возмущениями кручения, тем самым разрывая обычные связи между двумя секторами, которые в противном случае привели бы к запрещающей теореме. А именно, несмотря на то, что возмущения кручения не динамические, эти связи метрического возмущения и

¹⁸Напомним, что в рамках принятых в данной работе обозначений мы определяем “досветовые и сверхсветовые возмущения” как возмущения, распространяющиеся со скоростью ниже или выше скорости света, соответственно.

скаляра Хорндески с полем Кручения значительно изменяют *расходящимися способами* коэффициенты в действии для конечного гравитона и скалярной моды. Таким образом, критерии устойчивости, досветового распространения возмущений и отсутствия духов ограничивают очень разные комбинации функций Лагранжа для обоих секторов, позволяя независимо удовлетворять их без встречи каких-либо противоречий в какой-то момент эволюции.

Мы также показали, что все свободные от патологий модели должны иметь своеобразное дисперсионное соотношение для гравитационных волн. Это открывает вопрос, могут ли быть феноменологические следы, оставленные этим нетривиальным гравитоном.

Глава 2

Взаимодействие скаляра и фотона в теории Хорндески и ее расширениях

2.1 Измерения скорости гравитационных волн и ограничения на скалярно-тензорные теории

С наступлением эры многоканальной астрономии первоначально казалось, что большой класс скалярно-тензорных модификаций гравитации Эйнштейна исключается строгим совпадением скорости света (c) и гравитации (c_g). В частности, почти одновременная регистрация гравитационно-волнового сигнала от события GW170817 [1] и гамма-всплеска GRB170817A [3; 4] установила сильное ограничение:

$$\left| \frac{c_g}{c} - 1 \right| \leq 5 \times 10^{-16}, \quad (2.1)$$

что, по-видимому, исключает теории, предсказывающие значительное отклонение c_g от c . Для краткости далее мы будем называть гравитационные волны (GW), распространяющиеся со скоростью c , “световыми” GW (что согласуется с введёнными ранее обозначениями “до-/сверх- световых возмущений”).

В частности, казалось бы, что выражение (2.1) исключает большой класс скалярно-тензорных теорий для поздней космологии. А именно, тех случаев, когда скалярное поле интерпретируется как тёмная энергия.

Тем не менее, ясно, что ограничение (2.1) по существу указывает лишь *на отношение* между гравитацией и светом. Оно не исключает напрямую модифицированные теории гравитации, которые могут быть значимы на космологических масштабах, без изначального предположения о свете — а именно о скорости c — на этих масштабах. Стандартный подход состоит в принятии следующего предположения:

- б) Фотон электродинамики Максвелла (ЕМ) остается минимально связанным даже на масштабах, где общая теория относительности (ОТО) может требовать модификации. А именно, $c = 1$ даже на масштабах, где скаляр темной энергии доминирует в расширении Вселенной,

таким образом, мы видим $c_g = c = 1$. Однако *гравитация связывается универсально со всей материей*, и в принципе можно исследовать альтернативное предположение (а), где *скалярная модификация гравитации* на космологических масштабах разделяет это свойство *универсальной связи*, например:

- а) Скаляр темной энергии (DE) связывается как с гравитоном, так и с фотоном определенным образом, *так что гравитационные волны распространяются со скоростью света*.

$$\frac{c_g(t)}{c(t)} = 1. \quad (2.2)$$

Предположение (б) удобно соответствует ЕМ на *всех* масштабах, главным образом для согласованности с лабораторными экспериментами. Однако оно также быстро запрещает дополнительный ввод для более объективного ограничения модифицированных теорий гравитации.

Предположение (а) — которое мы принимаем в этой части работы и которое явно содержит (б) как частный случай — открывает новый набор наблюдательных возможностей: если DE также связывается с фотоном, требуются новые типы лабораторных и астрофизических тестов [69].

Более того, (а) вновь открывает путь к теориям с не минимальной связью для DE, которые ранее считались исключенными [47—52; 66]. Интересно, что не минимальные связи могут быть значимы в свете недавних данных ВАО (от англ. Baryonic Acoustic Oscillations) от DESI (от англ. Dark Energy Spectroscopic Instrument), благоприятствующих динамической DE [112; 113]. Для этой цели

потребовалась бы теория Хорндески с не минимальными связями скаляра с гравитацией для безопасного пересечения фантомного разделителя [114; 115] (см., однако, обсуждения в *напр.* [116–120]). Хотя эти возможности не являются окончательными [121], теории, представленные в этой работе — широкое обобщение теорий, использованных в [114; 115] — открывают новые возможности для космологов.

Мы рассматриваем наиболее общие вырожденные высшего порядка скалярно-тензорные модификации гравитации (DHOST), классифицированные на сегодняшний день, которые по построению свободны от духов Остроградского [32; 54–57]. Мы выводим связи DE–фотон, необходимые для того, чтобы гравитационные волны распространялись со скоростью света в этих DHOST-теориях (2.2) — с теориями Хорндески и Расширенными теориями Хорндески как частными случаями. Мы находим, что необходимы только два типа связей DE–фотон. Один из них участвует в новой световой “Расширенной теории Хорндески” (ВН), которую мы представляем ниже и для которой подавлен распад GW на DE. В целом проходящей сильные ограничения как на скорость распространения гравитационных волн (совпадающую со скоростью света) [47–52], так и на их нераспад [53].

2.1.1 Вырожденные скалярно-тензорные теории высшего порядка (DHOST)

В стандартной параметризации мы рассматриваем 19 потенциалов, зависящих от скалярного поля π . Они обобщают действие Эйнштейна-Гильберта в четырех измерениях (4D) с минимальными и неманимальными связями π с гравитацией. Обозначим 19 скалярных потенциалов как a_i, b_j, f_k, G_k , где $i = 1 \dots 5, j = 1 \dots 10$ и $k = 2, 3$. В принципе, мы допускаем, что все эти потенциалы являются функциями скалярного поля π и $X = \pi_\mu \pi^\mu$, где $\pi_\mu = \nabla_\mu \pi$ ¹. Однако не все эти потенциалы свободны. Между ними существуют соотношения, необходимые для отсутствия духа Остроградского. Эти соотношения,

¹Это определение X типично в литературе по DHOST. Однако отметим, что оно отличается от обозначений, принятых в предыдущем разделе для теории Хорндески. Также, в соответствии с соглашениями в литературе по DHOST, в этой части работы мы используем космическое время, в отличие от конформного времени в предыдущих разделах.

известные как условия вырожденности, разделяют пространство теорий DHOST на различные классы. Таким образом, во всех рассматриваемых теориях всегда меньше 19 свободных скалярных потенциалов от π и X , с конкретным числом свободных функций, зависящим от класса. Например, в теории Хорндески имеется до 4 свободных функций [7; 9]. Полная классификация с количеством свободных функций и их свойствами приведена в [55–57]. Ниже мы приводим только условия вырожденности для наиболее физически значимых случаев.

Лагранжиан записывается как

$$\mathcal{L}_{\text{DHOST}_\pi} = f_2 R + f_3 G_{\mu\nu} \pi^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{Linear}} + \mathcal{L}_{\text{Quad}} + \mathcal{L}_{\text{Cubic}}, \quad (2.3)$$

где R - скаляр Риччи, $G_{\mu\nu}$ - тензор Эйнштейна, а ∇ - ковариантная производная, вычисленная с помощью метрики D -мерного многообразия (с сигнатурой $-, +, +, +, \dots$), и $\mu = 0, 1, \dots, D-1$. Основные результаты в этой работе будут для обычного случая $D = 4$, однако, как мы объясним позже, их проще вывести, начиная с $D = 5$, что мы явно укажем при необходимости.

Последние три члена в (2.3) содержат диффеоморфизм-инвариантные комбинации, соответственно, (до) линейных, квадратичных и кубических по $\nabla^2\pi$ членов. Явно:

$$\mathcal{L}_{\text{Linear}} = G_2 + G_3 \square\pi \quad (2.4)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Quad}} = \sum_{i=1}^5 a_i(\pi, X) L_i^{(2)}, \quad (2.5)$$

где $L_i^{(2)}$ имеют порядок $(\nabla^2\pi)^2$,

$$\begin{aligned} L_1^{(2)} &= (\pi_{\mu\nu})^2, & L_2^{(2)} &= (\square\pi)^2, & L_3^{(2)} &= \square\pi (\pi_{\mu\nu}\pi^\mu\pi^\nu), \\ L_4^{(2)} &= (\pi_{\mu\rho}\pi^\mu)^2, & L_5^{(2)} &= (\pi_{\mu\nu}\pi^\mu\pi^\nu)^2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

и

$$\mathcal{L}_{\text{Cubic}} = \sum_{j=1}^{10} b_j(\pi, X) L_j^{(3)} \quad (2.7)$$

где $L_j^{(3)}$ имеют порядок $(\nabla^2\pi)^3$,

$$L_1^{(3)} = (\square\pi)^3, \quad L_2^{(3)} = \square\pi(\pi_{\mu\nu})^2, \quad L_3^{(3)} = (\pi_{\mu\nu})^3,$$

$$\begin{aligned}
L_4^{(3)} &= (\square\pi)^2(\pi_{\mu\nu}\pi^\mu\pi^\nu), & L_5^{(3)} &= \square\pi(\pi_{\mu\nu}\pi^\mu)^2, \\
L_6^{(3)} &= (\pi_{\rho\sigma})^2(\pi_{\mu\nu}\pi^\mu\pi^\nu), & L_7^{(3)} &= \pi^{\mu\nu}\pi_{\nu\rho}\pi^{\rho\sigma}\pi_\mu\pi_\sigma, \\
L_8^{(3)} &= (\pi^{\mu\nu}\pi_\mu)^2(\pi^{\rho\sigma}\pi_\rho\pi_\sigma), & L_9^{(3)} &= \square\pi(\pi^{\rho\sigma}\pi_\rho\pi_\sigma)^2, \\
L_{10}^{(3)} &= (\pi^{\rho\sigma}\pi_\rho\pi_\sigma)^3
\end{aligned} \tag{2.8}$$

2.1.1.1 Классы вырожденности

Как объяснялось ранее, не все скалярные потенциалы a_i , b_j , f_k , G_k являются свободными функциями. Если бы они были свободны, теория почти во всех случаях содержала бы духовную степень свободы.

Таким образом, существуют различные теории в DHOST в зависимости от выбранных соотношений между потенциалами a_i , b_j , f_k , G_k . Важно отметить, что в некоторых случаях соотношения, устраняющие духов, также устраняют гравитон или приводят к градиентной неустойчивости. В этой работе мы сосредоточимся на феноменологически значимых случаях, где гравитон существует, нет духа Остроградского и можно избежать градиентной неустойчивости. В частности, для результатов ниже достаточно показать соотношения вырожденности, приводящие к теории Хорндески и ВН:

$$f_2 = G_4, \quad a_1 = -a_2 = 2G_{4X} + XF_4, \quad a_3 = -a_4 = 2F_4, \quad a_5 = 0, \tag{2.9}$$

$$f_3 = G_5, \quad 3b_1 = -b_2 = \frac{3}{2}b_3 = G_{5X} + 3XF_5, \quad b_8 = b_9 = b_{10} = 0$$

$$-2b_4 = b_5 = 2b_6 = -b_7 = 6F_5,$$

где первая, теория Хорндески, получается при $F_4 = F_5 = 0$. Теперь, только с одной ненулевой функцией, либо F_4 , либо F_5 в предыдущих соотношениях, теория (2.3) является вырожденной и свободной от духов.

Если обе F_4 и F_5 ненулевые, то они должны быть связаны уравнением (2.33), показанным ниже. Последнее известно как теория ВН (см. [55–57] для более вырожденных теорий и их свойств).

2.1.2 Подклассы теории удовлетворяющие ограничениям на скорости

Считалось, что большой набор теорий DHOST — включая теории Хорндески и ВН, показанные выше — в определенной степени ограничены для выполнения (2.2). Как мы отметили, это предположение основывалось на (b), а именно, что нет связей скаляра с фотоном, или другими словами, что фотон только минимально связан с гравитацией.

Таким образом, в этом случае при скорости фотона $c(t) = 1$ остается только вычислить скорость гравитационных волн c_g . Этот стандартный результат (см. следующий раздел для более общего вычисления) показывает только два варианта для выполнения $c(t) = c_g(t) = 1$. Например, в случае теории Хорндески:

$$c_g^2 = \frac{2G_4 - 2\ddot{\pi} X G_{5,X} + X G_{5,\pi}}{2G_4 - 4X G_{4X} - 2X \dot{\pi} H G_{5X} - X G_{5,\pi}} \quad (2.10)$$

в принципе можно выбрать G_4 и G_5 так, чтобы $c_g = 1$, но отметим, что $\ddot{\pi}$ явно появляется в уравнении (2.10). Поскольку G_4 и G_5 являются функциями только первых производных скаляра ($\dot{\pi}$), а не $\ddot{\pi}$, то потребуется использовать уравнения движения фоновых полей, чтобы выразить $\ddot{\pi}$ как функцию $\dot{\pi}$, π , a . Но это означает, что выбор лагранжиана будет зависеть от массовых величин (от англ. *on the mass shell*) и, в частности, от всего материального содержания космологического решения, а именно от скалярных потенциалов G_2 , G_3 и так далее. Это явно нежелательный вариант, и поэтому для более сильного условия светового распространения гравитационных волн остаётся только один вариант в теории Хорндески:

$$G_{4,X} = 0, G_5 = 0.$$

Это означало бы, что все неманимальные связи производных скаляра с гравитацией исключаются, и допустимы только теории типа Бранса-Дикке, с наиболее общими связями с кривизной вида $G_4(\pi)R$.

В теории ВН ситуация аналогична, хотя возможно более общее решение для получения $c_g = 1$. А именно, без G_5 и F_5 :

$$F_4 = \frac{G_{4X}}{X}.$$

Однако эта теория также становится неприемлемой, поскольку приводит к распаду гравитационных волн на скаляр темной энергии [53], как мы обсудим ниже. Таким образом, в любом случае мы возвращаемся к теориям типа Бранса-Дикке, показанным выше.

Теперь альтернативой, которая не исследовалась в литературе, является наше новое предложение о связях скаляра с фотоном [66; 67]. Таким образом, отныне примем гипотезу (а), и к \mathcal{LDHOST}_π мы должны добавить точные связи скаляра DE с фотоном, чтобы мы наблюдали распространение гравитационных волн со скоростью света (2.2).

2.2 Связи скаляра с фотоном в компактификациях Калуцы-Клейна

Мы показали в [66], что простой способ получить необходимые связи скаляра с фотоном в 4D - начать с 5-мерной (D) постановки: рассмотрим действие DHOST кратковременно в 5D,

$$\int \sqrt{-^{(5)}g} d^5x \mathcal{L}_{\text{DHOST}_\pi}. \quad (2.11)$$

Записывая 5D метрику $^{(5)}g$ как

$$^{(5)}g_{BC} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + A_\mu A_\nu & A_\mu \\ A_\nu & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

где латинские индексы $B = 0, \dots, 4$, а греческие $\mu = 0, \dots, 3$. Рассматривая это просто как инструмент для нашей цели в 4D, мы компактифицируем 5-е измерение с условием цилиндра Калуцы [122], где мы сразу предположили в уравнении (2.12) постоянный дилатон — а именно, $^{(5)}g_{44} = 1$ — и что 4D поля g и A_μ не зависят от 5-го измерения. Для этой цели мы сначала можем выразить 5D тензор Риччи $R_{AB}^{(5)}$ и $\nabla_A^{(5)}\nabla_B^{(5)}\pi$ (где $\nabla^{(5)}$ - связность, ассоциированная с 5D метрикой в уравнении (2.12)) через 4D поля, как

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(5)} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^\rho + A_\mu A_\nu R_{44}^{(5)} \\ &+ A_\nu \left(R_{4\mu}^{(5)} - A_\mu R_{44}^{(5)} \right) + A_\mu \left(R_{4\nu}^{(5)} - A_\nu R_{44}^{(5)} \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где,

$$R_{44}^{(5)} = \frac{1}{4} F_{\mu\rho} F^{\mu\rho} \quad (2.14)$$

$$R_{\mu 4}^{(5)} = \frac{1}{2} \nabla^\nu F_{\mu\nu} + A_\mu R_{44}^{(5)} \quad (2.15)$$

и

$$\nabla_\mu^{(5)} \nabla_\nu^{(5)} \pi = \nabla_\mu \nabla_\nu \pi - \frac{1}{2} A_\mu F_{\nu\rho} \nabla^\rho \pi - \frac{1}{2} A_\nu F_{\mu\rho} \nabla^\rho \pi \quad (2.16)$$

$$\nabla_4^{(5)} \nabla_\mu^{(5)} \pi = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \nabla^\nu \pi \quad (2.17)$$

$$\nabla_4^{(5)} \nabla_4^{(5)} \pi = 0. \quad (2.18)$$

Теперь мы можем использовать последние соотношения с $\nabla_A^{(5)} \pi = \partial_A \pi$ — где $\partial_4 \pi = 0$ из-за наших предыдущих предположений — в лагранжиане DHOST (2.3). Мы дополнительно масштабируем 4D поля, чтобы перепоглотить $\int dx^4$, и таким образом можем переписать (2.11) только через 4D поля.

В целом, после компактификации, теория (2.11) принимает форму обычного DHOST плюс сектор связи скаляра с фотоном в 4D (2.19). Как обычно, $U(1)$ калибровочная инвариантность в векторном секторе наследуется из диффеоморфизмов в 5D.

Ясно, что поскольку 4-вектор A_μ и 4D метрика являются просто компонентами одной и той же метрики в 5D, их скорость в 4D в общем случае связана быть *одинаковой*. Предостережение в том, что мы нарушили изотропию в 5D, компактифицируя одно пространственное измерение и игнорируя динамику дилатона. Таким образом, существуют особые случаи с неравными скоростями, которые мы выделяем ниже.

2.2.1 DHOST со связями темной энергии с фотоном

Отныне в 4D полное действие DHOST со связями DE-фотон имеет вид,

$$\int \sqrt{-g} d^4x (\mathcal{L}_{\text{DHOST}_\pi} + \mathcal{L}_{\text{DHOST}_A}), \quad (2.19)$$

с $\mathcal{L}_{\text{DHOST}_\pi}$ заданным в (2.3). Сектор DE-фотон:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{DHOST}_A} &= \frac{f_3}{8} (4F_{\mu\nu}\nabla_\rho F^{\nu\rho}\pi^\mu + F^2\Box\pi - 4F_\mu{}^\nu F^{\mu\rho}\pi_{\nu\rho}) \\ &\quad - \frac{f_2}{4} F^2 + l_{\text{Quad}_A} + l_{\text{Cubic}_A},\end{aligned}\tag{2.20}$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, и с очевидной нотацией, параллельной (2.5) и (2.7),

$$\begin{aligned}l_{\text{Quad}_A} &= \frac{a_1}{2} (F_{\mu\nu}\pi^\mu)^2 \\ l_{\text{Cubic}_A} &= \frac{1}{2} (F_{\mu\nu}\pi^\mu)^2 (b_2 \Box\pi - b_6 \pi^{\rho\sigma}\pi_\rho\pi_\sigma) + b_3 \frac{3}{4} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \pi^{\mu\rho} \pi^\nu \pi^\sigma,\end{aligned}\tag{2.21}$$

В принципе идентифицируются три типа связей DE-фотон $F^2 \nabla^2 \pi$, $F^2 (\nabla \pi)^2$ и $F^2 \nabla^2 \pi (\nabla \pi)^2$. Однако последний — пропорциональный b_3 — будет удален ниже условием распространения гравитационных волн со скоростью света (2.2).

Вкратце, для каждого из 6 вкладов в $\mathcal{L}_{\text{DHOST}_\pi}$, помеченных скалярными потенциалами $f_2, f_3, a_1, b_2, b_3, b_6$, есть соответствующий сектор DE-фотон в уравнении (2.20).

2.2.1.1 Условия распространения гравитационных волн со скоростью света в DHOST

Как объявлено, не все лагранжианы в уравнении (2.19) распространяют гравитационные и электромагнитные волны с одинаковой скоростью. Подход ниже — вычислить скорости гравитона и фотона на космологическом фоне для действия (2.19) и найти лагранжианы, которые могут удовлетворить уравнению (2.2). Заметим, что предыдущие случаи предполагают, что результаты ниже могут также выполняться на (по крайней мере) сферически симметричных фонах [123; 124].

Скалярная мода DHOST *не модифицируется* новыми членами $\mathcal{L}_{\text{DHOST}_A}$ на космологическом фоне. Таким образом, мы не обсуждаем далее скалярный сектор в этом разделе. Более того, мы будем предполагать классы DHOST, которые фактически распространяют гравитон [32; 54–57].

