

ОТЗЫВ

официального оппонента Славнова Никиты Андреевича на диссертацию Слепцова Алексея Васильевича "Симметрии квантовых инвариантов узлов и квантовых b_j -символов", представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 – «теоретическая физика».

Диссертация А.В. Слепцова посвящена исследованию квантовых инвариантов узлов и квантовых b_j -символов. Квантовые инварианты узлов возникают на стыке квантовой теории поля, маломерной топологии и теории представлений квантовых групп, поэтому их всестороннее изучение представляет несомненную научную ценность. Разрабатываемые в диссертации методы исследования квантовых инвариантов узлов базируются на применении матриц b_j -символов (матрицы Рака-Вигнера). Теорию таких матриц для групп старших рангов еще предстоит построить. Важность изучения b_j -символов в теоретической и математической физике обусловлена тем, что они применяются для решения широкого круга задач, среди которых можно отметить задачи спектроскопии в ядерной физике, модели квантовой гравитации, теории интегрируемых систем и инвариантов трехмерных многообразий. Все это говорит о безусловной актуальности темы представленной диссертации.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и приложения. Во введении обосновывается актуальность темы диссертации и приводится обзор современного состояния исследований. Далее кратко формулируются основные положения теории Черна-Саймонса, теории узлов и квантовых b_j -символов. Указаны цели и задачи диссертации, используемые методы исследования, научная новизна и значимость

полученных результатов.

В главе 1 автор обсуждает вычисление квантовых инвариантов узлов с помощью R -матриц и квантовых b_j -символов. Здесь рассматриваются трехнитевые косы, раскрашенные симметрическими представлениями квантовой алгебры $sl(N)$. Показано, что все матрицы b_j -символов, необходимые для вычислений, совпадают с матрицами b_j -символов квантовой алгебры $sl(2)$, для которой они известны в общем виде. Это позволяет вычислять инварианты узлов и зацеплений из обширного семейства узлов, реализованных на трехнитевых косах, раскрашенных произвольными симметрическими представлениями квантовой алгебры $sl(N)$. В главе 1 также обсуждается новый класс нетривиальных симметрий квантовых инвариантов узлов, раскрашенных разными представлениями алгебры $sl(N)$ при определенных значениях N . В рамках теории Черна-Саймонса с калибровочной супергруппой $SU(N+M|M)$ данный класс симметрий возникает как неоднозначность задания конечномерного представления. В то же время, с точки зрения формализма Решетихина-Тураева и теории квантовых групп, данный класс симметрий является следствием симметрий уравнения Янга-Бакстера и гипотезы о собственных значениях.

В главе 2 рассматривается альтернативный подход к построению квантовых инвариантов, основанный на дуальности между теорией Черна-Саймонса и конформной теорией поля Весса-Зумино-Новикова-Виттена. Для семейства крендельных узлов и зацеплений вычислены квантовые инварианты, раскрашенные произвольными симметрическими представлениями алгебры $sl(N)$. Для этого автор строит соответствующие матрицы слияния, которые с точностью до коэффициента пропорциональности равны матрицам квантовых b_j -символов. С помощью полученных результатов исследованы топологические свойства

крендельных узлов и зацеплений, а также построена классификация крендельных узлов с минимальным числом пересечений не более 10.

В главе 3 описывается соответствие между групповыми структурами пертурбативного разложения корреляторов теории Черна-Саймонса (в специальном пределе к цветным полиномам Александра) и дисперсионными соотношениями односолитонной тау-функции интегрируемой иерархии Кадомцева-Петвиашвили (КП). Здесь показано, что цветной полином Александра вкладывается в действие производящей функции КП на солитонную тау-функцию. С помощью этого результата автор получает простое комбинаторное описание групповых структур Черна-Саймонса в рассматриваемом пределе.

В главе 4 приведен пример вычислений в рамках калибровочно-струнной дуальности, которая в данном конкретном случае позволяет находить спектр БПС состояний в топологической теории струн на некомпактном многообразии Калаби-Яу из теории Черна-Саймонса. На примере этих вычислений автор иллюстрирует, как с помощью раскрашенных квантовых инвариантов узлов можно проверять струнные гипотезы. Автор приводит точные формулировки гипотез для групп $SU(N)$ и $SO(N)$ и подробно разбирает детали проверки этих гипотез. Важно отметить, что ряд подобных проверок стал возможен благодаря результатам, которые получены автором, при вычислении раскрашенных инвариантов узлов. В главе 4 также сформулирована гипотеза о гауссовом распределении спектра БПС состояний. Это говорит о том, что данные состояния не являются фундаментальными.

В главе 5 представлен метод построения новых симметрий и соотношений на $\mathfrak{sl}(N)$ -символы для квантовой алгебры $\mathfrak{sl}(N)$ при $N > 2$. Метод проистекает из свойства однородности квантового уравнения Янга-Бакстера. Анализируя это уравнение, автор доказывает, что для представлений

квантовой алгебры $sl(2)$ упомянутое свойство однородности эквивалентно матричным симметриям b_j -символов. В случае алгебр старших рангов автор использует это свойство для построения новых симметрий b_j -символов. Для симметрических представлений показано, что число симметрий бесконечно в отличие от случая $sl(2)$, где группа симметрий содержит конечное число элементов, равное 144. Для b_j -символов с представлениями, сопряженными к симметрическим, найдены симметрии, которые нетривиальным образом обобщают известные симметрии Редже и тетраэдра из алгебры $sl(2)$. Кроме того, для этих b_j -символов получена явная формула через q -гипергеометрическую функцию и проанализировано, как найденные симметрии связаны с известными симметриями гипергеометрических функций.