Как прежде, мы рассматриваем возмущения первого порядка на пространственно плоском FLRW фоне. С возмущенной метрикой

$$ds^2 = (\eta_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu\tag{2.22}$$

где,

$$\eta_{\mu\nu} = -dt^2 + a(t)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (2.23)$$

мы записываем только симметричное, бесследовое и поперечное тензорное возмущение h_{ij} и два поперечных векторных возмущения S_i, F_i как,

$$\delta g = (2 S_i dt dx^i + (\partial_i F_j + \partial_j F_i + 2 h_{ij}) dx^i dx^j) , \quad (2.24)$$

где мы обозначаем пространственные индексы строчными латинскими буквами, $i = 1, 2, 3$. Возмущенный скаляр DHOST $\pi(x^\mu)$ записывается как $\pi(t) + \chi(t, \vec{x})$ в линеаризованных выражениях, где $\pi(t)$ - фоновое скалярное поле. Наконец, на космологической среде фотон сводится к поперечному возмущению $A_i(t, \vec{x})$, с нулевым фоном из-за изотропии.

Квадратичное действие для гравитона имеет вид,

$$\mathcal{S}_{Tensor} = \frac{1}{2} \int dt d^3x a^3 \left(\mathcal{G}_\tau \dot{h}_{ij}^2 - \frac{\mathcal{F}_\tau}{a^2} (\partial_k h_{ij})^2 \right) , \quad (2.25)$$

с $f_{3,X} = \frac{\partial f_3}{\partial X}$ и так далее, где,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\tau &= 2f_2 + 2\ddot{\pi} X f_{3,X} - X f_{3,\pi} - 2X a_1 \\ &+ 2X(3\dot{\pi} H + \ddot{\pi})b_2 + 6\dot{\pi} X H b_3 + 2\ddot{\pi} X^2 b_6 , \end{aligned} \quad (2.26)$$

и

$$\mathcal{F}_\tau = 2f_2 - 2\ddot{\pi} X f_{3,X} + X f_{3,\pi} , \quad (2.27)$$

в то время как действие для фотона записывается как,

$$\mathcal{S}_{Vector} = \frac{1}{4} \int dt d^3x a \left(\mathcal{G}_A \dot{A}_i^2 - \frac{\mathcal{F}_A}{a^2} (\partial_k A_i)^2 \right) , \quad (2.28)$$

где,

$$\mathcal{G}_A = \mathcal{G}_\tau - 3\dot{\pi} X H b_3 \quad (2.29)$$

$$\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_\tau . \quad (2.30)$$

Как и ожидалось, по построению, коэффициенты в квадратичных действиях схожи, *напр.* как в (2.30). Теперь, с их скоростями в квадрате, соответственно, $c_g^2 = \frac{\mathcal{F}_\tau}{\mathcal{G}_\tau}$ и $c^2 = \frac{\mathcal{F}_A}{\mathcal{G}_A}$, мы находим их отношение,

$$\frac{c_g^2}{c^2} = 1 - 3 \frac{\dot{\pi} X H b_3}{\mathcal{G}_\tau} . \quad (2.31)$$

Таким образом, в принципе, теории DHOST с

$$b_3 = 0, \quad (2.32)$$

сохраняли бы единичное отношение скоростей (2.2). Именно тот факт, что гравитон распространяется с той же скоростью, что и векторная мода в этих теориях, в свете экспериментального ограничения (2.2) — и из-за $U(1)$ калибровочной инвариантности — мотивирует интерпретировать эту векторную моду как фотон.

Однако напомним, что в зависимости от вырожденного класса DHOST, скалярный потенциал b_3 *может не быть свободной функцией*, но может быть фиксирован также важными условиями вырожденности.

Наконец, отметим, что если бы мы рассмотрели дилатон, а именно, если бы мы взяли ${}^{(5)}g_{44} = \Phi$ в нашей метрической анзаце, с фоном $\Phi(t)$, то вместо (2.31) мы получили бы,

$$\frac{c_g^2}{c^2} = 1 - 3 \frac{\dot{\pi} X (H - \frac{\dot{\Phi}}{\Phi}) \Phi b_3}{\mathcal{G}_\tau}.$$

Восстанавливая изотропию $\dot{\Phi} = \dot{a}$, мы увидели бы, что (2.2) всегда выполняется. Хотя этот выбор *нефизичен* (потому что в компактификации изотропия нарушается предположением, что одно измерение отличается от других, а именно, компактно и очень малого радиуса), это как минимум перекрестная проверка наших результатов. Однако мы также обсуждаем альтернативную точку зрения [67] Раздел VC.

2.2.1.2 DHOST, удовлетворяющие условиям вырожденности и скорости гравитационных волн

Чтобы применить условие (2.32) в DHOST, остается задача установить, согласуется ли оно с условием вырожденности класса. Из полной классификации в [56] Таблица 1 и [55] ясно, что существует много скалярно-тензорных теорий с гравитоном, которые могут быть сделаны световыми с уравнением (2.32).

Кратко покажем несколько релевантных негативных случаев: Контрпример, где распространение гравитационных волн со скоростью света несовместимо с условием вырожденности - смешанная квадратичная плюс кубическая ВН [125;

126]. Посмотрим: условие вырожденности есть²

$$F_4 G_{5,X} X = -3F_5 \left(G_4 - 2X G_{4,X} - \frac{X}{2} G_{5,\pi} \right), \quad (2.33)$$

в то время как $b_3 = 0$ подразумевает $F_5 = -\frac{G_{5,X}}{3X}$. Предполагая $F_5, G_{5,X} \neq 0$ находим из (2.33) соотношение $F_4(G_4, G_{4,X}, G_{5,\pi})$, которое устанавливает $\mathcal{G}_T = \mathcal{G}_A = 0$, что является сингулярным случаем без гравитона и фотона.

Однако заметим, что ветвь $F_5 = G_{5,X} = 0$ избегает проблемы, потому что (2.33) автоматически удовлетворяется с полностью свободной F_4 . См. обсуждение ниже в случае (ii).

Другой контрпример - только кубическая, или так называемая DHOST ³N-I, которая содержит кубические теории Хорндески и ВН как особые случаи: как отмечено в [55] в этом классе $b_3 = 2b_1$, с b_1 свободной, с условием $b_1 \neq 0$. Таким образом в этом классе (2.32) не может быть выполнено. Если мы все же возьмем $b_1 = 0$, то мы будем вынуждены в другой вырожденный класс, DHOST ³N-II [55], который однако не имеет гравитона [56].

Теперь покажем некоторые положительные случаи, где оба условия – распространения гравитационных волн со скоростью света и вырожденности – могут быть удовлетворены. Мы сосредоточимся на наиболее феноменологически релевантных классах. Самый простой успешный случай:

- i. Каждая **квадратичная DHOST с соответствующими связями DE-фотон**, $\mathcal{L}_{\text{DHOST}_A} = -\frac{f_2}{4} F^2 + \frac{a_1}{2} (F_{\mu\nu} \pi^\mu)^2$, удовлетворяет уравнению (2.2). А именно, действие (2.19) с $b_i = 0$ и $f_3 = 0$ имеет световые GW. Условия вырожденности на некоторые из функций a_i , для множества классов теорий, даны например в [55] Прил. С.

В частности, теория (i) включает *квадратичную теорию Хорндески и Расширенные теории Хорндески (ВН₄)* как особые случаи. Теория (i) также включает как световой класс, например, DHOST ²N-III/ Па, который может оставаться феноменологически релевантным [56], хотя и отключенным от класса Хорндески.

²Мы берем соглашение о знаке для F_4, F_5 из [54; 57]. Однако отметим противоположный знак для F_4 , взятый в [51; 53; 71]

Другой успешно световой случай в смешанном квадратично-кубическом классе DHOST:

- ii. **Квадратичная ВН плюс кубическая теория Хорндески, с $f_3 = G_5(\pi)$ и соответствующими связями ДЕ-фотон** распространяет световые GW. А именно, действие (2.19) с соотношениями (2.9), и с $b_j = 0$ для $j = 1, \dots, 10$.

Явно,

$$\int d^4x (\mathcal{L}_{BH_{4\pi}} + \mathcal{L}_{BH_{4A}} + \mathcal{L}_{H_{5\pi}} + \mathcal{L}_{H_{5A}}), \quad (2.34)$$

с

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BH_{4\pi}} = & G_2 + G_3 \square \pi + G_4 R - 2G_{4,X} ((\square \pi)^2 - \pi_{\mu\nu}^2) \\ & - F_4 \left(X (\square \pi)^2 - X \pi_{\mu\nu}^2 + 2(\pi_{\mu\nu} \pi^\mu)^2 - 2 \square \pi \pi_{\mu\nu} \pi^\mu \pi^\nu \right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{BH_{4A}} = -\frac{G_4}{4} F^2 + \frac{2G_{4,X} + X F_4}{2} (F_{\mu\nu} \pi^\mu)^2,$$

$$\mathcal{L}_{H_{5\pi}} = G_5 G^{\mu\nu} \pi_{\mu\nu} \quad (2.35)$$

$$\mathcal{L}_{H_{5A}} = \frac{G_5}{8} (4F_{\mu\nu} \nabla_\rho F^{\nu\rho} \pi^\mu + F^2 \square \pi - 4F_\mu{}^\nu F^{\mu\rho} \pi_{\nu\rho}).$$

G_5 - функция только от π , и мы взяли $F_5 = 0$ (в стандартной нотации ВН [57]).

2.2.1.3 Теория ВН и подавление распада гравитационных волн

В [53] было показано, что — в случае когда $c_g(t) \neq 1$ — требуется дополнительное соотношение между скалярными потенциалами в теории ВН, чтобы подавить распад GW на ДЕ. Действительно, выражение (2.36) должно быть пренебрежимо (см. уравнение (87) в [53]), потому что если бы GW значительно распались на ДЕ, мы бы не наблюдали их в первую очередь. Как отмечено в [53], без связей скаляра с фотоном, наиболее общая теория, с которой возможно удовлетворить уравнению (2.36), это теория типа Бранса-Дикке, с наиболее общими связями с кривизной вида $G_4(\pi)R$. Другими словами $G_4(\pi, X)$, G_5 , F_4 , F_5 были бы исключены.

Однако теория (ii), которую мы только что предложили в уравнении (2.34), дает больше свободы в скалярных потенциалах, потому что распространение гравитационных волн со скоростью света автоматически удовлетворяется³. Как следствие, как мы покажем, теперь становится возможным подавить распад GW на скаляр DE, фиксируя новый свободный потенциал F_4 . Посмотрим как: Сначала заметим, что $b_3 = \frac{2}{3}(G_{5,X} + 3XF_5) = 0$ удовлетворяется. Затем уравнение (2.2) следует; то есть, в теории (ii) гравитационные волны автоматически световые *без фиксации каких-либо скалярных потенциалов*. Во-вторых, эта теория свободна от духов Остроградского: условие вырожденности в смешанной квадратично-кубической ВН уравнение (2.33) также автоматически удовлетворяется $G_{5,X} = F_5 = 0$ (Заметим, что теория с $F_5 = -\frac{G_{5,X}}{3X} \neq 0$, которая также устанавливает $b_3 = 0$, не имеет тензорных и векторных мод, как только мы накладываем уравнение (2.33)). В-третьих, легко убедиться, что $\mathcal{LH5A}$ приводит к уравнениям движения второго порядка и, следовательно, не содержит духов Остроградского.

Существенный аспект в теории (ii) - что она имеет как раз необходимое количество свободы, такое что в подклассе внутри нее, распад GW на DE может быть подавлен: Действительно,

$$F_4 \left(4G_4 + X(2G_{4,X} + 3G_{5,\pi}) \right) + XF_{4,X} \left(2G_4 + XG_{5,\pi} \right) + 4G_{4,X}^2 + 4G_4G_{4,XX} + G_{5,\pi} \left(4G_{4,X} + 2XG_{4,XX} + G_{5,\pi} \right) = 0 \quad (2.36)$$

где мы уже использовали $G_{5,X} = F_5 = 0$ из определения (ii). Заметим, что это ограничение не зависит от H и $\ddot{\pi}$, таким образом также не зависит от материального содержания.

Поскольку все скалярные потенциалы — в частности $F_4(\pi, X)$ — остаются свободными (при этом также удовлетворяя условию распространения гравитационных волн со скоростью света), существуют теории в (ii), для которых (2.36)

³Отметим, что в [71] рассматривался похожий на вид лагранжиан на \mathcal{L}_{H5A} с целью подавить распад GW при сохранении их распространения со скоростью света, $\mathcal{L}_{SVT}^{(3)} \propto \bar{g}_{\alpha\beta}(g, \pi, \nabla\pi) \tilde{F}^{\mu\alpha} \tilde{F}^{\nu\beta} \pi_{\mu\nu}$, с \tilde{F} дуальным к F . Однако $\mathcal{L}_{SVT}^{(3)}$ и \mathcal{L}_{H5A} фундаментально различны. Их квадратичные лагранжианы и, таким образом, их векторные скорости связаны материально-зависимым образом, через комбинации H , $\ddot{\pi}$. Таким образом, в соответствии с [71] невозможно найти материально-независимое решение (2.36) и (2.2) с $\mathcal{L}_{SVT}^{(3)}$.

удовлетворяется и распад GW на DE подавлен. То есть, поскольку уравнение (2.36) линейно по F_4 , оно имеет решение [71]

$$F_4 = \frac{1}{2X^2} \left(2G_4 - X(4G_{4,X} + G_{5,\pi}) + \frac{4J_4(\pi)}{2G_4 + XG_{5,\pi}} \right), \quad (2.37)$$

где $J_4(\pi)$ - “постоянная” интегрирования (по отношению к X).

Аналогично, насколько нам известно, ограничение на распад GW [53] было вычислено только для ВН теории. В частности, потребовались бы дополнительные проверки, чтобы исключить полную теорию (i) показанную выше, которая включает квадратичную ВН *только* как частный случай.

2.3 Выводы по главе

Мы показали, что 5 наборов самосогласованных связей темной энергии с фотоном (DE-фотон) достаточно, чтобы обеспечить распространение гравитационных волн со скоростью света во всех теориях DHOST (с гравитоном), которые, во-первых, до кубичны по $\nabla^2\pi$, и, во-вторых, чьи условия вырожденности совместимы с единственным условием $b_3(\pi, X) = 0$.

Для космолога это означает: скалярно-тензорные теории с $b_3 = 0$ — такие как теория ВН (ii) уравнение (2.34) или (i) — могут потенциально использоваться с минимальным учетом скорости гравитона, потому что существуют связи DE-фотон, которые могут позаботиться о распространении гравитационных волн со скоростью света и выполнении экспериментального ограничения (2.1). Естественно, потребовались бы экспериментальные ограничения на предложенные в этой работе связи DE-фотон $\mathcal{L}_{\text{ВН}_{4A}}$, $\mathcal{L}_{\text{H}_{5A}}$ уравнение (2.34). Действительно, лабораторные и астрофизические ограничения уже наложены по крайней мере на дисформный набор связей DE-фотон [69–71].

Мы показали по крайней мере одну теорию — подкласс световой⁴ ВН — в которой распад GW на DE подавлен на космологическом фоне. Это согласуется с наблюдательными свидетельствами и релевантно, потому что такой фон является хорошим описанием в основной части траектории GW к Земле. Мы подчеркнули, что существенный тип связи DE-фотон, который позволяет подавить распад, не может быть удален конформным/дисформным преобразованием, и таким образом, дисформная инвариантность распада — доказанная в [53] — не применима к этому случаю.

Мы также показали некоторые случаи ВН и DHOST, которые остаются исключенными ограничением (2.1), так как не имеют последовательных связей DE-фотон.

⁴Напомним, что в рамках принятых в данной работе обозначений мы определяем “досветовые и сверхсветовые возмущения” как возмущения, распространяющиеся со скоростью ниже или выше скорости света, соответственно.

Заключение

В диссертации исследованы свойства возмущений в двух новых скалярно-векторно-тензорных модификациях гравитации. Центральной задачей первой части данной работы было изучение теории Хорндески на пространстве-времени с кручением и кривизной. Данное исследование в основном было сфокусировано на условиях устойчивости несингулярных космологических решений.

Во второй части данной работы центральной задачей было построение непротиворечивого расширения вырожденных скалярно-тензорных теорий (DHOST). Цель состояла в том, чтобы включить в действие $U(1)$ калибровочно-инвариантное векторное поле, связанное со скалярным полем, таким образом, чтобы скорости тензорных и векторных мод в точности совпадали на космологическом фоне.

Были получены следующие результаты:

1. Исследованы возмущения; в частности, найдены условия устойчивости и дисперсионные соотношения в однопараметрическом семействе теории Хорндески-Картана второго порядка и в подклассе теории третьего порядка. Более точно, показано, что кручение в формализме второго порядка не вводит новых степеней свободы в рассмотренных теориях Хорндески-Картана, по крайней мере, в первом порядке разложения по возмущениям. Единственными степенями свободы остаются обычный безмассовый гравитон и одна скалярная мода. Также показано, что их скорости на космологическом фоне модифицируются по сравнению с теорией без кручения.

Кроме того, однопараметрическое семейство квадратичных теорий Хорндески-Картана было разделено на два подсемейства: с Духами и без них, в зависимости от значения параметра. Кроме того, теории были классифицированы в соответствии с дисперсионным соотношением скалярной степени свободы.

2. Доказана запрещающая теорема для несингулярных и устойчивых космологических решений без скоростей звука, превышающих скорость света, в квадратичной теории Хорндески-Картана. В этом подклассе построено устойчивое решение в виде космологического отскока, но с гравитоном, который становится сверхсветовым на короткий промежуток времени.
3. Показано, что запрещающая теорема нарушается в кубической теории Хорндески-Картана. Подробно объяснено, почему аргументация запрещающей теоремы оказывается несостоятельной при попытке обобщить её с квадратичной теории на кубическую.
В соответствии с этим, в рамках кубической теории Хорндески-Картана построено устойчивое отскоковое решение без возмущений, распространяющихся со скоростями, превышающими скорость света.
4. Построена новая скалярно-векторно-тензорная теория, обладающая следующими свойствами: она содержит скалярно-тензорный сектор теории DHOST; её векторный сектор инвариантен относительно $U(1)$ калибровочных преобразований; скорость распространения тензорных и векторных мод одинакова на космологическом фоне. В подклассе таких теорий, где скалярный сектор соответствует “Расширенной теории Хорндески”, удаётся обойти проблему распада гравитационных волн на скаляры тёмной энергии.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Сергею Андреевичу Миронову за наставления, постоянное руководство, помощь на каждом этапе данной работы и бесценную поддержку. Автор также выражает искреннюю благодарность своему руководителю Валерию Анатольевичу Рубакову за наставления и руководство в течение первого года выполнения данной работы, до его скоропостижной кончины.

Автор искренне благодарит своих научных руководителей за оказанное доверие и саму возможность учиться у них.

Автор также благодарит своего соавтора и коллегу Арину Штенникову за плодотворную совместную работу, а также своих коллег Викторию Волкову и Сабира Рамазанова за все ценные дискуссии и рекомендации. Наконец, автор

выражает искреннюю благодарность своей коллеге Виктории Валенсия Вильегас за её постоянную поддержку и множество интересных дискуссий.

Автор также весьма признателен за поддержку и идеальные условия для исследований, предоставленные Институтом теоретической и математической физики МГУ имени М.В. Ломоносова.

Приложение

А Дополнительные детали для теории Хорндески–Картана до второго порядка, рассмотренной в разделе 1-1.1

Для полноты изложения приведем ниже уравнения для скалярного поля и метрики. Уравнение для кокручения было представлено в выражении (1.43).

Уравнение для скалярного поля Общековариантная форма уравнения для скалярного поля была записана в уравнении (1.42) в виде $\mathcal{E}_\phi = 0$, с функцией $F(K, \tilde{\nabla}K; \tilde{\nabla}^2\phi, \tilde{\nabla}\phi, \tilde{R})$, определенной ниже, и с

$$\begin{aligned}
 N = & \mathcal{L}_{4c,\phi} + \mathcal{L}_{4c,X} \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}^\nu \phi \\
 & + \left(\tilde{R} g_{\lambda\nu} - 4\tilde{R}_{\lambda\nu} \right) \tilde{\nabla}^\lambda \phi \tilde{\nabla}^\nu G_{4,X} - 2G_{4,X} \tilde{R}_{\lambda\beta} \tilde{\nabla}^\beta \tilde{\nabla}^\lambda \phi \\
 & + \tilde{\nabla}_\alpha G_{4,XX} \left[\tilde{\nabla}^\alpha \phi \left(\tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}^\nu \phi \right)^2 - 2\tilde{\nabla}^\mu \phi \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{\nabla}_\mu \phi \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}^\nu \phi \right. \\
 & \quad \left. - \tilde{\nabla}^\alpha \phi \tilde{\nabla}^\mu \tilde{\nabla}^\nu \phi \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \phi + 2\tilde{\nabla}^\mu \phi \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu \phi \tilde{\nabla}^\nu \tilde{\nabla}^\alpha \phi \right] \\
 & + 2\tilde{\nabla}_\beta G_{4,X\phi} \left[\tilde{\nabla}^\beta \phi \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}^\nu \phi - \tilde{\nabla}_\alpha \phi \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{\nabla}^\beta \phi \right] \\
 & + 2G_{4,X\phi} \left[\left(\tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}^\nu \phi \right)^2 - \tilde{\nabla}_\beta \tilde{\nabla}_\alpha \phi \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{\nabla}^\beta \phi \right] \\
 & + 2G_{4,XX} \left[\tilde{\nabla}^\alpha \phi \tilde{\nabla}^\lambda \phi \left(\tilde{R}^\mu{}_{\lambda\sigma\alpha} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}^\sigma \phi - \tilde{R}_{\lambda\alpha} \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}^\nu \phi \right) \right. \\
 & \quad \left. + \left(\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\mu \phi \tilde{\nabla}_\beta \tilde{\nabla}^\mu \phi \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{\nabla}^\beta \phi - \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \phi \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{\nabla}^\beta \phi \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}^\nu \phi \right) \right].
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

N может быть использовано для записи стандартного уравнения Хорндески второго порядка для скалярного поля в *бестоковом* пространстве-времени в

виде $N = 0$ путем замены $\tilde{\nabla} \rightarrow \nabla$ и $\tilde{R} \rightarrow R$. Теперь, определяя для функции $G(\phi, X)$

$$\tilde{\nabla}_\alpha G(\phi, X) = G_{,\phi} \tilde{\nabla}_\alpha \phi - G_{,X} g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\mu \phi \tilde{\nabla}_\nu \phi, \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} & F(K, \tilde{\nabla} K; \tilde{\nabla}^2 \phi, \tilde{\nabla} \phi, \tilde{R}) = N \quad (2.40) \\ & + 2\tilde{\nabla}_\alpha G_{4,X} \left(\tilde{\nabla}^\mu T^\lambda{}_\mu{}^\alpha \tilde{\nabla}_\lambda \phi - T^{\lambda\mu\alpha} T^\rho{}_{\mu\lambda} \tilde{\nabla}_\rho \phi + 3T^\lambda{}_\mu{}^\alpha \tilde{\nabla}_\lambda \tilde{\nabla}^\mu \phi \right) \\ & + 2G_{4,XX} \left[\tilde{\nabla}^\alpha \phi \tilde{\nabla}_\rho \tilde{\nabla}^\rho \phi \left(T^\lambda{}_{\beta\alpha} \tilde{\nabla}_\lambda \tilde{\nabla}^\beta \phi + \tilde{\nabla}^\mu \left(T^\lambda{}_{\mu\alpha} \tilde{\nabla}_\lambda \phi \right) \right) \right. \\ & \quad \left. - T^\lambda{}_{\nu\alpha} \tilde{\nabla}^\alpha \phi \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}^\nu \phi \tilde{\nabla}_\lambda \tilde{\nabla}^\mu \phi \right] \\ & + G_{4,X} \left[2 \left(\tilde{\nabla}^\beta T^\lambda{}_{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\lambda \tilde{\nabla}^\alpha \phi - g^{\alpha\mu} T^\lambda{}_{\alpha\beta} \tilde{\nabla}^\beta \left(T^\gamma{}_{\lambda\mu} \tilde{\nabla}_\gamma \phi \right) \right) \right. \\ & + 2T^\lambda{}_{\mu\nu} \left(\tilde{R}_{\lambda\rho}{}^{\nu\mu} \tilde{\nabla}^\rho \phi - T^{\rho\nu\mu} \tilde{\nabla}_\rho \tilde{\nabla}_\lambda \phi \right) \\ & + \tilde{\nabla}_\lambda \phi \left(-T^{\alpha\nu\mu} \tilde{\nabla}_\alpha T^\lambda{}_{\mu\nu} + \tilde{R}^\lambda{}_\alpha{}^{\nu\mu} T^\alpha{}_{\mu\nu} - \tilde{R}^{\alpha\mu\nu}{}_\mu T^\lambda{}_{\alpha\nu} - \tilde{R}^{\alpha\nu}{}_\nu{}^\mu T^\lambda{}_{\mu\alpha} \right) \\ & \quad \left. - \tilde{\nabla}^\sigma \phi \left(2\tilde{\nabla}^\nu \left(-K^\mu{}_{\mu\rho} K^\rho{}_{\nu\sigma} + K^\rho{}_{\mu\nu} K^\mu{}_{\rho\sigma} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. + \tilde{\nabla}_\sigma \left(K^\rho{}_{\mu\nu} K^\nu{}_{\rho}{}^\mu + K^\rho{}_{\mu}{}^\mu K^\nu{}_{\nu\rho} \right) + 2 \left(K^\rho{}_{\nu\sigma} R_\rho{}^\nu - K^\nu{}_{\nu\rho} R_\sigma{}^\rho \right) \right] \\ & (-1 + c) \left(G_{4,\phi X} K_\alpha{}^{\gamma\zeta} (K_{\beta\gamma\zeta} - K_{\beta\zeta\gamma}) \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi \right. \\ & + G_{4,\phi XX} K_\beta{}^{\zeta\iota} (-K_{\gamma\zeta\iota} + K_{\gamma\iota\zeta}) \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi \nabla^\gamma \phi \\ & + G_{4,XX} \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi \left(K_\alpha{}^{\zeta\iota} ((-K_{\beta\zeta\iota} + K_{\beta\iota\zeta}) \nabla_\gamma \nabla^\gamma \phi + 2(-\nabla_\gamma K_{\beta\zeta\iota} \right. \\ & \quad \left. + \nabla_\gamma K_{\beta\iota\zeta}) \nabla^\gamma \phi) - 2K_\beta{}^{\zeta\iota} (K_{\gamma\zeta\iota} - K_{\gamma\iota\zeta}) (\nabla_\alpha \nabla^\gamma \phi + \nabla^\gamma \nabla_\alpha \phi) \right) \\ & + 2G_{4,X} \left(K_\alpha{}^{\gamma\zeta} (K_{\beta\gamma\zeta} - K_{\beta\zeta\gamma}) \nabla^\beta \nabla^\alpha \phi \right. \\ & + \nabla^\alpha \phi (K^{\beta\gamma\zeta} (\nabla_\zeta K_{\alpha\beta\gamma} - \nabla_\zeta K_{\alpha\gamma\beta}) + K_\alpha{}^{\beta\gamma} (\nabla_\zeta K_{\beta\gamma}{}^\zeta - \nabla_\zeta K_{\gamma\beta}{}^\zeta)) \left. \right) \\ & + G_{4,XXX} K_\gamma{}^{\iota\kappa} (K_{\zeta\iota\kappa} - K_{\zeta\kappa\iota}) \nabla^\alpha \phi \nabla_\beta \nabla_\alpha \phi \nabla^\beta \phi \nabla^\gamma \phi \nabla^\zeta \phi \left. \right). \end{aligned}$$

Уравнение движения для метрики Общековариантная форма уравнения для метрики была записана в уравнении (1.41) в виде $\mathcal{E}_{g_{\mu\nu}} = 0$, с

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{g_{\mu\nu}} = & \frac{1}{2} G_4 \left(-2(K_\alpha^\mu{}_\beta K^{\nu\alpha\beta} + K^{\mu\alpha\beta}(K_\alpha^\nu{}_\beta + K^\nu{}_{\beta\alpha}) - K^{\mu\alpha}{}_\alpha K^{\nu\beta}{}_\beta \right. \\
& + K_\alpha^\beta{}_\beta (K^{\mu\nu\alpha} + K^{\nu\mu\alpha}) + R^{\mu\nu} \left. + g^{\mu\nu} (K_{\alpha\gamma\beta} K^{\alpha\beta\gamma} + K^\alpha{}_\alpha{}^\beta K_\beta{}^\gamma{}_\gamma + R) \right) \\
& + G_{4,\phi\phi} (-g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi + \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi) + \frac{1}{2} G_{4,\phi} (-2g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha \phi \\
& + 2(g^{\mu\nu} K_\alpha^\beta{}_\beta + K^{\mu\nu}{}_\alpha + K^{\nu\mu}{}_\alpha) \nabla^\alpha \phi - 2K^{\nu\alpha}{}_\alpha \nabla^\mu \phi + \nabla^\mu \nabla^\nu \phi - 2K^{\mu\alpha}{}_\alpha \nabla^\nu \phi + \nabla^\nu \nabla^\mu \phi) \\
& + \frac{1}{2} G_{4,\phi X} \left(-K^{\mu\nu}{}_\beta \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi - K^{\nu\mu}{}_\beta \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi \right. \\
& - 2g^{\mu\nu} \nabla^\alpha \phi (-2\nabla_\beta \nabla_\alpha \phi \nabla^\beta \phi + \nabla_\alpha \phi (\nabla_\beta \nabla^\beta \phi + K_{\beta\gamma}{}^\gamma \nabla^\beta \phi)) \\
& - \nabla_\alpha \nabla^\nu \phi \nabla^\alpha \phi \nabla^\mu \phi + K^\nu{}_{\alpha\beta} \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi \nabla^\mu \phi + \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi \nabla^\mu \nabla^\nu \phi - \nabla_\alpha \nabla^\mu \phi \nabla^\alpha \phi \nabla^\nu \phi \\
& + K^\mu{}_{\alpha\beta} \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi \nabla^\nu \phi + 4\nabla_\alpha \nabla^\alpha \phi \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi + 4K_\alpha^\beta{}_\beta \nabla^\alpha \phi \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \\
& \left. - 3\nabla^\alpha \phi \nabla^\mu \nabla_\alpha \phi \nabla^\nu \phi - 3\nabla^\alpha \phi \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \nabla_\alpha \phi + \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi \nabla^\nu \nabla^\mu \phi \right) \\
& + \frac{1}{2} G_{4,XX} \left(K^{\mu\nu}{}_\gamma \nabla^\alpha \phi \nabla_\beta \nabla_\alpha \phi \nabla^\beta \phi \nabla^\gamma \phi + K^{\nu\mu}{}_\gamma \nabla^\alpha \phi \nabla_\beta \nabla_\alpha \phi \nabla^\beta \phi \nabla^\gamma \phi \right. \\
& + 2g^{\mu\nu} \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi (\nabla_\beta \nabla_\alpha \phi (\nabla_\gamma \nabla^\gamma \phi + K_{\gamma\zeta}{}^\zeta \nabla^\gamma \phi) - \nabla_\gamma \nabla_\beta \phi \nabla^\gamma \nabla_\alpha \phi) \\
& + \nabla^\alpha \phi \nabla_\beta \nabla_\alpha \phi \nabla^\beta \nabla^\nu \phi \nabla^\mu \phi + K_{\beta\gamma}{}^\nu \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi \nabla^\gamma \nabla_\alpha \phi \nabla^\mu \phi - K^\nu{}_{\gamma\beta} \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi \nabla^\gamma \nabla_\alpha \phi \nabla^\mu \phi \\
& - \nabla^\alpha \phi \nabla_\beta \nabla_\alpha \phi \nabla^\beta \phi \nabla^\mu \nabla^\nu \phi + \nabla^\alpha \phi \nabla_\beta \nabla_\alpha \phi \nabla^\beta \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi + K_{\beta\gamma}{}^\mu \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi \nabla^\gamma \nabla_\alpha \phi \nabla^\nu \phi \\
& - K^\mu{}_{\gamma\beta} \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi \nabla^\gamma \nabla_\alpha \phi \nabla^\nu \phi + \nabla_\alpha \nabla^\alpha \phi \nabla_\beta \nabla^\beta \phi \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \\
& + 2K_\alpha{}^\gamma{}_\gamma \nabla^\alpha \phi \nabla_\beta \nabla^\beta \phi \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi - K_\alpha{}^\gamma{}_\zeta K_{\beta\zeta}{}^\gamma \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \\
& + K_\alpha{}^\gamma{}_\gamma K_{\beta\zeta}{}^\zeta \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi - \nabla_\beta \nabla_\alpha \phi \nabla^\beta \nabla^\alpha \phi \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \\
& - 2K_{\alpha\gamma\beta} \nabla^\alpha \phi \nabla^\gamma \nabla^\beta \phi \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi - 2\nabla^\alpha \phi \nabla_\beta \nabla^\beta \phi \nabla^\mu \nabla_\alpha \phi \nabla^\nu \phi \\
& - 2K_{\beta\gamma}{}^\gamma \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi \nabla^\mu \nabla_\alpha \phi \nabla^\nu \phi + \nabla^\alpha \phi \nabla_\beta \nabla_\alpha \phi \nabla^\mu \nabla^\beta \phi \nabla^\nu \phi \\
& - 2\nabla^\alpha \phi \nabla_\beta \nabla^\beta \phi \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \nabla_\alpha \phi - 2K_{\beta\gamma}{}^\gamma \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \nabla_\alpha \phi \\
& \left. + 2\nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi \nabla^\mu \nabla_\alpha \phi \nabla^\nu \nabla_\beta \phi + \nabla^\alpha \phi \nabla_\beta \nabla_\alpha \phi \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \nabla^\beta \phi - \nabla^\alpha \phi \nabla_\beta \nabla_\alpha \phi \nabla^\beta \phi \nabla^\nu \nabla^\mu \phi \right)
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} G_{4,X} \left(-K^{\nu\mu}{}_{\beta} \nabla_{\alpha} \nabla^{\beta} \phi \nabla^{\alpha} \phi + \nabla_{\alpha} \nabla^{\mu} \nabla^{\nu} \phi \nabla^{\alpha} \phi + \nabla_{\alpha} \nabla^{\nu} \nabla^{\mu} \phi \nabla^{\alpha} \phi \right. \\
& + K^{\mu\nu}{}_{\alpha} \nabla^{\alpha} \phi \nabla_{\beta} \nabla^{\beta} \phi + K^{\nu\mu}{}_{\alpha} \nabla^{\alpha} \phi \nabla_{\beta} \nabla^{\beta} \phi - 2K_{\beta}{}^{\nu}{}_{\gamma} K^{\mu\gamma}{}_{\alpha} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\beta} \phi \\
& + 2K_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\gamma} K^{\mu\nu}{}_{\alpha} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\beta} \phi - 2K_{\beta}{}^{\mu}{}_{\gamma} K^{\nu\gamma}{}_{\alpha} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\beta} \phi + 2K_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\gamma} K^{\nu\mu}{}_{\alpha} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\beta} \phi \\
& - \nabla^{\alpha} \phi \nabla_{\beta} K^{\mu\nu}{}_{\alpha} \nabla^{\beta} \phi - \nabla^{\alpha} \phi \nabla_{\beta} K^{\nu\mu}{}_{\alpha} \nabla^{\beta} \phi - 2K^{\nu\mu}{}_{\beta} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\beta} \nabla_{\alpha} \phi \\
& - K^{\mu\nu}{}_{\beta} \nabla^{\alpha} \phi (\nabla_{\alpha} \nabla^{\beta} \phi + 2\nabla^{\beta} \nabla_{\alpha} \phi) - K_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\beta} \nabla^{\mu} \phi - K^{\nu}{}_{\beta\alpha} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\beta} \nabla^{\mu} \phi \\
& - K_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\beta} \nabla^{\nu} \phi - K^{\mu}{}_{\beta\alpha} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\beta} \nabla^{\nu} \phi - g^{\mu\nu} \left(\nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} \phi \nabla_{\beta} \nabla^{\beta} \phi \right. \\
& - \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha} \phi \nabla^{\beta} \nabla^{\alpha} \phi + \nabla^{\alpha} \phi (2\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \nabla^{\beta} \phi - 2\nabla_{\beta} \nabla^{\beta} \nabla_{\alpha} \phi + (K_{\alpha}{}^{\gamma\zeta} K_{\beta\zeta\gamma} - K_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\gamma} K_{\beta}{}^{\zeta}{}_{\zeta} \\
& + 2\nabla_{\beta} K_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\gamma}) \nabla^{\beta} \phi \\
& + 2K_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\gamma} (\nabla_{\alpha} \nabla^{\beta} \phi + \nabla^{\beta} \nabla_{\alpha} \phi) + 2K_{\alpha\gamma\beta} \nabla^{\gamma} \nabla^{\beta} \phi \left. \right) \\
& - 2K^{\nu\beta}{}_{\beta} \nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\mu} \phi - (\nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} \nabla^{\nu} \phi + \nabla_{\alpha} \nabla^{\nu} \nabla^{\alpha} \phi) \nabla^{\mu} \phi - 2K_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\gamma} K^{\nu\beta}{}_{\beta} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\mu} \phi \\
& + 2K_{\alpha\gamma\beta} K^{\nu\beta\gamma} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\mu} \phi - \nabla^{\alpha} \phi \nabla_{\beta} K_{\alpha}{}^{\nu\beta} \nabla^{\mu} \phi + \nabla^{\alpha} \phi \nabla_{\beta} K^{\nu\beta}{}_{\alpha} \nabla^{\mu} \phi \\
& - K_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta} \nabla^{\beta} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\mu} \phi + 3K^{\nu}{}_{\beta\alpha} \nabla^{\beta} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\mu} \phi + 2K^{\nu\beta}{}_{\beta} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\mu} \nabla_{\alpha} \phi - \nabla^{\alpha} \nabla^{\nu} \phi \nabla^{\mu} \nabla_{\alpha} \phi \\
& + 2K_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\mu} \nabla^{\beta} \phi + \nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\mu} \nabla^{\nu} \phi - \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\mu} \nabla^{\nu} \nabla_{\alpha} \phi + 2\nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\mu} \phi \nabla^{\nu} K_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\beta} \\
& - 2K^{\mu\beta}{}_{\beta} \nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\nu} \phi - \nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} \nabla^{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi - \nabla_{\alpha} \nabla^{\mu} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\nu} \phi - 2K_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\gamma} K^{\mu\beta}{}_{\beta} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\nu} \phi \\
& + 2K_{\alpha\gamma\beta} K^{\mu\beta\gamma} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\nu} \phi - \nabla^{\alpha} \phi \nabla_{\beta} K_{\alpha}{}^{\mu\beta} \nabla^{\nu} \phi + \nabla^{\alpha} \phi \nabla_{\beta} K^{\mu\beta}{}_{\alpha} \nabla^{\nu} \phi - K_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta} \nabla^{\beta} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\nu} \phi \\
& + 3K^{\mu}{}_{\beta\alpha} \nabla^{\beta} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\nu} \phi + 2\nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\mu} K_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\beta} \nabla^{\nu} \phi + K_{\alpha\gamma\beta} K^{\alpha\beta\gamma} \nabla^{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi \\
& + K_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\beta} K_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\gamma} \nabla^{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi + R \nabla^{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi + 2\nabla_{\beta} K_{\alpha}{}^{\beta} \nabla^{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi + 2\nabla^{\mu} \nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\nu} \phi \\
& + 2K_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\beta} \nabla^{\mu} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\nu} \phi + 2K^{\mu\beta}{}_{\beta} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\nu} \nabla_{\alpha} \phi - \nabla^{\alpha} \nabla^{\mu} \phi \nabla^{\nu} \nabla_{\alpha} \phi + 2\nabla^{\mu} \phi \nabla^{\nu} \nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} \phi \\
& + 2K_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\beta} \nabla^{\mu} \phi \nabla^{\nu} \nabla^{\alpha} \phi + 2K_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\nu} \nabla^{\beta} \phi + \nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\nu} \nabla^{\mu} \phi - \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\nu} \nabla^{\mu} \nabla_{\alpha} \phi \left. \right) \\
& + c \left(\frac{1}{2} G_{4,XX} K_{\alpha}{}^{\gamma\zeta} (-K_{\beta\gamma\zeta} + K_{\beta\zeta\gamma}) \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\beta} \phi \nabla^{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi \right. \\
& + \frac{1}{2} G_{4,X} \nabla^{\alpha} \phi \left(\left(g^{\mu\nu} K_{\alpha}{}^{\gamma\zeta} (-K_{\beta\gamma\zeta} + K_{\beta\zeta\gamma}) + 2(K_{\beta}{}^{\nu}{}_{\gamma} (K_{\alpha}{}^{\mu\gamma} + K^{\mu\gamma}{}_{\alpha})) \right. \right. \\
& \left. \left. + K^{\mu\gamma}{}_{\alpha} K^{\nu}{}_{\gamma\beta} + K_{\beta}{}^{\mu}{}_{\gamma} K^{\nu\gamma}{}_{\alpha} \right) \nabla^{\beta} \phi + 2(K_{\alpha\beta\gamma} - K_{\alpha\gamma\beta}) (K^{\nu\beta\gamma} \nabla^{\mu} \phi + K^{\mu\beta\gamma} \nabla^{\nu} \phi) \right) \left. \right),
\end{aligned}$$

где ковариантные производные высшего порядка могут быть переписаны через тензоры кривизны и производные низшего порядка с использованием их коммутатора.