Заключение содержит основные результаты диссертации. В приложении собраны необходимые для диссертации элементы теории узлов.

Характеризуя диссертацию в целом, следует отметить не только несомненную ценность и значимость полученных результатов, но и колоссальный объем работы, проделанный автором. Даже с учетом применения компьютерных вычислений такой объем требует многолетнего труда. Следует также отметить хорошую подачу материала, что облегчает понимание диссертации. Существенных недостатков я не обнаружил.

Результаты диссертации своевременно опубликованы в зарубежных и отечественных журналах и неоднократно докладывались на международных научных конференциях. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Диссертационная работа выполнена на высоком научном уровне, представляет собой законченную научно-квалификационную работу и

удовлетворяет всем критериям «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 года № 842, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук, а ее автор, Слепцов Алексей Васильевич, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 – «теоретическая физика».

Доктор физико-математических наук
заведующий отделом теоретической физики
ведущий научный сотрудник

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В.А.Стеклова РАН
119991, Москва, ул. Губкина, д. 8
тел. +7 (495) 984 81 41
e-mail: nslavnov@mi-ras.ru

06 июня 2022 года

Н.А. Славнов

Подпись д.ф.-м.н. Н.А.Славнова удостоверяю:

Ученый секретарь МИАН
к.ф.-м.н.

С.А. Поликарпов

Славнов Никита Андреевич

доктор физико-математических наук по специальности 01.04.02 – «Теоретическая физика»

Список основных публикаций по теме диссертации А.В.Слепцова:

1. A.A.Hutsalyuk, A.Liashyk, S.Z.Pakulyak, E.Ragoucy, N.A.Slavnov. Current presentation for the super-Yangian double and Bethe vectors //Russian Mathematical Surveys. – 2017. – Т. 72. – №. 1. – С. 33.
2. A.A.Hutsalyuk, A.Liashyk, S.Z.Pakulyak, E.Ragoucy, N.A.Slavnov. Scalar products of Bethe vectors in the models with $gl(m|n)$ symmetry //Nuclear Physics B. – 2017. – Т. 923. – С. 277-311.
3. Pakuliak S. Z., Ragoucy E., Slavnov N. A. Bethe vectors for models based on the super-Yangian $Y(gl(m|n))$ //Journal of Integrable Systems. – 2017. – Т. 2. – №. 1. - С. 1-31.
4. A.A.Hutsalyuk, A.Liashyk, S.Z.Pakulyak, E.Ragoucy. Scalar products of Bethe vectors in models with $gl(2|1)$ symmetry 2. Determinant representation //Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2017. – Т. 50. – №. 3. – С. 1-22.
5. Fuksa J., Slavnov N. A. Form factors of local operators in supersymmetric quantum integrable models //Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. – 2017. – Т. 2017. – №. 4. – С. 043106.
6. A.A.Hutsalyuk, A.Liashyk, S.Z.Pakulyak, E.Ragoucy. Norm of Bethe vectors in models with $gl(m|n)$ symmetry //Nuclear Physics B. – 2018. – Т. 926. – С. 256-278.
7. A.A.Hutsalyuk, A.Liashyk, S.Z.Pakulyak, E.Ragoucy. Scalar products and norm of Bethe vectors for integrable models based on $U_q(gl(n))$ //SciPost Physics. – 2018. – Т. 4. – №. 1. – С. 006.
8. Belliard S., Slavnov N. A. A note on $gl(2)$ -invariant Bethe vectors //Journal of High Energy Physics. – 2018. – Т. 2018. – №. 4. – С. 1-15
9. Liashyk A., Slavnov N. A. On Bethe vectors in $gl(3)$ -invariant integrable models //Journal of High Energy Physics. – 2018. – Т. 2018. – №. 6. – С. 1-32.
10. Belliard S., Slavnov N. A., Vallet B. Scalar product of twisted XXX modified Bethe vectors //Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. – 2018. – Т. 2018. – №. 9. – С. 093103.
11. Slavnov N. A. Determinant representations for scalar products in the algebraic Bethe ansatz //Theoretical and Mathematical Physics. – 2018. – Т. 197. – №. 3. – С. 1771-1778.
12. Belliard S., Slavnov N. A. Why scalar products in the algebraic Bethe ansatz have determinant representation //Journal of High Energy Physics. – 2019. – Т. 2019. – №. 10. – С. 1-17.
13. Slavnov N. A. Generating function for scalar products in the algebraic Bethe ansatz //Theoretical and Mathematical Physics. – 2020. – Т. 204. – №. 3. – С. 1216-1226.
14. Slavnov N., Zabrodin A., Zotov A. Scalar products of Bethe vectors in the 8-vertex model //Journal of High Energy Physics. – 2020. – Т. 2020. – №. 6. – С. 1-55.
15. Belliard S., Pimenta R. A., Slavnov N. A. Scalar product for the XXZ spin chain with general integrable boundaries //Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2021. – Т. 54. – №. 34. – С. 344001.