Векторный сектор и коэффициенты квадратичного действия в исходной форме и после использования ограничений

Тензорный сектор: Коэффициенты v_i , $i = 1, \dots, 7$ в действии для тензорного сектора (1.45) являются

$$v_1 = 2 (a^2 G_4 - \dot{\varphi}^2 G_{4,X}) , \quad (2.42)$$

$$v_2 = -2 a^2 G_4 , \quad (2.43)$$

$$v_3 = -\frac{2}{a^4} (a^2 G_4 + \dot{\varphi}^2 G_{4,X}) , \quad (2.44)$$

$$v_4 = \frac{2 G_4}{a^2} , \quad (2.45)$$

$$v_5 = \left(\frac{8 G_4 x}{a^2} + \frac{8 (x + 2 a \dot{a}) \dot{\varphi}^2 G_{4,X}}{a^4} - 8 \dot{\varphi} G_{4,\phi} \right) , \quad (2.46)$$

$$v_6 = \frac{4 \dot{\varphi}^2 G_{4,X}}{a^2} , \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} v_7 = & \frac{4}{a^2} G_4 (3 x^2 + a^2 (\dot{a}^2 - 2 a \ddot{a})) \\ & + \frac{4}{a^4} G_{4,X} (\dot{\varphi}^2 (3 x^2 + a^2 (-3 \dot{a}^2 + \dot{x} + 2 a \ddot{a})) + 2 a^2 (x + a \dot{a}) \ddot{\varphi} \dot{\varphi}) \\ & + \frac{4}{a^5} G_{4,XX} ((x + 2 a \dot{a}) \dot{\varphi}^3 (-\dot{a} \dot{\varphi} + a \ddot{\varphi})) + 4 G_{4,\phi} (-(x + a \dot{a}) \dot{\varphi} - a^2 \ddot{\varphi}) \\ & - 4 a^2 \dot{\varphi}^2 G_{4,\phi\phi} + \frac{4}{a^2} G_{4,X\phi} \dot{\varphi}^2 ((x + 3 a \dot{a}) \dot{\varphi} - a^2 \ddot{\varphi}) . \end{aligned} \quad (2.48)$$

Векторный сектор: Квадратичное действие для векторных возмущений может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_c^{Vector} = & \frac{1}{2} \int d\eta d^3x \left(h_1 V_j^{(1)} V_j^{(5)} + h_2 S_j V_j^{(5)} + h_3 \partial_i F_j \partial_i S_j + h_4 S_j V_j^{(1)} \right. \\ & + h_5 \partial_i F_j \partial_i V_j^{(2)} + h_6 \partial_i S_j \partial_i V_j^{(2)} + h_7 \partial_i F_j \partial_i V_j^{(3)} + h_8 \partial_i S_j \partial_i V_j^{(3)} \\ & + h_9 \partial_i V_j^{(2)} \partial_i V_j^{(3)} + h_{10} \partial_i V_j^{(2)} \partial_i V_j^{(4)} + h_{11} \partial_i V_j^{(3)} \partial_i V_j^{(4)} + h_{12} \partial_i S_j \partial_i V_j^{(6)} \\ & + h_{13} \partial_i V_j^{(1)} \partial_i V_j^{(6)} + h_{14} \partial_i V_j^{(5)} \partial_i V_j^{(6)} + h_{15} \partial_i F_j \partial_i \dot{S}_j + h_{16} \partial_i \dot{F}_j \partial_i V_j^{(2)} \\ & + h_{17} \partial_i \dot{F}_j \partial_i V_j^{(3)} + h_{18} (V_j^{(5)})^2 + h_{19} (S_j)^2 + h_{20} (\partial_i S_j)^2 + h_{21} (\partial_i F_j)^2 \\ & \left. + h_{22} (V_j^{(1)})^2 + h_{23} (\partial_i V_j^{(2)})^2 + h_{24} (\partial_i V_j^{(3)})^2 + h_{25} (\partial_i \dot{F}_j)^2 \right) . \end{aligned} \quad (2.49)$$

Отметим, что хотя данное действие зависит от c , динамика не зависит от этого параметра. А именно, не существует динамических векторных возмущений. Коэффициенты h_i , $i = 1, \dots, 25$ являются

$$h_1 = -\frac{8 G_4}{a^2}, \quad (2.50)$$

$$h_2 = \frac{8 a^2 G_4 x - 8 a^4 G_{4,\phi} \dot{\varphi} + 16 G_{4,X}(x + a \dot{a}) \dot{\varphi}^2}{a^4}, \quad (2.51)$$

$$h_3 = \frac{4 a^4 G_4 \dot{a} + 2 a^5 G_{4,\phi} \dot{\varphi} - 2 a^3 G_{4,\phi X} \dot{\varphi}^3 + 2 G_{4,XX} \dot{\varphi}^3 (-a \ddot{\varphi} + \dot{a} \dot{\varphi})}{a^3} - \frac{2 a G_{4,X} \dot{\varphi} (a^2 \ddot{\varphi} + (2x + a \dot{a}) \dot{\varphi})}{a^3}, \quad (2.52)$$

$$h_4 = -\frac{2 c x}{a^2} h_6, \quad (2.53)$$

$$h_5 = \frac{4 a^2 G_4 x - 4 a^4 G_{4,\phi} \dot{\varphi} + 4 G_{4,X}(x + 2 a \dot{a}) \dot{\varphi}^2}{a^4}, \quad (2.54)$$

$$h_6 = -\frac{2 G_{4,X} \dot{\varphi}^2}{a^2}, \quad (2.55)$$

$$h_7 = \frac{4 a^2 G_4 x - 4 a^4 G_{4,\phi} \dot{\varphi} + 4 G_{4,X}(x + 2 a \dot{a}) \dot{\varphi}^2}{a^4}, \quad (2.56)$$

$$h_8 = h_6, \quad (2.57)$$

$$h_9 = -\frac{4 a^2 G_4 - 4(-1 + c) G_{4,X} \dot{\varphi}^2}{a^4}, \quad (2.58)$$

$$h_{10} = \frac{1}{2} h_1, \quad (2.59)$$

$$h_{11} = -\frac{1}{2} h_1, \quad (2.60)$$

$$h_{12} = -\frac{4a^2 G_4 x - 4a^4 G_{4,\phi} \dot{\varphi} + 8G_{4,X}(x + a\dot{a}) \dot{\varphi}^2}{a^4}, \quad (2.61)$$

$$h_{13} = -\frac{1}{2}h_1, \quad (2.62)$$

$$h_{14} = -\frac{1}{2}h_1, \quad (2.63)$$

$$h_{15} = 2a^2 G_4 - 2G_{4,X} \dot{\varphi}^2, \quad (2.64)$$

$$h_{16} = -h_6, \quad (2.65)$$

$$h_{17} = -h_6, \quad (2.66)$$

$$h_{18} = \frac{1}{2}h_1, \quad (2.67)$$

$$h_{19} = \frac{1}{a^6} \left(G_4(-6a^4 x^2 + 6a^6 \dot{a}^2) + 6a^6 G_{4,\phi}(x + a\dot{a}) \dot{\varphi} - 2a^2 G_{4,X}(-(-12 + c)x^2 + 18ax\dot{a} + 6a^2 \dot{a}^2) \dot{\varphi}^2 + 6a^4 G_{4,\phi X}(x + a\dot{a}) \dot{\varphi}^3 - 6G_{4,XX}(x + a\dot{a})^2 \dot{\varphi}^4 \right), \quad (2.68)$$

$$h_{20} = a^2 G_4 - G_{4,X} \dot{\varphi}^2, \quad (2.69)$$

$$h_{21} = \frac{1}{a^5} \left(G_4(6a^3 x^2 - 4a^6 \ddot{a} + 2a^5 \dot{a}^2) - 2a^7 G_{4,\phi\phi} \dot{\varphi}^2 + 2G_{4,XX}(x + 2a\dot{a}) \dot{\varphi}^3 (a\ddot{\varphi} - \dot{a}\dot{\varphi}) + G_{4,\phi}(-2a^7 \ddot{\varphi} - 2a^5(x + a\dot{a})\dot{\varphi}) + 2a^3 G_{4,\phi X} \dot{\varphi}^2(-a^2 \ddot{\varphi} + (x + 3a\dot{a})\dot{\varphi}) + 2aG_{4,X} \dot{\varphi} \left(2a^2 \ddot{\varphi}(x + a\dot{a}) + \dot{\varphi}(3x^2 + a^2(2a\ddot{a} - 3\dot{a}^2 + \dot{x})) \right) \right), \quad (2.70)$$

$$h_{22} = -\frac{c}{a^2}h_6, \quad (2.71)$$

$$h_{23} = \frac{c}{a^2}h_6, \quad (2.72)$$

$$h_{24} = \frac{c}{a^2}h_6, \quad (2.73)$$

$$h_{25} = a^2 G_4 - G_{4,X} \dot{\varphi}^2, \quad (2.74)$$

Скалярный сектор: Коэффициенты f_i , $i = 1, \dots, 59$ в действии для скалярного сектора (1.46) являются

$$f_1 = (x + a \dot{a}) \left(-12 a^2 G_{4,\phi}(x - a \dot{a}) + 12 G_{4,\phi\phi} \dot{\phi} - \frac{24 G_{4,\phi X}(2x + a \dot{a}) \dot{\phi}^2}{a^4} + \frac{12 G_{4,\phi\phi X} \dot{\phi}^3}{a^2} - \frac{12 G_{4,\phi XX}(x + a \dot{a}) \dot{\phi}^4}{a^6} \right), \quad (2.75)$$

$$f_2 = -\frac{24 G_4 x}{a^2} - 12 G_{4,\phi} \dot{\phi} + \frac{24 G_{4,X}(-x + a \dot{a}) \dot{\phi}^2}{a^4}, \quad (2.76)$$

$$f_3 = G_4 \left(-\frac{12 x^2}{a^2} - 36 \dot{a}^2 \right) - 12 G_{4,\phi}(x + 3 a \dot{a}) \dot{\phi} + \frac{24 G_{4,X}(-2 x^2 + 3 a x \dot{a} + 3 a^2 \dot{a}^2) \dot{\phi}^2}{a^4} - \frac{12 G_{4,\phi X}(x + 3 a \dot{a}) \dot{\phi}^3}{a^2} - \frac{12 G_{4,XX}(x - 3 a \dot{a})(x + a \dot{a}) \dot{\phi}^4}{a^6}, \quad (2.77)$$

$$f_4 = 12 G_{4,\phi} \left(\frac{x^2}{a^2} - 2 a \ddot{a} + \dot{a}^2 \right) - 12 a^2 G_{4,\phi\phi\phi} \dot{\phi}^2 + \frac{24 G_{4,\phi XX}(x + a \dot{a}) \dot{\phi}^3 (a \ddot{\phi} - \dot{a} \dot{\phi})}{a^5} + G_{4,\phi\phi} (-12 a^2 \ddot{\phi} + 12(x - a \dot{a}) \dot{\phi}) + 12 G_{4,\phi\phi X} \dot{\phi}^2 \left(-\ddot{\phi} + \frac{(2x + 3a\dot{a})\dot{\phi}}{a^2} \right) + \left(12 G_{4,\phi X} \dot{\phi} \left(2 a^2 \ddot{\phi} (2x + a \dot{a}) + \dot{\phi} \left(x^2 - 6 a x \dot{a} + a^2 (-3 \dot{a}^2 + 2(a \ddot{a} + \dot{x})) \right) \right) \right) / a^4, \quad (2.78)$$

$$f_5 = -\frac{24 G_{4,\phi} x}{a^2} + 12 G_{4,\phi\phi} \dot{\phi} - \frac{24 G_{4,\phi X}(x + a \dot{a}) \dot{\phi}^2}{a^4}, \quad (2.79)$$

$$f_6 = \frac{24 G_4 x}{a^2} - 12 G_{4,\phi} \dot{\phi} + \frac{24 G_{4,X}(4x + 3a\dot{a}) \dot{\phi}^2}{a^4} - \frac{12 G_{4,\phi X} \dot{\phi}^3}{a^2} + \frac{24 G_{4,XX}(x + a \dot{a}) \dot{\phi}^4}{a^6}, \quad (2.80)$$

$$f_7 = \frac{4 G_{4,X} x \dot{\phi}^2}{a^4}, \quad (2.81)$$

$$f_8 = -\frac{8 G_4 x}{a^2} - 4 G_{4,\phi} \dot{\varphi} + \frac{8 G_{4,X}(-x + a \dot{a}) \dot{\varphi}^2}{a^4}, \quad (2.82)$$

$$f_9 = -\frac{2 a^2}{x} f_7, \quad (2.83)$$

$$f_{10} = f_{11} + \frac{1}{a^2} f_9, \quad (2.84)$$

$$f_{11} = -\frac{8 G_4}{a^2}, \quad (2.85)$$

$$f_{12} = \frac{8 G_4 x}{a^2} - 8 G_{4,\phi} \dot{\varphi} + \frac{16 G_{4,X}(x + a \dot{a}) \dot{\varphi}^2}{a^4}, \quad (2.86)$$

$$f_{13} = f_{11}, \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} f_{14} = & G_{4,\phi}(8x + 4a\dot{a}) - 4a^2 G_{4,\phi\phi} \dot{\varphi} + \frac{4 G_{4,X}((-7 + c)x^2 - 10ax\dot{a} - 3a^2\dot{a}^2) \dot{\varphi}}{a^4} \\ & + \frac{20 G_{4,\phi X}(x + a\dot{a}) \dot{\varphi}^2}{a^2} - \frac{12 G_{4,XX}(x + a\dot{a})^2 \dot{\varphi}^3}{a^6}, \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} f_{15} = & 4 G_{4,\phi} \left(\frac{x^2}{a^2} - 2a\ddot{a} + \dot{a}^2 \right) - 4a^2 G_{4,\phi\phi\phi} \dot{\varphi}^2 \\ & + \frac{8 G_{4,\phi XX}(x + a\dot{a}) \dot{\varphi}^3 (a\ddot{\varphi} - \dot{a}\dot{\varphi})}{a^5} + G_{4,\phi\phi} (-4a^2 \ddot{\varphi} + 4(x - a\dot{a}) \dot{\varphi}) \\ & + 4 G_{4,\phi\phi X} \dot{\varphi}^2 \left(-\ddot{\varphi} + \frac{(2x + 3a\dot{a}) \dot{\varphi}}{a^2} \right) + \left(4 G_{4,\phi X} \dot{\varphi} \left(2a^2 \ddot{\varphi} (2x + a\dot{a}) \right. \right. \\ & \left. \left. + \dot{\varphi} \left(x^2 - 6ax\dot{a} + a^2(-3\dot{a}^2 + 2(a\ddot{a} + \dot{x})) \right) \right) \right) / a^4, \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$f_{16} = -4 G_{4,\phi} + \frac{4 G_{4,X}((2 + c)x + 2a\dot{a}) \dot{\varphi}}{a^4}, \quad (2.90)$$

$$f_{17} = \frac{8 G_{4,\phi} x}{a^2} - 4 G_{4,\phi\phi} \dot{\varphi} + \frac{8 G_{4,\phi X}(x + a\dot{a}) \dot{\varphi}^2}{a^4}, \quad (2.91)$$

$$f_{18} = -\frac{2a^2}{x\dot{\varphi}} f_7, \quad (2.92)$$

$$f_{19} = -8G_{4,\phi} + \frac{G_{4,X}(8a^2\ddot{\varphi} + 8(2x + a\dot{a})\dot{\varphi})}{a^4}, \quad (2.93)$$

$$f_{20} = 8aG_4\dot{a} + 4a^2G_{4,\phi}\dot{\varphi} - \frac{8G_{4,X}(3x + 2a\dot{a})\dot{\varphi}^2}{a^2} + 4G_{4,\phi X}\dot{\varphi}^3 - \frac{8G_{4,XX}(x + a\dot{a})\dot{\varphi}^4}{a^4}, \quad (2.94)$$

$$f_{21} = G_4\left(-\frac{4x^2}{a^2} - 12\dot{a}^2\right) - 4G_{4,\phi}(x + 3a\dot{a})\dot{\varphi} + \frac{8G_{4,X}(-2x^2 + 3ax\dot{a} + 3a^2\dot{a}^2)\dot{\varphi}^2}{a^4} - \frac{4G_{4,\phi X}(x + 3a\dot{a})\dot{\varphi}^3}{a^2} - \frac{4G_{4,XX}(x - 3a\dot{a})(x + a\dot{a})\dot{\varphi}^4}{a^6}, \quad (2.95)$$

$$f_{22} = -\frac{8G_4x}{a^2} + 4G_{4,\phi}\dot{\varphi} - \frac{8G_{4,X}(4x + 3a\dot{a})\dot{\varphi}^2}{a^4} + \frac{4G_{4,\phi X}\dot{\varphi}^3}{a^2} - \frac{8G_{4,XX}(x + a\dot{a})\dot{\varphi}^4}{a^6}, \quad (2.96)$$

$$f_{23} = \frac{2a^2}{x} f_7, \quad (2.97)$$

$$f_{24} = 4a^2G_{4,\phi} - \frac{8G_{4,X}(2x + a\dot{a})\dot{\varphi}}{a^2} + 4G_{4,\phi X}\dot{\varphi}^2 - \frac{8G_{4,XX}(x + a\dot{a})\dot{\varphi}^3}{a^4}, \quad (2.98)$$

$$f_{25} = G_4\left(\frac{12x^2}{a^2} + 8a\ddot{a} - 4\dot{a}^2\right) + 4a^2G_{4,\phi\phi}\dot{\varphi}^2 + \frac{8G_{4,XX}(x - a\dot{a})\dot{\varphi}^3(a\ddot{\varphi} - \dot{a}\dot{\varphi})}{a^5} + 4G_{4,\phi X}\dot{\varphi}^2\left(\ddot{\varphi} + \frac{(2x - 3a\dot{a})\dot{\varphi}}{a^2}\right) + G_{4,\phi}(4a^2\ddot{\varphi} + 4(x + a\dot{a})\dot{\varphi}) + \left(4G_{4,X}\dot{\varphi}\left(-2a^2\ddot{\varphi}(-2x + a\dot{a}) + \dot{\varphi}(3x^2 - 6ax\dot{a} + a^2(-2a\ddot{a} + 3\dot{a}^2 + 2\dot{x}))\right)\right)/a^4, \quad (2.99)$$

$$f_{26} = 4 a^2 f_7, \quad (2.100)$$

$$f_{27} = \frac{8 G_4 x}{a^2} + 4 G_{4,\phi} \dot{\varphi} + \frac{8 G_{4,X} (x - a \dot{a}) \dot{\varphi}^2}{a^4}, \quad (2.101)$$

$$f_{28} = -8 a^2 G_{4,\phi} + 8 G_{4,\phi X} \dot{\varphi}^2 + 8 G_{4,X} \left(\ddot{\varphi} + \frac{2 x \dot{\varphi}}{a^2} \right) + \frac{8 G_{4,XX} \dot{\varphi}^2 (a \ddot{\varphi} - \dot{a} \dot{\varphi})}{a^3}, \quad (2.102)$$

$$f_{29} = -8 a^2 G_4 + 8 G_{4,X} \dot{\varphi}^2, \quad (2.103)$$

$$f_{30} = -f_{11}, \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned} f_{31} = & 12 G_{4,\phi} (x + a \dot{a}) - 12 a^2 G_{4,\phi\phi} \dot{\varphi} - \frac{12 G_{4,X} (-3 x^2 + 4 a x \dot{a} + 3 a^2 \dot{a}^2) \dot{\varphi}}{a^4} \\ & + \frac{12 G_{4,\phi X} (3 x + 5 a \dot{a}) \dot{\varphi}^2}{a^2} + \frac{12 G_{4,XX} (x - 3 a \dot{a}) (x + a \dot{a}) \dot{\varphi}^3}{a^6}, \end{aligned} \quad (2.105)$$

$$\begin{aligned} f_{32} = & (x + a \dot{a}) \left(12 G_{4,\phi} - \frac{36 G_{4,X} (3 x + a \dot{a}) \dot{\varphi}}{a^4} + \frac{48 G_{4,\phi X} \dot{\varphi}^2}{a^2} \right. \\ & \left. - \frac{24 G_{4,XX} (4 x + 3 a \dot{a}) \dot{\varphi}^3}{a^6} + \frac{12 G_{4,\phi XX} \dot{\varphi}^4}{a^4} - \frac{12 G_{4,XXX} \dot{\varphi}^5}{a^8} \right), \end{aligned} \quad (2.106)$$

$$f_{33} = 12 G_{4,\phi} - \frac{24 G_{4,X} (3 x + 2 a \dot{a}) \dot{\varphi}}{a^4} + \frac{12 G_{4,\phi X} \dot{\varphi}^2}{a^2} - \frac{24 G_{4,XX} (x + a \dot{a}) \dot{\varphi}^3}{a^6}, \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned} f_{34} = & -24 a G_4 \dot{a} - 12 a^2 G_{4,\phi} \dot{\varphi} + \frac{24 G_{4,X} (3 x + 2 a \dot{a}) \dot{\varphi}^2}{a^2} \\ & - 12 G_{4,\phi X} \dot{\varphi}^3 + \frac{24 G_{4,XX} (x + a \dot{a}) \dot{\varphi}^4}{a^4}, \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$f_{35} = \frac{6 a^2}{x} f_7, \quad (2.109)$$

$$f_{36} = 12 a^2 G_{4,\phi} - \frac{24 G_{4,X}(2x + a\dot{a})\dot{\phi}}{a^2} + 12 G_{4,\phi X} \dot{\phi}^2 - \frac{24 G_{4,XX}(x + a\dot{a})\dot{\phi}^3}{a^4}, \quad (2.110)$$

$$f_{37} = \frac{2a^2}{x} f_7, \quad (2.111)$$

$$f_{38} = -8a G_4 \dot{a} - 4a^2 G_{4,\phi} \dot{\phi} + \frac{8 G_{4,X}(3x + 2a\dot{a})\dot{\phi}^2}{a^2} - 4 G_{4,\phi X} \dot{\phi}^3 + \frac{8 G_{4,XX}(x + a\dot{a})\dot{\phi}^4}{a^4}, \quad (2.112)$$

$$f_{39} = -4a^2 G_{4,\phi} + \frac{8 G_{4,X}(2x + a\dot{a})\dot{\phi}}{a^2} - 4 G_{4,\phi X} \dot{\phi}^2 + \frac{8 G_{4,XX}(x + a\dot{a})\dot{\phi}^3}{a^4}, \quad (2.113)$$

$$f_{40} = 4 G_{4,\phi}(x + a\dot{a}) - 4a^2 G_{4,\phi\phi} \dot{\phi} - \frac{4 G_{4,X}(-3x^2 + 4ax\dot{a} + 3a^2\dot{a}^2)\dot{\phi}}{a^4} + \frac{4 G_{4,\phi X}(3x + 5a\dot{a})\dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{4 G_{4,XX}(x - 3a\dot{a})(x + a\dot{a})\dot{\phi}^3}{a^6}, \quad (2.114)$$

$$f_{41} = -4 G_{4,\phi} + \frac{8 G_{4,X}(3x + 2a\dot{a})\dot{\phi}}{a^4} - \frac{4 G_{4,\phi X} \dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{8 G_{4,XX}(x + a\dot{a})\dot{\phi}^3}{a^6}, \quad (2.115)$$

$$f_{42} = -\frac{2a^2}{x\dot{\phi}} f_7, \quad (2.116)$$

$$f_{43} = 4a^2 G_{4,\phi} - \frac{8 G_{4,X}(2x + a\dot{a})\dot{\phi}}{a^2} + 4 G_{4,\phi X} \dot{\phi}^2 - \frac{8 G_{4,XX}(x + a\dot{a})\dot{\phi}^3}{a^4}, \quad (2.117)$$

$$f_{44} = 8a^2 G_4 - 8 G_{4,X} \dot{\phi}^2, \quad (2.118)$$

$$f_{45} = -\frac{2a^2}{x} f_7, \quad (2.119)$$

$$f_{46} = -8a^2 G_4 + 8 G_{4,X} \dot{\phi}^2, \quad (2.120)$$

$$f_{47} = \frac{12 G_4}{a^2} + \frac{12 G_{4,X} \dot{\phi}^2}{a^4}, \quad (2.121)$$

$$f_{48} = (x + a \dot{a}) \left(\frac{18 G_4}{a^2} (x - a \dot{a}) - 18 G_{4,\phi} \dot{\phi} + \frac{18 G_{4,X} (7x + 3a \dot{a}) \dot{\phi}^2}{a^4} - \frac{36 G_{4,\phi X} \dot{\phi}^3}{a^2} \right. \\ \left. + \frac{6 G_{4,XX} (11x + 9a \dot{a}) \dot{\phi}^4}{a^6} - \frac{6 G_{4,\phi XX} \dot{\phi}^5}{a^4} + \frac{6 G_{4,XXX} (x + a \dot{a}) \dot{\phi}^6}{a^8} \right), \quad (2.122)$$

$$f_{49} = G_4 \left(\frac{18x^2}{a^2} + 12a \ddot{a} - 6\dot{a}^2 \right) + 6a^2 G_{4,\phi\phi} \dot{\phi}^2 \\ + \frac{12 G_{4,XX} (x - a \dot{a}) \dot{\phi}^3 (a \ddot{\phi} - \dot{a} \dot{\phi})}{a^5} + 6 G_{4,\phi X} \dot{\phi}^2 \left(\ddot{\phi} + \frac{(2x - 3a \dot{a}) \dot{\phi}}{a^2} \right) \\ + G_{4,\phi} (6a^2 \ddot{\phi} + 6(x + a \dot{a}) \dot{\phi}) + \left(6 G_{4,X} \dot{\phi} \left(-2a^2 \ddot{\phi} (-2x + a \dot{a}) \right. \right. \\ \left. \left. + \dot{\phi} (3x^2 - 6ax \dot{a} + a^2 (-2a \ddot{a} + 3\dot{a}^2 + 2\dot{x})) \right) \right) / a^4, \quad (2.123)$$

$$f_{50} = \frac{6 G_{4,\phi\phi\phi X} (x + a \dot{a}) \dot{\phi}^3}{a^2} + \frac{6 G_{4,\phi XXX} (x + a \dot{a})^2 \dot{\phi}^4 (-a \ddot{\phi} + \dot{a} \dot{\phi})}{a^9} \\ - \frac{6 G_{4,\phi\phi XX} (x + a \dot{a}) \dot{\phi}^3 (-a^2 \ddot{\phi} + (x + 2a \dot{a}) \dot{\phi})}{a^6} \\ + \left(G_{4,\phi X} \left(-6a \ddot{\phi} (x + a \dot{a}) (3x + a \dot{a}) \right. \right. \\ \left. \left. + 12 \dot{\phi} (6x^2 \dot{a} + ax (-2a \ddot{a} + 6\dot{a}^2 - 3\dot{x}) + a^2 \dot{a} (-a \ddot{a} + \dot{a}^2 - 2\dot{x})) \right) \right) / a^5 \\ + 6 G_{4,\phi\phi} \left(\frac{x^2}{a^2} + a \ddot{a} + \dot{x} \right) + \left(6 G_{4,\phi\phi X} \dot{\phi} \left(3a^2 \ddot{\phi} (x + a \dot{a}) + \dot{\phi} (-2x^2 - 5ax \dot{a} \right. \right. \\ \left. \left. + a^2 (a \ddot{a} - 2\dot{a}^2 + \dot{x})) \right) \right) / a^4 \\ - \left(6 G_{4,\phi XX} (x + a \dot{a}) \dot{\phi}^2 \left(2a \ddot{\phi} (3x + 2a \dot{a}) + \dot{\phi} (-9x \dot{a} \right. \right. \\ \left. \left. + a (-5\dot{a}^2 + 2(a \ddot{a} + \dot{x}))) \right) \right) / a^7, \quad (2.124)$$

$$f_{51} = \frac{1}{2} x f_7, \quad (2.125)$$

$$f_{52} = \frac{1}{2x} f_7, \quad (2.126)$$

$$f_{53} = \frac{4G_4}{a^2} + \frac{4(1-2c)G_{4,X}\dot{\varphi}^2}{a^4}, \quad (2.127)$$

$$f_{54} = \frac{1}{2}f_{11}, \quad (2.128)$$

$$\begin{aligned} f_{55} = & 2G_{4,\phi\phi X}\dot{\varphi}^2 + \frac{4G_{4,XXX}(x+a\dot{a})\dot{\varphi}^3(-a\ddot{\varphi} + \dot{a}\dot{\varphi})}{a^7} \\ & + 6G_{4,\phi X}\left(\ddot{\varphi} + \frac{(x+a\dot{a})\dot{\varphi}}{a^2}\right) + \frac{2G_{4,\phi XX}\dot{\varphi}^2(a^2\ddot{\varphi} - (2x+3a\dot{a})\dot{\varphi})}{a^4} \\ & + \frac{2G_{4,X}((-3+c)x^2 + 4ax\dot{a} + a^2(-2a\ddot{a} + \dot{a}^2 - 4\dot{x}))}{a^4} \\ & + \left(G_{4,XX}\left(-4a^2\ddot{\varphi}(4x+3a\dot{a})\dot{\varphi} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - 2\dot{\varphi}^2(3x^2 - 6ax\dot{a} + a^2(-5\dot{a}^2 + 2(a\ddot{a} + \dot{x}))) \right) \right) / a^6, \end{aligned} \quad (2.129)$$

$$f_{56} = 4a^2G_4, \quad (2.130)$$

$$f_{57} = \frac{1}{2}f_{11}, \quad (2.131)$$

$$\begin{aligned} f_{58} = (x+a\dot{a}) \left(\frac{6G_{4,X}(3x+a\dot{a})}{a^4} - \frac{18G_{4,\phi X}\dot{\varphi}}{a^2} + \frac{12G_{4,XX}(3x+2a\dot{a})\dot{\varphi}^2}{a^6} \right. \\ \left. - \frac{6G_{4,\phi XX}\dot{\varphi}^3}{a^4} + \frac{6G_{4,XXX}(x+a\dot{a})\dot{\varphi}^4}{a^8} \right), \end{aligned} \quad (2.132)$$

$$f_{59} = -12a^2G_4 + 12G_{4,X}\dot{\varphi}^2, \quad (2.133)$$

где уравнения движения для фоновых полей были использованы только в некоторых коэффициентах, таких как f_{51} . Используя эти уравнения, можно избавиться от вторых производных φ и a , а также от x , но во многих случаях это приводит к более длинным выражениям.

Коэффициенты квадратичного действия в окончательной форме

Фоновые функции m_i с $i = 1, 2, 3$, относящиеся к окончательной форме квадратичного действия (1.47), имеют вид

$$\begin{aligned}
 m_1 = & 24 a^4 G_4^2 \left(3 a^6 G_4^3 (-G_{4,\phi} G_{4,X} + G_{4,\phi X} G_4) \right. \\
 & + a^4 G_4^2 (G_{4,\phi} G_{4,X}^2 - G_{4,\phi X} G_{4,X} G_4 + G_4 (-G_{4,\phi} G_{4,XX} + G_{4,\phi XX} G_4)) \dot{\varphi}^2 \\
 & + a^2 G_4 (-G_{4,\phi} G_{4,X} + G_{4,\phi X} G_4) (-2 G_{4,X}^2 + G_{4,XX} G_4) \dot{\varphi}^4 + (-2 G_{4,\phi} G_{4,X}^4 \\
 & \quad + 2 G_{4,\phi X} G_{4,X}^3 G_4 - G_{4,X} (4 G_{4,\phi X} G_{4,XX} + G_{4,\phi} G_{4,XXX}) G_4^2 \\
 & \quad \left. + 2 G_{4,X}^2 G_4 (G_{4,\phi} G_{4,XX} + G_{4,\phi XX} G_4) \right. \\
 & \left. + G_4^2 (G_{4,\phi} G_{4,XX}^2 - G_{4,\phi XX} G_{4,XX} G_4 + G_{4,\phi X} G_{4,XXX} G_4) \right) \dot{\varphi}^6, \tag{2.134}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_2 = & -8 a^4 G_{4,X}^4 G_4 (x + a \dot{a}) \dot{\varphi}^8 (6 a^2 \ddot{\varphi} + (11 x + 5 a \dot{a}) \dot{\varphi}) \\
 & + 4 a^{12} G_4^5 (x + a \dot{a}) (-6 a^2 \ddot{\varphi} + (13 x + 9 a \dot{a}) \dot{\varphi}) \\
 & + G_4^2 \left(32 a^6 G_{4,X}^3 (x + a \dot{a}) \dot{\varphi}^6 (3 a^2 \ddot{\varphi} + (2 x - a \dot{a}) \dot{\varphi}) \right. \\
 & \quad \left. + 24 a^4 G_{4,X}^2 G_{4,XX} (x + a \dot{a}) \dot{\varphi}^8 (a^2 \ddot{\varphi} + (2 x + a \dot{a}) \dot{\varphi}) \right) \\
 & + G_4^4 \left(8 a^{14} G_{4,\phi\phi X} \dot{\varphi}^5 + 8 a^{11} G_{4,\phi XX} \dot{\varphi}^5 (a \ddot{\varphi} - \dot{a} \dot{\varphi}) \right. \\
 & \quad + 8 a^8 G_{4,XX} \dot{\varphi}^4 (2 a^3 \ddot{\varphi} \dot{a} - (7 x^2 + 9 a x \dot{a} + 4 a^2 \dot{a}^2) \dot{\varphi}) \\
 & \quad \left. + 8 a^{10} G_{4,X} \dot{\varphi}^2 \left(a^2 \ddot{\varphi} (5 x + 3 a \dot{a}) - 2 \dot{\varphi} (x^2 - 5 a x \dot{a} + a^2 (-2 \dot{a}^2 + \dot{x})) \right) \right) \\
 & + G_4^3 \left(4 a^4 G_{4,XX}^2 (x + a \dot{a}) \dot{\varphi}^8 (2 a^2 \ddot{\varphi} + (x - a \dot{a}) \dot{\varphi}) \right. \\
 & \quad + G_{4,X} \left(-8 a^{12} G_{4,\phi\phi X} \dot{\varphi}^7 + 8 a^9 G_{4,\phi XX} \dot{\varphi}^7 (-a \ddot{\varphi} + \dot{a} \dot{\varphi}) \right. \\
 & \quad \left. + 8 a^6 G_{4,XX} \dot{\varphi}^6 (-a^2 \ddot{\varphi} (5 x + 7 a \dot{a}) - 2 x (x + 2 a \dot{a}) \dot{\varphi}) \right) \\
 & \quad \left. + 8 a^8 G_{4,X}^2 \dot{\varphi}^4 \left(-a^2 \ddot{\varphi} (11 x + 9 a \dot{a}) + \dot{\varphi} (3 x^2 + 3 a x \dot{a} + 2 a^2 (4 \dot{a}^2 + \dot{x})) \right) \right), \tag{2.135}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_3 = & (x + a \dot{a})^2 (a^8 G_4^4 \dot{\varphi} - 2 a^4 G_{4,XX} G_4^3 \dot{\varphi}^5 + 4 G_{4,X}^4 \dot{\varphi}^9 \\
 & - 4 G_{4,X}^2 G_{4,XX} G_4 \dot{\varphi}^9 + G_4^2 (4 a^4 G_{4,X}^2 \dot{\varphi}^5 + G_{4,XX}^2 \dot{\varphi}^9)). \tag{2.136}
 \end{aligned}$$

Используя уравнения для фоновых полей, можно исключить вторые производные φ , первые производные a и x , однако это приводит к значительно более длинным выражениям для m_2 и m_3 .

В Дополнительные детали для раздела 1-1.2

Слагаемое σ в разделе 1.2 имеет вид

$$\begin{aligned}
 \sigma = a \bigg(& -24H^2 \left(G_4^4 + 16G_{4,X}^4 X^4 + 8G_{4,X}^2 G_4 X^3 (G_{4,X} - 2G_{4,XX} X) \right. \\
 & \quad + 2G_4^2 X^2 (15G_{4,X}^2 + 8G_{4,XX}^2 X^2 + 4G_{4,X} X (G_{4,XX} - G_{4,XXX} X)) \\
 & \quad \quad \quad \left. - G_4^3 X (G_{4,X} + 4X (4G_{4,XX} + G_{4,XXX} X)) \right) \\
 & \quad + X \left(-3G_3^2 (G_4^2 + 2X^2 (5G_{4,X}^2 + 8G_{4,XX}^2 X^2 + 4G_{4,X} X (G_{4,XX} \right. \\
 & \quad \left. - G_{4,XXX} X)) - G_4 X (11G_{4,X} + 4X (5G_{4,XX} + G_{4,XXX} X)) \right) \\
 & \quad + 6G_3 \left(-X (G_4 + 2G_{4,X} X) (2(G_{3,XX} - 2G_{4,\phi XX}) X (G_4 + 2G_{4,X} X) \right. \\
 & \quad + G_{3,X} (5G_4 - 2X (G_{4,X} + 4G_{4,XX} X)) + 2G_{4,\phi X} (-5G_4 + 2X (G_{4,X} \\
 & \quad + 4G_{4,XX} X)) \left. \right) + 2G_{4,\phi} (G_4^2 + 2X^2 (5G_{4,X}^2 + 8G_{4,XX}^2 X^2 + 4G_{4,X} X (G_{4,XX} \\
 & \quad - G_{4,XXX} X)) - G_4 X (11G_{4,X} + 4X (5G_{4,XX} + G_{4,XXX} X))) \bigg) \\
 & \quad + 4 \left((G_4 + 2G_{4,X} X)^2 (G_{2,X} (G_4 + 2G_{4,X} X) - 2G_{3,\phi} (G_4 + 2G_{4,X} X) \right. \\
 & \quad + X (-3(G_{3,X} - 2G_{4,\phi X})^2 X + 2(G_{2,XX} - G_{3,\phi X}) (G_4 + 2G_{4,X} X)) \left. \right) \\
 & \quad + 3G_{4,\phi} X (G_4 + 2G_{4,X} X) (2(G_{3,XX} - 2G_{4,\phi XX}) X (G_4 + 2G_{4,X} X) \\
 & \quad + G_{3,X} (5G_4 - 2X (G_{4,X} + 4G_{4,XX} X)) + 2G_{4,\phi X} (-5G_4 + 2X (G_{4,X} \\
 & \quad + 4G_{4,XX} X)) \left. \right) - 3G_{4,\phi}^2 (G_4^2 + 2X^2 (5G_{4,X}^2 + 8G_{4,XX}^2 X^2 + 4G_{4,X} X (G_{4,XX} \\
 & \quad - G_{4,XXX} X)) - G_4 X (11G_{4,X} + 4X (5G_{4,XX} + G_{4,XXX} X))) \bigg) \\
 & \quad + 24H \left(X ((G_4 + 2G_{4,X} X) ((2G_{3,X} - 5G_{4,\phi X}) G_4^2 + G_4 (- (G_{3,X} \right. \\
 & \quad + 2G_{4,\phi X}) G_{4,X} + (G_{3,XX} - 2G_{4,\phi XX}) G_4) X + 2((G_{3,X} - 4G_{4,\phi X}) G_{4,X}^2 \\
 & \quad + ((G_{3,XX} - 2G_{4,\phi XX}) G_{4,X} - 2(G_{3,X} - 2G_{4,\phi X}) G_{4,XX}) G_4) X^2) \\
 & \quad + G_3 (-6G_{4,X} G_4^2 + 3G_4 (G_{4,X}^2 - 3G_{4,XX} G_4) X - 2(3G_{4,X}^3 - 2G_{4,X} G_{4,XX} G_4 \\
 & \quad + G_{4,XXX} G_4^2) X^2 - 4(G_{4,X}^2 G_{4,XX} - 2G_{4,XX}^2 G_4 + G_{4,X} G_{4,XXX} G_4) X^3) \bigg) \\
 & \quad + G_{4,\phi} \left(-G_4^3 + 4G_{4,X}^2 X^3 (G_{4,X} + 2G_{4,XX} X) - 2G_4 X^2 (9G_{4,X}^2 + 8G_{4,XX}^2 X^2 \right. \\
 & \quad \left. + 4G_{4,X} X (G_{4,XX} - G_{4,XXX} X)) + 2G_4^2 X (3G_{4,X} + X (9G_{4,XX} + 2G_{4,XXX} X)) \right) \bigg) \dot{\phi}.
 \end{aligned} \tag{2.137}$$

С Дополнительные детали для полной теории Хорндески–Картана, рассмотренной в разделе 1-1.3

Уравнения движения для фоновых полей с учетом вклада до \mathcal{L}_5

Из (1.114) мы можем вычислить действие для фоновых полей a, ϕ, x, y . Уравнения Эйлера–Лагранжа $\mathcal{E}_f = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} = 0$ для f , представляющего одну из следующих компонент $g_{00}, g_{ij}, K_{ij0}, K_{ijk}, \phi$, содержат производные не выше второго порядка по фоновым полям. В частности,

$$\mathcal{E}_{K_{ijk}} = -y \frac{2a^4 G_4 + G_5 (a^2 \ddot{\phi} + x \dot{\phi})}{a^{10}}, \quad (2.138)$$

что приводит к двум ветвям фоновых решений: либо фон кручения y обращается в ноль, либо нет. В данной работе мы рассматриваем более простую первую ветвь

$$y(\eta) \equiv 0. \quad (2.139)$$

Отметим, что если в действии отсутствует G_5 (теория Хорндески–Картана до второго порядка), то уравнение (2.139) было бы единственным возможным решением уравнения (2.138). Таким образом, ветвь (2.139) естественным образом продолжает результаты предыдущих разделов для теории Хорндески–Картана до второго порядка.

При условии (2.139) оставшиеся уравнения могут быть записаны с

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{g_{00}} = & \frac{1}{2a^{12}} \left(a^{10} (-G_2 - 6G_4 H^2 + (2G_{2,X} - 2G_{3,\phi} + (24G_{4,X} - 18G_{5,\phi}) H^2) X \right. \\ & \left. + (24G_{4,XX} - 12G_{5,\phi X}) H^2 X^2) \right. \\ & + a^7 (H(72G_{4,X} x - 36G_{5,\phi} x) X + H(48G_{4,XX} x - 24G_{5,\phi X} x) X^2) \\ & + a^4 (6G_4 x^2 + (48G_{4,X} x^2 - 18G_{5,\phi} x^2) X + (24G_{4,XX} x^2 - 12G_{5,\phi X} x^2) X^2) \\ & + a^9 (-6G_{4,\phi} H + ((6G_{3,X} - 12G_{4,\phi X}) H + 10G_{5,X} H^3) X \\ & \quad \left. + 4G_{5,XX} H^3 X^2) \dot{\phi} + a^6 (3G_3 x - 6G_{4,\phi} x + 9G_5 H^2 x \right. \\ & \quad \left. + (6G_{3,X} x - 12G_{4,\phi X} x + 36G_{5,X} H^2 x) X + 12G_{5,XX} H^2 x X^2) \dot{\phi} \right. \\ & + a^3 (18G_5 H x^2 + 42G_{5,X} H x^2 X + 12G_{5,XX} H x^2 X^2) \dot{\phi} \\ & \left. + (9G_5 x^3 + 16G_{5,X} x^3 X + 4G_{5,XX} x^3 X^2) \dot{\phi} \right), \end{aligned} \quad (2.140)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{K_{ij0}} = & \frac{\delta_{ij}}{2a^{10}} \left(a^7(-8G_{4,X} + 4G_{5,\phi})HX + a^4(-4G_4x + (-8G_{4,X}x + 4G_{5,\phi}x)X) \right. \\
& + a^6(-G_3 + 2G_{4,\phi} - G_5H^2 - 2G_{5,X}H^2X)\dot{\phi} \\
& \left. + a^3(-4G_5Hx - 4G_{5,X}HxX)\dot{\phi} + (-3G_5x^2 - 2G_{5,X}x^2X)\dot{\phi} \right), \tag{2.141}
\end{aligned}$$

и, благодаря калибровочной избыточности, уравнение для ϕ тривиально удовлетворяется последними и их производными по времени. Действительно,

$$\mathcal{E}_\phi = a^2 \left(\dot{\mathcal{E}}_{g_{00}} + a(5\mathcal{E}_{g_{00}} + 3\mathcal{E}_{g_{ii}})H \right) + 3x \left(\dot{\mathcal{E}}_{K_{i0}} + 4aH\mathcal{E}_{K_{i0}} \right), \tag{2.142}$$

где повторяющиеся пространственные индексы не суммируются в (2.142).

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{g_{ij}} = & \frac{\delta_{ij}}{2a^{12}} \left(a^{10}(G_2 + 6G_4H^2 + (-2G_{3,\phi} + 4G_{4,\phi\phi})X) + (-3G_5x^3 - 2G_{5,X}x^3X)\dot{\phi} \right. \\
& + a^6(G_3x - 2G_{4,\phi}x + 3G_5H^2x + (-8G_{4,\phi X}x + 4G_{5,\phi\phi}x + 18G_{5,X}H^2x)X \\
& + 8G_{5,XX}H^2xX^2)\dot{\phi} + a^3(6G_5Hx^2 + 14G_{5,X}Hx^2X + 4G_{5,XX}Hx^2X^2)\dot{\phi} \\
& + a^9(4G_4\dot{H} + (2G_{4,\phi}H + ((2G_{3,X} - 12G_{4,\phi X} + 4G_{5,\phi\phi})H + 2G_{5,X}H^3)X \\
& \quad \left. + 4G_{5,XX}H^3X^2)\dot{\phi} \right. \\
& + a^8(2G_{4,\phi}\ddot{\phi} - 4G_{5,XX}H^2X^2\ddot{\phi} + X(-2G_{3,X}\ddot{\phi} + 4G_{4,\phi X}\ddot{\phi} - 6G_{5,X}H^2\ddot{\phi}) \\
& - 4G_{5,X}HX\dot{H}\dot{\phi} + ((-2G_{4,X} - G_{5,\phi})H^2 + (8G_{4,XX} - 6G_{5,\phi X})H^2X)\dot{\phi}^2) \\
& + a^7((H(-4G_{4,X}\ddot{\phi} + 4G_{5,\phi}\ddot{\phi}) + HX(-8G_{4,XX}\ddot{\phi} + 4G_{5,\phi X}\ddot{\phi}))\dot{\phi} \\
& \quad \left. + (-4G_{4,X} + 2G_{5,\phi})\dot{H}\dot{\phi}^2) \right. \\
& + a^4(-2G_4x^2 + (-8G_{4,X}x\ddot{\phi} + 4G_{5,\phi}x\ddot{\phi} + X(-8G_{4,XX}x\ddot{\phi} + 4G_{5,\phi X}x\ddot{\phi}))\dot{\phi} \\
& \quad \left. + \dot{\phi}^2(-4G_{4,X}\dot{x} + 2G_{5,\phi}\dot{x})) \right. \\
& + a^2(-2G_5x^2\ddot{\phi} - 10G_{5,X}x^2X\ddot{\phi} - 4G_{5,XX}x^2X^2\ddot{\phi} \\
& + (-2G_{4,X}x^2 - G_{5,\phi}x^2 - 2G_{5,\phi X}x^2X)\dot{\phi}^2 + \dot{\phi}(-4G_5x\dot{x} - 4G_{5,X}xX\dot{x})) \\
& + a^5(-2G_5Hx\ddot{\phi} - 16G_{5,X}HxX\ddot{\phi} - 8G_{5,XX}HxX^2\ddot{\phi} \\
& \quad + (H(12G_{4,X}x - 8G_{5,\phi}x) + H(8G_{4,XX}x - 8G_{5,\phi X}x)X)\dot{\phi}^2 \\
& \quad \left. + \dot{\phi}(-2G_5x\dot{H} - 2G_5H\dot{x} + X(-4G_{5,X}x\dot{H} - 4G_{5,X}H\dot{x})) \right), \tag{2.143}
\end{aligned}$$

Квадратичное действие для тензорных мод

Из (1.114) мы можем записать квадратичное действие для тензорных мод в форме (1.121). Коэффициенты b_A , c_A , d_A являются функциями *только* от времени. Они задаются следующими выражениями:

Детали расчета скорости гравитона

Мы записали дисперсионное соотношение для гравитационных волн в виде:

$$\omega^2 = \frac{f_0 + \vec{p}^2 f_1}{f_2 + \vec{p}^2 f_3} \vec{p}^2,$$

а скорость $c_g^2 = f_1/f_3$, где $f_0 = \bar{f}_0/\bar{\mathcal{G}}_\tau$, $f_1 = \bar{f}_1/\bar{\mathcal{G}}_\tau$, $f_2 = -4c_1c_4$, $f_3 = d_1^2$ и $\bar{\mathcal{G}}_\tau = c_1(c_3^2 - 4b_1c_4)$. Эти величины определяются коэффициентами b_A , c_A , d_A , приведенными в первой части данного приложения, и

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 = -\frac{2}{a^{20}} & \left(G_5^2 X(-8a^{10} G_4(G_4^2 + 2G_{4,X} G_4 X - G_5(G_3 + 2G_5 H^2) X) \right. \\ & + 2a^9 G_5 H(4G_4^2 + 8G_4(G_{4,X} - G_{5,\phi}) X \\ & + G_5 X(G_3 + H^2(G_5 + 2G_{5,X} X))) \dot{\phi} \\ & + 2G_5^2 x^2 \dot{\phi}(x X(3G_5 + 2G_{5,X} X) - G_5 \ddot{\phi} \dot{\phi}) \\ & + a^3 G_5^2 H x \dot{\phi}(2x X(5G_5 + 6G_{5,X} X) - G_5 \ddot{\phi} \dot{\phi}) \\ & + 2a^7 G_5 \dot{\phi}(-H((-4G_{4,X} + G_{5,\phi}) G_5 X + 2G_4(G_5 + 2G_{5,X} X)) \ddot{\phi} \\ & + G_4 G_5 \dot{H} \dot{\phi}) + 2a^8((4G_4 G_{5,\phi} G_5 X + G_3 G_5^2 X - 2G_4^2(3G_5 + 2G_{5,X} X)) \ddot{\phi} \\ & + G_5 H^2(2(G_{4,X} - G_{5,\phi}) G_5 X + G_4(G_5 + 4G_{5,X} X)) \dot{\phi}^2) \\ & + 2a^6(-2G_4^2 x(G_5 + 2G_{5,X} X) \dot{\phi} \\ & + G_4 G_5(-2G_5 \ddot{\phi}^2 + 8G_{4,X} x X \dot{\phi} - 4G_{5,\phi} x X \dot{\phi} + G_5 \ddot{\phi} \dot{\phi}) \\ & + G_5^2(G_{5,\phi} X \ddot{\phi}^2 + 2G_3 x X \dot{\phi} + H^2 \dot{\phi}(x X(5G_5 + 6G_{5,X} X) \\ & + G_5 \ddot{\phi} \dot{\phi}))) + 2a^4 G_5(x(6G_4 G_5 x X + ((4G_{4,X} + G_{5,\phi}) G_5 X \\ & - 2G_4(3G_5 + 2G_{5,X} X)) \ddot{\phi} \dot{\phi}) + 2G_4 G_5 \dot{\phi}^2 \dot{x}) \\ & + a^2 G_5^2 \dot{\phi}(4(3G_{4,X} - G_{5,\phi}) x^2 X \dot{\phi} + G_5 \ddot{\phi} \dot{\phi} \dot{x} + G_5 x(-3\ddot{\phi}^2 + \ddot{\phi} \dot{\phi} + 4X \dot{x})) \\ & + a^5 G_5 \dot{\phi}(8G_4 G_{5,X} H x X \dot{\phi} + 2G_5 H x(6G_4 + 8G_{4,X} X - 5G_{5,\phi} X) \dot{\phi} \\ & + G_5^2(-2H \ddot{\phi}^2 + 2x X \dot{H} + H \ddot{\phi} \dot{\phi} + \ddot{\phi} \dot{H} \dot{\phi} + 2H X \dot{x}))) \right). \end{aligned} \quad (2.152)$$

Квадратичное действие для скалярной моды

Исходная форма действия Из (1.114), непосредственное вычисление дает квадратичное действие для скалярной моды. Оно может быть записано в унитарной калибровке (а именно, при $\Pi = E = 0$) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_\tau = \frac{1}{2} \int d\eta d^3p \left(M_1 C^{(3)} \dot{\psi} + M_2 B \dot{\psi} + M_3 C^{(2)} C^{(3)} + M_4 B C^{(3)} + M_5 C^{(2)} \dot{\psi} \right. \\
+ M_6 C^{(2)} \psi + M_7 B \psi + M_8 C^{(3)} \psi + M_9 \alpha \dot{\psi} + M_{10} C^{(3)} \alpha + M_{11} B \alpha \\
\left. + M_{12} C^{(2)} \alpha + M_{13} \alpha \psi + M_{14} \dot{\psi}^2 + M_{15} (C^{(3)})^2 + M_{16} \alpha^2 + M_{17} \psi^2 \right), \tag{2.153}
\end{aligned}$$

Уравнение (2.153) тривиально получается после использования уравнений связи для множителей Лагранжа $C^{(1)}$, $C^{(5)}$, и $C^{(7)}$, которые накладывают условия $C^{(4)} = C^{(6)} = C^{(8)} = 0$. Коэффициенты M_A зависят от конформного времени и импульса и могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}
M_1 = \frac{a^4(48 G_{4,X} - 24 G_{5,\phi}) X + a^3(12 G_5 H + 24 G_{5,X} H X) \dot{\phi}}{a^4} \\
+ \frac{(24 G_5 x + 24 G_{5,X} x X) \dot{\phi}}{a^4}, \tag{2.154}
\end{aligned}$$

$$M_2 = -\frac{p^2 a^2}{3} M_1 + \frac{4(2 a^4 G_4 + G_5(a^3 H + x) \dot{\phi}) p^2}{a^2}, \tag{2.155}$$

$$M_3 = \frac{1}{a^4} M_2 - \frac{8(2 a^4 G_4 + G_5(a^3 H + x) \dot{\phi}) p^2}{a^6}, \tag{2.156}$$

$$M_4 = M_5 = -\frac{p^2}{3} M_1, \tag{2.157}$$

$$M_6 = -2 x M_3, \tag{2.158}$$

$$M_7 = \frac{2 p^2 x}{3} M_1, \tag{2.159}$$

$$p^2 M_8 = 6 x M_3 + \frac{4}{a^2} p^4 G_5 \dot{\phi}, \tag{2.160}$$

$$\begin{aligned}
M_9 = \frac{1}{a^4} \left(a^7(-24 G_4 H + (48 G_{4,X} - 48 G_{5,\phi}) H X + (96 G_{4,XX} - 48 G_{5,\phi X}) H X^2) \right. \\
+ a^4(-24 G_4 x + (96 G_{4,X} x - 48 G_{5,\phi} x) X + (96 G_{4,XX} x - 48 G_{5,\phi X} x) X^2) \\
+ a^6(-6 G_3 - 6 G_5 H^2 + (12 G_{3,X} - 24 G_{4,\phi X} + 48 G_{5,X} H^2) X \\
+ 24 G_{5,XX} H^2 X^2) \dot{\phi} + a^3(12 G_5 H x + 120 G_{5,X} H x X + 48 G_{5,XX} H x X^2) \dot{\phi} \\
\left. + (18 G_5 x^2 + 72 G_{5,X} x^2 X + 24 G_{5,XX} x^2 X^2) \dot{\phi} \right), \tag{2.161}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{10} = \frac{1}{a^6} & \left(a^7((96 G_{4,X} - 48 G_{5,\phi}) H X + (96 G_{4,XX} - 48 G_{5,\phi X}) H X^2) \right. \\
& + a^4((144 G_{4,X} x - 48 G_{5,\phi} x) X + (96 G_{4,XX} x - 48 G_{5,\phi X} x) X^2) \\
& + a^6(12 G_5 H^2 + (12 G_{3,X} - 24 G_{4,\phi X} + 60 G_{5,X} H^2) X + 24 G_{5,XX} H^2 X^2) \dot{\phi} \\
& + a^3(48 G_5 H x + 144 G_{5,X} H x X + 48 G_{5,XX} H x X^2) \dot{\phi} \\
& \left. + (36 G_5 x^2 + 84 G_{5,X} x^2 X + 24 G_{5,XX} x^2 X^2) \dot{\phi} \right), \tag{2.162}
\end{aligned}$$

$$M_{11} = -\frac{1}{3} p^2 M_9, \tag{2.163}$$

$$M_{12} = -\frac{1}{3} p^2 M_{10}, \tag{2.164}$$

$$\begin{aligned}
M_{13} = \frac{1}{a^6} & \left(a^7(H(-192 G_{4,X} x + 96 G_{5,\phi} x) X + H(-192 G_{4,XX} x + 96 G_{5,\phi X} x) X^2) \right. \\
& + a^4((-288 G_{4,X} x^2 + 96 G_{5,\phi} x^2) X + (-192 G_{4,XX} x^2 + 96 G_{5,\phi X} x^2) X^2) \\
& + a^6(-24 G_5 H^2 x + (-24 G_{3,X} x + 48 G_{4,\phi X} x - 120 G_{5,X} H^2 x) X \\
& \quad \left. - 48 G_{5,XX} H^2 x X^2) \dot{\phi} \right. \\
& + a^3(-96 G_5 H x^2 - 288 G_{5,X} H x^2 X - 96 G_{5,XX} H x^2 X^2) \dot{\phi} \\
& + (-72 G_5 x^3 - 168 G_{5,X} x^3 X - 48 G_{5,XX} x^3 X^2) \dot{\phi} \\
& + (a^8(-8 G_4 + (16 G_{4,X} - 8 G_{5,\phi}) X) + 8 a^7 G_{5,X} H X \dot{\phi} \\
& \quad \left. + a^4(4 G_5 x + 8 G_{5,X} x X) \dot{\phi} p^2) \right), \tag{2.165}
\end{aligned}$$

$$p^2 M_{14} = -\frac{3}{2} M_2, \tag{2.166}$$

$$p^2 M_{15} = -\frac{3}{2} M_3, \tag{2.167}$$

$$\begin{aligned}
M_{16} = & \frac{1}{a^6} \left(a^{10}(-12 G_4 H^2 + (-2 G_{2,X} - 36 G_{5,\phi} H^2) X \right. \\
& + (4 G_{2,XX} - 4 G_{3,\phi X} + (144 G_{4,XX} - 84 G_{5,\phi X}) H^2) X^2 \\
& + (48 G_{4,XXX} - 24 G_{5,\phi XX}) H^2 X^3) + a^3(46 G_5 H x^2 + 208 G_{5,X} H x^2 X \\
& + 156 G_{5,XX} H x^2 X^2 + 24 G_{5,XXX} H x^2 X^3) \dot{\phi} \\
& + (18 G_5 x^3 + 82 G_{5,X} x^3 X + 56 G_{5,XX} x^3 X^2 + 8 G_{5,XXX} x^3 X^3) \dot{\phi} \\
& + a^9(-8 G_4 \dot{H} \\
& + (-2 G_3 H - 2 G_5 H^3 + ((12 G_{3,X} - 36 G_{4,\phi X}) H + 44 G_{5,X} H^3) X \\
& + ((12 G_{3,XX} - 24 G_{4,\phi XX}) H + 44 G_{5,XX} H^3) X^2 + 8 G_{5,XXX} H^3 X^3) \dot{\phi}) \\
& + a^7(8 G_4 H x - 72 G_{5,\phi} H x X + H(336 G_{4,XX} x - 168 G_{5,\phi X} x) X^2 \\
& + H(96 G_{4,XXX} x - 48 G_{5,\phi XX} x) X^3 - 8 G_{4,X} H \ddot{\phi} \dot{\phi}) \\
& + a^4(-4 G_4 x^2 - 36 G_{5,\phi} x^2 X + (192 G_{4,XX} x^2 - 84 G_{5,\phi X} x^2) X^2 \\
& + (48 G_{4,XXX} x^2 - 24 G_{5,\phi XX} x^2) X^3 - 8 G_{4,X} x \ddot{\phi} \dot{\phi}) \\
& + a^8(-2 G_3 \ddot{\phi} - 2 G_5 H^2 \ddot{\phi} - 4 G_{5,X} H^2 X \ddot{\phi} - 4 G_5 H \dot{H} \dot{\phi} + 22 G_{4,X} H^2 \dot{\phi}^2) \\
& + a^6((-4 G_3 x + 26 G_5 H^2 x + (18 G_{3,X} x - 36 G_{4,\phi X} x + 170 G_{5,X} H^2 x) X \\
& + (12 G_{3,XX} x - 24 G_{4,\phi XX} x + 144 G_{5,XX} H^2 x) X^2 + 24 G_{5,XXX} H^2 x X^3) \dot{\phi} \\
& - 8 G_4 \dot{x}) + a^2(-2 G_5 x^2 \ddot{\phi} - 4 G_{5,X} x^2 X \ddot{\phi} + 50 G_{4,X} x^2 \dot{\phi}^2 - 4 G_5 x \dot{\phi} \dot{x}) \\
& + a^5(-4 G_5 H x \ddot{\phi} - 8 G_{5,X} H x X \ddot{\phi} + 72 G_{4,X} H x \dot{\phi}^2 \\
& + \dot{\phi}(-4 G_5 x \dot{H} - 4 G_5 H \dot{x})) \Big), \\
\end{aligned} \tag{2.168}$$

$$\begin{aligned}
M_{17} = & \frac{1}{a^6} \left((72 G_5 x^3 + 48 G_{5,X} x^3 X) \dot{\phi} + a^6(-12 G_5 H^2 x \right. \\
& + (48 G_{4,\phi X} x - 24 G_{5,\phi\phi} x - 96 G_{5,X} H^2 x) X - 48 G_{5,XX} H^2 x X^2) \dot{\phi} \\
& + a^3(-48 G_5 H x^2 - 144 G_{5,X} H x^2 X - 48 G_{5,XX} H x^2 X^2) \dot{\phi} + a^4(48 G_4 x^2 \\
& + (48 G_{4,X} x \ddot{\phi} - 24 G_{5,\phi} x \ddot{\phi} + X(48 G_{4,XX} x \ddot{\phi} - 24 G_{5,\phi X} x \ddot{\phi})) \dot{\phi} \\
& + \dot{\phi}^2(24 G_{4,X} \dot{x} - 12 G_{5,\phi} \dot{x})) \\
& + a^2(24 G_5 x^2 \ddot{\phi} + 120 G_{5,X} x^2 X \ddot{\phi} + 48 G_{5,XX} x^2 X^2 \ddot{\phi} \\
& + (48 G_{4,X} x^2 + 24 G_{5,\phi X} x^2 X) \dot{\phi}^2 + \dot{\phi}(48 G_5 x \dot{x} + 48 G_{5,X} x X \dot{x})) \\
& + a^5(12 G_5 H x \ddot{\phi} + 96 G_{5,X} H x X \ddot{\phi} + 48 G_{5,XX} H x X^2 \ddot{\phi} \\
& + (H(-48 G_{4,X} x + 36 G_{5,\phi} x) + H(-48 G_{4,XX} x + 48 G_{5,\phi X} x) X) \dot{\phi}^2 \\
& + \dot{\phi}(12 G_5 x \dot{H} + 12 G_5 H \dot{x} + X(24 G_{5,X} x \dot{H} + 24 G_{5,X} H \dot{x}))) \\
& + (a^8(4 G_4 - 4 G_{5,\phi} X) - 4 a^6 G_{5,X} X \ddot{\phi} - 6 a^4 G_5 x \dot{\phi} + 4 a^7 G_{5,X} H X \dot{\phi}) p^2 \Big). \\
\end{aligned} \tag{2.169}$$

Как и в Приложении С, мы используем уравнения движения для фоновых полей, чтобы выразить G_2 , $G_{4,X}$, $G_{4,XX}$, $G_{3,\phi}$, $G_{2,\phi X}$ (по предположению ненулевые) через другие производные функций Лагранжа, чтобы получить более компактные выражения.

Получение квадратичного действия для скалярной моды в окончательной форме Теперь из действия (2.153) мы можем получить форму (1.127) следующим образом: уравнение Эйлера-Лагранжа для скаляра кручения $C^{(2)}$ (который является множителем Лагранжа) представляет собой связь, позволяющую выразить $C^{(3)}$ через α , ψ , $\dot{\psi}$. Подстановка $C^{(3)}(\alpha, \psi, \dot{\psi})$ обратно в (2.153) дает (1.127). В частности, как объяснялось ранее, функции времени $\bar{\mathcal{G}}_S$ и T в уравнении (1.127) играют ключевую роль для обхода запрещающих теорем. Запишем их явный вид:

$$\bar{\mathcal{G}}_S = \frac{(2a^4 G_4 + G_5(a^3 H + x)\dot{\phi})^2}{2a^8 G_4 + 2a^7 H(G_5 + G_{5,X} X)\dot{\phi} + a^4 x(3G_5 + 2G_{5,X} X)\dot{\phi} + a^6(2G_{4,X} - G_{5,\phi})\dot{\phi}^2}, \quad (2.170)$$

$$T = \frac{t_1}{t_2}, \quad (2.171)$$

с

$$\begin{aligned} t_1 = & \left(2(x^2 X^2(G_{5,X} G_5 + 4G_{5,X}^2 X - 2G_{5,XX} G_5 X) \right. \\ & - 2a^3 H x X(G_5^2 - 4G_{5,X}^2 X^2 + 2G_{5,XX} G_5 X^2) \\ & + a^6(-2G_4^2 + X(-G_5^2 H^2 + 2X((-2G_{4,X} + G_{5,\phi})^2 + 2G_{5,X}^2 H^2 X) \\ & - G_5 X(G_{3,X} - 2G_{4,\phi X} + H^2(G_{5,X} + 2G_{5,XX} X)))) \\ & \left. - 2a^5 H(G_4 G_5 + (-4G_{4,X} G_{5,X} + 2G_{5,\phi} G_{5,X} + 2G_{4,XX} G_5 - G_{5,\phi X} G_5) X^2)\dot{\phi} \right. \\ & \left. - 2a^2 x(G_4 G_5 + (-G_{4,X} + G_{5,\phi}) G_5 X \right. \\ & \left. + (-4G_{4,X} G_{5,X} + 2G_{5,\phi} G_{5,X} + 2G_{4,XX} G_5 - G_{5,\phi X} G_5) X^2)\dot{\phi} \right), \quad (2.172) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_2 = & \left(2a^6(G_4 + 2G_{4,X} X - G_{5,\phi} X) \right. \\ & \left. + 2a^5 H(G_5 + G_{5,X} X)\dot{\phi} + a^2 x(3G_5 + 2G_{5,X} X)\dot{\phi} \right). \quad (2.173) \end{aligned}$$

Таким образом, при анализе становится ясно, что даже если уравнение (1.132) требует выполнения условия $\bar{\mathcal{G}}_S > 0$ для обеспечения устойчивости гравитона

при малых импульсах, величины t_1 и, следовательно, T могут обращаться в ноль различными способами при тщательном выборе функций Лагранжа (стоит отметить, что в общем случае $T \neq \Theta$).

Возможность выбора функций Лагранжа, допускающих обращение T в ноль в некоторой точке - при одновременном выполнении условий устойчивости всех мод при всех импульсах и досветового распространения - представляет собой ключевой инструмент для построения теорий, свободных от обычных запрещающих теорем.

Техническая деталь, приводящая к этим новым возможностям, сводится к наличию нового члена G_5 в действии (2.153) по сравнению с теориями Хорндески-Картана до второго порядка: а именно, части p^2 в члене $M_8 C^{(3)} \psi$. Действительно, связь, накладываемая $C^{(2)}$, имеет вид $C^{(3)} = -\frac{M_{12}}{M_3} \alpha + \dots$, что приводит к появлению нового члена $\mathcal{O}(p^2 G_5)$ в выражении $-\frac{M_{12}}{M_3} M_8 \alpha \psi$, который создает совершенно новую форму T по сравнению с более простыми вариантами теории.

Список литературы

1. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral / B. P. Abbott [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2017. — Т. 119, № 16. — С. 161101. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.161101. — arXiv: 1710.05832 [gr-qc].
2. Cosmology intertwined: A review of the particle physics, astrophysics, and cosmology associated with the cosmological tensions and anomalies / E. Abdalla [и др.] // *JHEAp.* — 2022. — Т. 34. — С. 49–211. — DOI: 10.1016/j.jheap.2022.04.002. — arXiv: 2203.06142 [astro-ph.CO].
3. An Ordinary Short Gamma-Ray Burst with Extraordinary Implications: Fermi-GBM Detection of GRB 170817A / A. Goldstein [и др.] // *Astrophys. J. Lett.* — 2017. — Т. 848, № 2. — С. L14. — DOI: 10.3847/2041-8213/aa8f41. — arXiv: 1710.05446 [astro-ph.HE].
4. INTEGRAL Detection of the First Prompt Gamma-Ray Signal Coincident with the Gravitational-wave Event GW170817 / V. Savchenko [и др.] // *Astrophys. J. Lett.* — 2017. — Т. 848, № 2. — С. L15. — DOI: 10.3847/2041-8213/aa8f94. — arXiv: 1710.05449 [astro-ph.HE].
5. *Penrose R.* Gravitational collapse and space-time singularities // *Phys. Rev. Lett.* — 1965. — Т. 14. — С. 57–59. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.14.57.
6. *Hawking S.* Occurrence of singularities in open universes // *Phys. Rev. Lett.* — 1965. — Т. 15. — С. 689–690. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.15.689.
7. *Horndeski G. W.* Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space // *Int. J. Theor. Phys.* — 1974. — Т. 10. — С. 363–384. — DOI: 10.1007/BF01807638.

8. *Nicolis A., Rattazzi R., Trincherini E.* The Galileon as a local modification of gravity // *Phys. Rev. D.* — 2009. — T. 79. — C. 064036. — DOI: 10.1103/PhysRevD.79.064036. — arXiv: 0811.2197 [hep-th].
9. From k-essence to generalised Galileons / C. Deffayet [и др.] // *Phys. Rev. D.* — 2011. — T. 84. — C. 064039. — DOI: 10.1103/PhysRevD.84.064039. — arXiv: 1103.3260 [hep-th].
10. *Kobayashi T., Yamaguchi M., Yokoyama J.* Generalized G-inflation: Inflation with the most general second-order field equations // *Prog. Theor. Phys.* — 2011. — T. 126. — C. 511—529. — DOI: 10.1143/PTP.126.511. — arXiv: 1105.5723 [hep-th].
11. *Deffayet C., Esposito-Farese G., Vikman A.* Covariant Galileon // *Phys. Rev. D.* — 2009. — T. 79. — C. 084003. — DOI: 10.1103/PhysRevD.79.084003. — arXiv: 0901.1314 [hep-th].
12. *Armendariz-Picon C., Mukhanov V. F., Steinhardt P. J.* A Dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late time cosmic acceleration // *Phys. Rev. Lett.* — 2000. — T. 85. — C. 4438—4441. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.4438. — arXiv: astro-ph/0004134.
13. *Armendariz-Picon C., Mukhanov V. F., Steinhardt P. J.* Essentials of k essence // *Phys. Rev. D.* — 2001. — T. 63. — C. 103510. — DOI: 10.1103/PhysRevD.63.103510. — arXiv: astro-ph/0006373.
14. *Rubakov V. A.* The Null Energy Condition and its violation // *Phys. Usp.* — 2014. — T. 57. — C. 128—142. — DOI: 10.3367/UFNe.0184.201402b.0137. — arXiv: 1401.4024 [hep-th].
15. *Brans C., Dicke R. H.* Mach's principle and a relativistic theory of gravitation // *Phys. Rev.* / под ред. J.-P. Hsu, D. Fine. — 1961. — T. 124. — C. 925—935. — DOI: 10.1103/PhysRev.124.925.
16. *Dvali G. R., Gabadadze G., Porrati M.* 4-D gravity on a brane in 5-D Minkowski space // *Phys. Lett. B.* — 2000. — T. 485. — C. 208—214. — DOI: 10.1016/S0370-2693(00)00669-9. — arXiv: hep-th/0005016.

17. *Evslin J., Qiu T.* Closed Timelike Curves in the Galileon Model // JHEP. — 2011. — T. 11. — C. 032. — DOI: 10.1007/JHEP11(2011)032. — arXiv: 1106.0570 [hep-th].
18. *Easson D. A., Sawicki I., Vikman A.* G-Bounce // JCAP. — 2011. — T. 11. — C. 021. — DOI: 10.1088/1475-7516/2011/11/021. — arXiv: 1109.1047 [hep-th].
19. *Sawicki I., Vikman A.* Hidden Negative Energies in Strongly Accelerated Universes // Phys. Rev. D. — 2013. — T. 87, № 6. — C. 067301. — DOI: 10.1103/PhysRevD.87.067301. — arXiv: 1209.2961 [astro-ph.CO].
20. *Rubakov V. A.* More about wormholes in generalized Galileon theories // Theor. Math. Phys. — 2016. — T. 188, № 2. — C. 1253–1258. — DOI: 10.1134/S0040577916080080. — arXiv: 1601.06566 [hep-th].
21. *Libanov M., Mironov S., Rubakov V.* Generalized Galileons: instabilities of bouncing and Genesis cosmologies and modified Genesis // JCAP. — 2016. — T. 08. — C. 037. — DOI: 10.1088/1475-7516/2016/08/037. — arXiv: 1605.05992 [hep-th].
22. *Kobayashi T.* Generic instabilities of nonsingular cosmologies in Horndeski theory: A no-go theorem // Phys. Rev. D. — 2016. — T. 94, № 4. — C. 043511. — DOI: 10.1103/PhysRevD.94.043511. — arXiv: 1606.05831 [hep-th].
23. *Kolevatov R., Mironov S.* Cosmological bounces and Lorentzian wormholes in Galileon theories with an extra scalar field // Phys. Rev. D. — 2016. — T. 94, № 12. — C. 123516. — DOI: 10.1103/PhysRevD.94.123516. — arXiv: 1607.04099 [hep-th].
24. *Cai Y., Piao Y.-S.* A covariant Lagrangian for stable nonsingular bounce // JHEP. — 2017. — T. 09. — C. 027. — DOI: 10.1007/JHEP09(2017)027. — arXiv: 1705.03401 [gr-qc].
25. *Mironov S.* Mathematical Formulation of the No-Go Theorem in Horndeski Theory // Universe. — 2019. — T. 5, № 2. — C. 52. — DOI: 10.3390/universe5020052.

26. *Akama S., Kobayashi T.* Generalized multi-Galileons, covariantized new terms, and the no-go theorem for nonsingular cosmologies // *Phys. Rev. D.* — 2017. — Т. 95, № 6. — С. 064011. — DOI: 10.1103/PhysRevD.95.064011. — arXiv: 1701.02926 [hep-th].
27. The Effective Field Theory of nonsingular cosmology / Y. Cai [и др.] // *JHEP.* — 2017. — Т. 01. — С. 090. — DOI: 10.1007/JHEP01(2017)090. — arXiv: 1610.03400 [gr-qc].
28. The Effective Field Theory of nonsingular cosmology: II / Y. Cai [и др.] // *Eur. Phys. J. C.* — 2017. — Т. 77, № 6. — С. 369. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-017-4938-y. — arXiv: 1701.04330 [gr-qc].
29. Stability of Geodesically Complete Cosmologies / P. Creminelli [и др.] // *JCAP.* — 2016. — Т. 11. — С. 047. — DOI: 10.1088/1475-7516/2016/11/047. — arXiv: 1610.04207 [hep-th].
30. Cosmological bounce and Genesis beyond Horndeski / R. Kolevatov [и др.] // *JCAP.* — 2017. — Т. 08. — С. 038. — DOI: 10.1088/1475-7516/2017/08/038. — arXiv: 1705.06626 [hep-th].
31. *Mironov S., Rubakov V., Volkova V.* In hot pursuit of a stable wormhole in beyond Horndeski theory // *Phys. Rev. D.* — 2023. — Т. 107, № 10. — С. 104061. — DOI: 10.1103/PhysRevD.107.104061. — arXiv: 2212.05969 [gr-qc].
32. *Volkova V. E., Mironov S. A.* Nonsingular cosmological scenarios in scalar-tensor theories and their stability // *Usp. Fiz. Nauk.* — 2025. — Т. 195, № 2. — С. 163—176. — DOI: 10.3367/UFNr.2024.12.039826. — arXiv: 2409.16108 [gr-qc].
33. *Mironov S., Volkova V.* Complete stability for spherically symmetric backgrounds in beyond Horndeski theory // *Int. J. Mod. Phys. A.* — 2024. — Т. 39, № 35. — С. 2443011. — DOI: 10.1142/S0217751X24430115. — arXiv: 2404.06297 [gr-qc].
34. *Babichev E., Charmousis C., Lehébel A.* Black holes and stars in Horndeski theory // *Class. Quant. Grav.* — 2016. — Т. 33, № 15. — С. 154002. — DOI: 10.1088/0264-9381/33/15/154002. — arXiv: 1604.06402 [gr-qc].

35. *Babichev E., Charmousis C.* Dressing a black hole with a time-dependent Galileon // JHEP. — 2014. — Т. 08. — С. 106. — DOI: 10.1007/JHEP08(2014)106. — arXiv: 1312.3204 [gr-qc].
36. General second order scalar-tensor theory, self tuning, and the Fab Four / C. Charmousis [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Т. 108. — С. 051101. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.051101. — arXiv: 1106.2000 [hep-th].
37. Beyond Fab Four / E. Babichev [и др.] // Class. Quant. Grav. — 2015. — Т. 32. — С. 242001. — DOI: 10.1088/0264-9381/32/24/242001. — arXiv: 1507.05942 [gr-qc].
38. *Weinberg S.* The Cosmological Constant Problem // Rev. Mod. Phys. / под ред. J.-P. Hsu, D. Fine. — 1989. — Т. 61. — С. 1—23. — DOI: 10.1103/RevModPhys.61.1.
39. *Poisson E.* A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics. — Cambridge University Press, 12.2009. — DOI: 10.1017/CB09780511606601.
40. Null energy condition and superluminal propagation / S. Dubovsky [и др.] // JHEP. — 2006. — Т. 03. — С. 025. — DOI: 10.1088/1126-6708/2006/03/025. — arXiv: hep-th/0512260.
41. *Ijjas A., Steinhardt P. J.* Classically stable nonsingular cosmological bounces // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Т. 117, № 12. — С. 121304. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.121304. — arXiv: 1606.08880 [gr-qc].
42. Unbraiding the Bounce: Superluminality around the Corner / D. A. Dobre [и др.] // JCAP. — 2018. — Т. 03. — С. 020. — DOI: 10.1088/1475-7516/2018/03/020. — arXiv: 1712.10272 [gr-qc].
43. *Mironov S., Shtennikova A.* Stable cosmological solutions in Horndeski theory // JCAP. — 2023. — Т. 06. — С. 037. — DOI: 10.1088/1475-7516/2023/06/037. — arXiv: 2212.03285 [gr-qc].
44. *Ageeva Y., Petrov P., Rubakov V.* Nonsingular cosmological models with strong gravity in the past // Phys. Rev. D. — 2021. — Т. 104, № 6. — С. 063530. — DOI: 10.1103/PhysRevD.104.063530. — arXiv: 2104.13412 [hep-th].

45. Stable bouncing solutions in teleparallel Horndeski gravity / B. Ahmedov [и др.] // Phys. Dark Univ. — 2025. — Т. 50. — С. 102100. — DOI: 10.1016/j.dark.2025.102100.
46. Reviving Horndeski theory using teleparallel gravity after GW170817 / S. Bahamonde [и др.] // Phys. Rev. D. — 2020. — Т. 101, № 8. — С. 084060. — DOI: 10.1103/PhysRevD.101.084060. — arXiv: 1907.10057 [gr-qc].
47. Speed of Gravitational Waves and the Fate of Scalar-Tensor Gravity / D. Bettoni [и др.] // Phys. Rev. D. — 2017. — Т. 95, № 8. — С. 084029. — DOI: 10.1103/PhysRevD.95.084029. — arXiv: 1608.01982 [gr-qc].
48. *Ezquiaga J. M., Zumalacárregui M.* Dark Energy After GW170817: Dead Ends and the Road Ahead // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Т. 119, № 25. — С. 251304. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.251304. — arXiv: 1710.05901 [astro-ph.CO].
49. *Sakstein J., Jain B.* Implications of the Neutron Star Merger GW170817 for Cosmological Scalar-Tensor Theories // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Т. 119, № 25. — С. 251303. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.251303. — arXiv: 1710.05893 [astro-ph.CO].
50. Strong constraints on cosmological gravity from GW170817 and GRB 170817A / T. Baker [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Т. 119, № 25. — С. 251301. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.251301. — arXiv: 1710.06394 [astro-ph.CO].
51. *Creminelli P., Vernizzi F.* Dark Energy after GW170817 and GRB170817A // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Т. 119, № 25. — С. 251302. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.251302. — arXiv: 1710.05877 [astro-ph.CO].
52. Scalar-tensor theories and modified gravity in the wake of GW170817 / D. Langlois [и др.] // Phys. Rev. D. — 2018. — Т. 97, № 6. — С. 061501. — DOI: 10.1103/PhysRevD.97.061501. — arXiv: 1711.07403 [gr-qc].
53. Gravitational Wave Decay into Dark Energy / P. Creminelli [и др.] // JCAP. — 2018. — Т. 12. — С. 025. — DOI: 10.1088/1475-7516/2018/12/025. — arXiv: 1809.03484 [astro-ph.CO].

54. *Langlois D., Noui K.* Degenerate higher derivative theories beyond Horndeski: evading the Ostrogradski instability // JCAP. — 2016. — Т. 02. — С. 034. — DOI: 10.1088/1475-7516/2016/02/034. — arXiv: 1510.06930 [gr-qc].
55. Degenerate higher order scalar-tensor theories beyond Horndeski up to cubic order / J. Ben Achour [и др.] // JHEP. — 2016. — Т. 12. — С. 100. — DOI: 10.1007/JHEP12(2016)100. — arXiv: 1608.08135 [hep-th].
56. Effective Description of Higher-Order Scalar-Tensor Theories / D. Langlois [и др.] // JCAP. — 2017. — Т. 05. — С. 033. — DOI: 10.1088/1475-7516/2017/05/033. — arXiv: 1703.03797 [hep-th].
57. *Langlois D.* Dark energy and modified gravity in degenerate higher-order scalar-tensor (DHOST) theories: A review // Int. J. Mod. Phys. D. — 2019. — Т. 28, № 05. — С. 1942006. — DOI: 10.1142/S0218271819420069. — arXiv: 1811.06271 [gr-qc].
58. *Tasinato G., Koyama K., Khosravi N.* The role of vector fields in modified gravity scenarios // JCAP. — 2013. — Т. 11. — С. 037. — DOI: 10.1088/1475-7516/2013/11/037. — arXiv: 1307.0077 [hep-th].
59. *Petrov P.* Galileon-like vector fields // Phys. Rev. D. — 2019. — Т. 100, № 2. — С. 025006. — DOI: 10.1103/PhysRevD.100.025006. — arXiv: 1812.11134 [hep-th].
60. A no-go theorem for generalized vector Galileons on flat spacetime / C. Deffayet [и др.] // JHEP. — 2014. — Т. 04. — С. 082. — DOI: 10.1007/JHEP04(2014)082. — arXiv: 1312.6690 [hep-th].
61. *Colléaux A., Langlois D., Noui K.* Classification of generalised higher-order Einstein-Maxwell Lagrangians // JHEP. — 2024. — Т. 03. — С. 041. — DOI: 10.1007/JHEP03(2024)041. — arXiv: 2312.14814 [gr-qc].
62. *Colléaux A., Langlois D., Noui K.* Degenerate higher-order Maxwell theories in flat space-time // JHEP. — 2024. — Т. 10. — С. 218. — DOI: 10.1007/JHEP10(2024)218. — arXiv: 2404.18715 [gr-qc].
63. *Heisenberg L., Kase R., Tsujikawa S.* Cosmology in scalar-vector-tensor theories // Phys. Rev. D. — 2018. — Т. 98, № 2. — С. 024038. — DOI: 10.1103/PhysRevD.98.024038. — arXiv: 1805.01066 [gr-qc].

64. *Heisenberg L.* Scalar-Vector-Tensor Gravity Theories // JCAP. — 2018. — T. 10. — C. 054. — DOI: 10.1088/1475-7516/2018/10/054. — arXiv: 1801.01523 [gr-qc].
65. Stability of Horndeski vector-tensor interactions / J. Beltran Jimenez [и др.] // JCAP. — 2013. — T. 10. — C. 064. — DOI: 10.1088/1475-7516/2013/10/064. — arXiv: 1308.1867 [hep-th].
66. *Mironov S., Shtennikova A., Valencia-Villegas M.* Reviving Horndeski after GW170817 by Kaluza-Klein compactifications // Phys. Lett. B. — 2024. — T. 858. — C. 139058. — DOI: 10.1016/j.physletb.2024.139058. — arXiv: 2405.02281 [hep-th].
67. *Mironov S., Shtennikova A., Valencia-Villegas M.* Higher derivative scalar-vector-tensor theories from Kaluza-Klein reductions of Horndeski theory // Phys. Rev. D. — 2025. — T. 111, № 2. — C. 024028. — DOI: 10.1103/PhysRevD.111.024028. — arXiv: 2408.04626 [hep-th].
68. *Mironov S., Shtennikova A., Valencia-Villegas M.* Luminal scalar-tensor theories for a not so dark dark energy // Phys. Rev. D. — 2025. — T. 111, № 10. — C. L101501. — DOI: 10.1103/PhysRevD.111.L101501. — arXiv: 2412.13460 [hep-th].
69. *Brax P., Burrage C.* Constraining Disformally Coupled Scalar Fields // Phys. Rev. D. — 2014. — T. 90, № 10. — C. 104009. — DOI: 10.1103/PhysRevD.90.104009. — arXiv: 1407.1861 [astro-ph.CO].
70. *Brax P., Burrage C., Englert C.* Disformal dark energy at colliders // Phys. Rev. D. — 2015. — T. 92, № 4. — C. 044036. — DOI: 10.1103/PhysRevD.92.044036. — arXiv: 1506.04057 [hep-ph].
71. Horndeski speed tests with scalar-photon couplings / E. Babichev [и др.] // JCAP. — 2025. — T. 01. — C. 041. — DOI: 10.1088/1475-7516/2025/01/041. — arXiv: 2407.20339 [gr-qc].
72. *Helpin T., Volkov M. S.* Varying the Horndeski Lagrangian within the Palatini approach // JCAP. — 2020. — T. 01. — C. 044. — DOI: 10.1088/1475-7516/2020/01/044. — arXiv: 1906.07607 [hep-th].

73. Cosmological Perturbations in Palatini Formalism / M. Kubota [и др.] // JCAP. — 2021. — Т. 03. — С. 006. — DOI: 10.1088/1475-7516/2021/03/006. — arXiv: 2010.07867 [hep-th].
74. Imperfect Dark Energy from Kinetic Gravity Braiding / C. Deffayet [и др.] // JCAP. — 2010. — Т. 10. — С. 026. — DOI: 10.1088/1475-7516/2010/10/026. — arXiv: 1008.0048 [hep-th].
75. *Padilla A., Sivanesan V.* Covariant multi-galileons and their generalisation // JHEP. — 2013. — Т. 04. — С. 032. — DOI: 10.1007/JHEP04(2013)032. — arXiv: 1210.4026 [gr-qc].
76. *Fairlie D. B., Govaerts J., Morozov A.* Universal field equations with covariant solutions // Nucl. Phys. B. — 1992. — Т. 373. — С. 214–232. — DOI: 10.1016/0550-3213(92)90455-K. — arXiv: hep-th/9110022.
77. *Kobayashi T.* Horndeski theory and beyond: a review // Rept. Prog. Phys. — 2019. — Т. 82, № 8. — С. 086901. — DOI: 10.1088/1361-6633/ab2429. — arXiv: 1901.07183 [gr-qc].
78. Cosmological gravity probes: Connecting recent theoretical developments to forthcoming observations / S. Arai [и др.] // PTEP. — 2023. — Т. 2023, № 7. — 072E01. — DOI: 10.1093/ptep/ptad052. — arXiv: 2212.09094 [astro-ph.CO]. — [Erratum: PTEP 2024, 079201 (2024)].
79. Starting the Universe: Stable Violation of the Null Energy Condition and Non-standard Cosmologies / P. Creminelli [и др.] // JHEP. — 2006. — Т. 12. — С. 080. — DOI: 10.1088/1126-6708/2006/12/080. — arXiv: hep-th/0606090.
80. *Kobayashi T., Yamaguchi M., Yokoyama J.* G-inflation: Inflation driven by the Galileon field // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Т. 105. — С. 231302. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.231302. — arXiv: 1008.0603 [hep-th].
81. *Creminelli P., Nicolis A., Trincherini E.* Galilean Genesis: An Alternative to inflation // JCAP. — 2010. — Т. 11. — С. 021. — DOI: 10.1088/1475-7516/2010/11/021. — arXiv: 1007.0027 [hep-th].

82. *Luty M. A., Porrati M., Rattazzi R.* Strong interactions and stability in the DGP model // JHEP. — 2003. — T. 09. — C. 029. — DOI: 10.1088/1126-6708/2003/09/029. — arXiv: hep-th/0303116.
83. *Volkova V. E., Mironov S. A., Rubakov V. A.* Cosmological Scenarios with Bounce and Genesis in Horndeski Theory and Beyond // J. Exp. Theor. Phys. — 2019. — T. 129, № 4. — C. 553–565. — DOI: 10.1134/S1063776119100236.
84. *Mironov S., Rubakov V., Volkova V.* Subluminal cosmological bounce beyond Horndeski // JCAP. — 2020. — T. 05. — C. 024. — DOI: 10.1088/1475-7516/2020/05/024. — arXiv: 1910.07019 [hep-th].
85. *Mironov S., Rubakov V., Volkova V.* Superluminality in DHOST theory with extra scalar // JHEP. — 2021. — T. 04. — C. 035. — DOI: 10.1007/JHEP04(2021)035. — arXiv: 2011.14912 [hep-th].
86. *Mironov S., Rubakov V., Volkova V.* Superluminality in beyond Horndeski theory with extra scalar field // Phys. Scripta. — 2020. — T. 95, № 8. — C. 084002. — DOI: 10.1088/1402-4896/ab996a. — arXiv: 2005.12626 [hep-th].
87. *Aoki K., Shimada K.* Galileon and generalized Galileon with projective invariance in a metric-affine formalism // Phys. Rev. D. — 2018. — T. 98, № 4. — C. 044038. — DOI: 10.1103/PhysRevD.98.044038. — arXiv: 1806.02589 [gr-qc].
88. *Helpin T., Volkov M. S.* A metric-affine version of the Horndeski theory // Int. J. Mod. Phys. A / под ред. V. M. Mostepanenko, E. N. Velichko. — 2020. — T. 35, 02n03. — C. 2040010. — DOI: 10.1142/S0217751X20400102. — arXiv: 1911.12768 [hep-th].
89. *Dong Y.-Q., Liu Y.-Q., Liu Y.-X.* Constraining Palatini–Horndeski theory with gravitational waves after GW170817 // Eur. Phys. J. C. — 2023. — T. 83, № 8. — C. 702. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-023-11861-9. — arXiv: 2211.12056 [gr-qc].
90. *Davydov E.* Comparing metric and Palatini approaches to vector Horndeski theory // Int. J. Mod. Phys. D. — 2017. — T. 27, № 04. — C. 1850038. — DOI: 10.1142/S0218271818500384. — arXiv: 1708.09796 [hep-th].

91. *Dong Y.-Q., Liu Y.-X.* Polarization modes of gravitational waves in Palatini-Horndeski theory // *Phys. Rev. D.* — 2022. — Т. 105, № 6. — С. 064035. — DOI: 10.1103/PhysRevD.105.064035. — arXiv: 2111.07352 [gr-qc].
92. Ghost and Laplacian instabilities in teleparallel Horndeski gravity / S. Capozziello [и др.] // *JCAP.* — 2023. — Т. 03. — С. 060. — DOI: 10.1088/1475-7516/2023/03/060. — arXiv: 2301.04457 [gr-qc].
93. *Dialektopoulos K. F., Said J. L., Oikonomopoulou Z.* Classification of teleparallel Horndeski cosmology via Noether symmetries // *Eur. Phys. J. C.* — 2022. — Т. 82, № 3. — С. 259. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-022-10201-7. — arXiv: 2112.15045 [gr-qc].
94. Well-tempered Minkowski solutions in teleparallel Horndeski theory / R. C. Bernardo [и др.] // *Class. Quant. Grav.* — 2022. — Т. 39, № 1. — С. 015013. — DOI: 10.1088/1361-6382/ac36e4. — arXiv: 2108.02500 [gr-qc].
95. Well-tempered teleparallel Horndeski cosmology: a teleparallel variation to the cosmological constant problem / R. C. Bernardo [и др.] // *JCAP.* — 2021. — Т. 10. — С. 078. — DOI: 10.1088/1475-7516/2021/10/078. — arXiv: 2107.08762 [gr-qc].
96. Post-Newtonian limit of Teleparallel Horndeski gravity / S. Bahamonde [и др.] // *Class. Quant. Grav.* — 2020. — Т. 38, № 2. — С. 025006. — DOI: 10.1088/1361-6382/abc441. — arXiv: 2003.11554 [gr-qc].
97. *Bahamonde S., Dialektopoulos K. F., Levi Said J.* Can Horndeski Theory be recast using Teleparallel Gravity? // *Phys. Rev. D.* — 2019. — Т. 100, № 6. — С. 064018. — DOI: 10.1103/PhysRevD.100.064018. — arXiv: 1904.10791 [gr-qc].
98. *Mironov S., Valencia-Villegas M.* Quartic Horndeski-Cartan theories in a FLRW universe // *Phys. Rev. D.* — 2023. — Т. 108, № 2. — С. 024057. — DOI: 10.1103/PhysRevD.108.024057. — arXiv: 2304.04722 [hep-th].
99. *Mironov S., Valencia-Villegas M.* Stability of nonsingular cosmologies in Galileon models with torsion: A no-go theorem for eternal subluminality // *Phys. Rev. D.* — 2024. — Т. 109, № 4. — С. 044073. — DOI: 10.1103/PhysRevD.109.044073. — arXiv: 2307.06929 [hep-th].

100. *Mironov S., Valencia-Villegas M.* Healthy Horndeski cosmologies with torsion // JCAP. — 2024. — T. 07. — C. 030. — DOI: 10.1088/1475-7516/2024/07/030. — arXiv: 2405.08673 [gr-qc].
101. *Shapiro I. L.* Physical aspects of the space-time torsion // Phys. Rept. — 2002. — T. 357. — C. 113. — DOI: 10.1016/S0370-1573(01)00030-8. — arXiv: hep-th/0103093.
102. *Golovnev A., Koivisto T.* Cosmological perturbations in modified teleparallel gravity models // JCAP. — 2018. — T. 11. — C. 012. — DOI: 10.1088/1475-7516/2018/11/012. — arXiv: 1808.05565 [gr-qc].
103. *Golovnev A., Guzman M.-J.* Nontrivial Minkowski backgrounds in $f(T)$ gravity // Phys. Rev. D. — 2021. — T. 103, № 4. — C. 044009. — DOI: 10.1103/PhysRevD.103.044009. — arXiv: 2012.00696 [gr-qc].
104. *Beltrán Jiménez J., Dialektopoulos K. F.* Non-Linear Obstructions for Consistent New General Relativity // JCAP. — 2020. — T. 01. — C. 018. — DOI: 10.1088/1475-7516/2020/01/018. — arXiv: 1907.10038 [gr-qc].
105. Cosmology in $f(Q)$ geometry / J. Beltrán Jiménez [и др.] // Phys. Rev. D. — 2020. — T. 101, № 10. — C. 103507. — DOI: 10.1103/PhysRevD.101.103507. — arXiv: 1906.10027 [gr-qc].
106. Causality, analyticity and an IR obstruction to UV completion / A. Adams [и др.] // JHEP. — 2006. — T. 10. — C. 014. — DOI: 10.1088/1126-6708/2006/10/014. — arXiv: hep-th/0602178.
107. *Creminelli P., Janssen O., Senatore L.* Positivity bounds on effective field theories with spontaneously broken Lorentz invariance // JHEP. — 2022. — T. 09. — C. 201. — DOI: 10.1007/JHEP09(2022)201. — arXiv: 2207.14224 [hep-th].
108. *Mironov S., Rubakov V., Volkova V.* Bounce beyond Horndeski with GR asymptotics and γ -crossing // JCAP. — 2018. — T. 10. — C. 050. — DOI: 10.1088/1475-7516/2018/10/050. — arXiv: 1807.08361 [hep-th].
109. *Easson D. A., Sawicki I., Vikman A.* When Matter Matters // JCAP. — 2013. — T. 07. — C. 014. — DOI: 10.1088/1475-7516/2013/07/014. — arXiv: 1304.3903 [hep-th].

110. *Babichev E., Mukhanov V., Vikman A.* k-Essence, superluminal propagation, causality and emergent geometry // JHEP. — 2008. — Т. 02. — С. 101. — DOI: 10.1088/1126-6708/2008/02/101. — arXiv: 0708.0561 [hep-th].
111. *Valencia-Villegas M.* Quartic Horndeski-Cartan theories: a review on the stability of nonsingular cosmologies // PoS. — 2024. — Т. ICPPCRubakov2023. — С. 033. — DOI: 10.22323/1.455.0033.
112. DESI 2024 VI: cosmological constraints from the measurements of baryon acoustic oscillations / A. G. Adame [и др.] // JCAP. — 2025. — Т. 02. — С. 021. — DOI: 10.1088/1475-7516/2025/02/021. — arXiv: 2404.03002 [astro-ph.CO].
113. Dynamical Dark Energy in light of the DESI DR2 Baryonic Acoustic Oscillations Measurements / G. Gu [и др.] // Nature Astronomy. — 2025. — Апр. — ISSN 2397-3366. — DOI: 10.1038/s41550-025-02669-6. — arXiv: 2504.06118 [astro-ph.CO].
114. Hints of Nonminimally Coupled Gravity in DESI 2024 Baryon Acoustic Oscillation Measurements / G. Ye [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2025. — Т. 134, № 18. — С. 181002. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.134.181002. — arXiv: 2407.15832 [astro-ph.CO].
115. Scant evidence for thawing quintessence / W. J. Wolf [и др.] // Phys. Rev. D. — 2024. — Т. 110, № 8. — С. 083528. — DOI: 10.1103/PhysRevD.110.083528. — arXiv: 2408.17318 [astro-ph.CO].
116. *Colgáin E. Ó., Sheikh-Jabbari M. M.* DESI and SNe: Dynamical Dark Energy, Ω_m Tension or Systematics? — 2024. — Дек. — arXiv: 2412.12905 [astro-ph.CO].
117. Does DESI 2024 confirm Λ CDM? / E. Ó. Colgáin [и др.] // JHEAp. — 2026. — Т. 49. — С. 100428. — DOI: 10.1016/j.jheap.2025.100428. — arXiv: 2404.08633 [astro-ph.CO].
118. *Shlivko D., Steinhardt P. J.* Assessing observational constraints on dark energy // Phys. Lett. B. — 2024. — Т. 855. — С. 138826. — DOI: 10.1016/j.physletb.2024.138826. — arXiv: 2405.03933 [astro-ph.CO].

119. *Cortês M., Liddle A. R.* Interpreting DESI's evidence for evolving dark energy // JCAP. — 2024. — Т. 12. — С. 007. — DOI: 10.1088/1475-7516/2024/12/007. — arXiv: 2404.08056 [astro-ph.CO].
120. *Patel V., Chakraborty A., Amendola L.* The prior dependence of the DESI results. — 2024. — Июль. — arXiv: 2407.06586 [astro-ph.CO].
121. *Wolf W. J., Ferreira P. G., García-García C.* Matching current observational constraints with nonminimally coupled dark energy // Phys. Rev. D. — 2025. — Т. 111, № 4. — С. L041303. — DOI: 10.1103/PhysRevD.111.L041303. — arXiv: 2409.17019 [astro-ph.CO].
122. *Kaluza T.* Zum Unitätsproblem der Physik // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) — 1921. — Т. 1921. — С. 966—972. — DOI: 10.1142/S0218271818700017. — arXiv: 1803.08616 [physics.hist-ph].
123. *Mironov S., Sharov M., Volkova V.* Linear stability of a time-dependent, spherically symmetric background in beyond Horndeski theory and the speed of gravity waves // Eur. Phys. J. C. — 2025. — Т. 85, № 1. — С. 50. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-024-13730-5. — arXiv: 2408.01480 [gr-qc].
124. *Mironov S., Sharov M., Volkova V.* Time-dependent, spherically symmetric background in Kaluza-Klein compactified Horndeski theory and the speed of gravity waves // JCAP. — 2025. — Т. 09. — С. 047. — DOI: 10.1088/1475-7516/2025/09/047. — arXiv: 2408.06329 [gr-qc].
125. Healthy theories beyond Horndeski / J. Gleyzes [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Т. 114, № 21. — С. 211101. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.211101. — arXiv: 1404.6495 [hep-th].
126. Exploring gravitational theories beyond Horndeski / J. Gleyzes [и др.] // JCAP. — 2015. — Т. 02. — С. 018. — DOI: 10.1088/1475-7516/2015/02/018. — arXiv: 1408.1952 [astro-ph.CO].