

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт ядерных исследований Российской академии наук (ИЯИ РАН)

На правах рукописи

Штенникова Арина Михайловна

Динамика космологических возмущений в теории Хорндески

Специальность 1.3.3 —
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук,
Миронов Сергей Андреевич

Москва — 2025

Содержание

Введение	3
1 Устойчивость решений над изотропным фоном	17
1.1 Возмущения в теории Хорндески	17
1.2 Запрещающая теорема в теории Хорндески	20
1.3 Действие для скалярного сектора в терминах калибровочно - ин- вариантных переменных	23
1.4 Интегрирование связей в общем случае	24
1.5 Интегрирование связей в случае $A_4 \equiv 0$	26
1.5.1 $A_{11} = 0$	27
1.5.2 $\dot{\pi} = 0$	27
1.6 Промежуточные итоги	29
1.7 Построение стабильных решений.	30
1.7.1 Вселенная с отскоком	31
1.7.2 Генезис	33
2 Устойчивость решений над анизотропным фоном	35
2.1 Возмущения над анизотропным фоном	35
2.2 Переход к калибровочно-инвариантным величинам	38
2.3 Изотропный предел	40
2.4 Проверка стабильности вселенной с отскоком относительно малой анизотропии	41
3 Скалярно-Векторно-Тензорные теории с высшими производны- ми	45
3.1 Редукция теории обобщенных галилеонов в пятимерном простран- стве	47
3.2 Возмущения СВТ-теории над космологическим фоном	53
3.3 Векторный сектор	54
3.4 О Вайнштейновском экранировании модификаций вблизи источников	56
3.5 Скалярный сектор	61

3.6	Устойчивость FLRW фона относительно возмущений	63
3.7	Светоподобная ветвь фоновых решений	65
Заключение		68
Приложение		83
A	Выражения для коэффициентов A_i в квадратичном действии для возмущений над изотропным фоном	83
B	Выражения для коэффициентов A_i и B_{ij} в квадратичном действии для возмущений над анизотропным фоном	86
C	Свертки пятимерных величин	91
D	Фоновые уравнения движения теории обобщенных галилеонов после размерной редукции	93
E	Коэффициенты квадратичного действия теории обобщенных галилеонов после размерной редукции	95

Введение

Актуальность темы исследования

Современные экспериментальные данные физики частиц и теоретические исследования в области космологии дают нам много информации о самых ранних этапах развития Вселенной.

Одной из наиболее проработанных моделей, описывающих процессы, происходившие во Вселенной вплоть до самых ранних времен, является теория горячего Большого взрыва. Однако эта теория имеет ряд недостатков, которые требуют существенного дополнения модели. Классическими проблемами теории горячего Большого взрыва являются проблемы горизонта, плоскостности и энтропии, а также проблема первичных неоднородностей. Сама по себе теория Большого взрыва не объясняет свойств наблюдаемой нами Вселенной, таких как однородность и изотропность (проблема горизонта), высокий уровень энтропии, практически нулевую кривизну пространства-времени, а также в ней отсутствует механизм генерации неоднородностей, которые необходимы для образования наблюдаемых нами глобальных структур, таких как звезды и галактики. Для решения всех этих проблем необходимо выбрать очень специальные начальные условия, которые не имеют в изначальной модели какой-либо подоплеки.

Одним из наиболее популярных, и сейчас уже можно сказать, стандартным вариантом является рассмотрение модели инфляции [1—5]. Согласно инфляционной теории, перед горячей стадией было быстрое, почти экспоненциальное расширение Вселенной. Именно сверхбыстрое расширение объясняет огромный размер наблюдаемой части Вселенной, её однородность и изотропность, а также плоскую геометрию. Проблема энтропии также находит объяснение в рамках теории инфляции, благодаря постинфляционному разогреву. Более того, теория инфляции естественным образом решает проблему начальных неоднородностей.

На данный момент существует множество различных инфляционных моделей. Экспериментальные и наблюдательные данные ограничивают параметры этих теорий, но не позволяют определить единственно верную модель [6]. Для окончательного подтверждения теории инфляции необходимы дополнительные исследования современной Вселенной.

Кроме того, в теориях инфляции так же имеются свои проблемы. К одной из общих для большинства моделей, например, относится проблема наличия начальной сингулярности. Действительно, однородное и изотропное пространство-время описывается метрикой Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера (FLRW)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\sigma^2, \quad (1)$$

где $d\sigma^2$ - метрика трехмерного пространства постоянной кривизны. Вид метрики (1) указывает на то, что если решение является постоянно растущим, то предположительно есть начальный момент времени, когда $a(t) = 0$. В общей теории относительности было показано (см. [7]), что эта сингулярность является общим свойством для расширяющихся космологических решений.

Согласно общепринятой точке зрения, причина начала расширения Вселенной кроется в эффектах квантовой гравитации. То есть решение этого вопроса неотделимо от вопроса об ультрафиолетовом дополнении общей теории относительности. Однако существуют и альтернативные сценарии, не требующие такого построения.

Цель альтернативных сценариев — решить проблемы, которые были в первоначальной теории Большого взрыва, и при этом избежать проблем, с которыми столкнулась теория инфляции. Так, одним из альтернативных сценариев стала модель, имеющая сжатие предшествующее Большому взрыву — модель экпирозиса [8, 9], при дальнейшем развитии — модель циклической вселенной [10]. Эти сценарии не решали всего спектра имеющихся проблем, поэтому позднее, на их базе был предложен сценарий без начальной сингулярности — новый экпирозис или классический космологический отскок [11–13]. Вселенная с отскоком предполагает, что эволюция вселенной начиналась со сжатия ($H < 0$), затем в какой-то момент произошел отскок, он заключается в резкой смене знака параметра Хаббла, а далее происходило дальнейшее расширение ($H > 0$). Другой вариант — сценарий Генезиса [14]. Это решение описывает вселенную, которая в прошлом была асимптотическим пространством Минковского, затем расширялась с увеличением плотности энергии, пока не вышла из режима действия эффективной теории поля и не нагрелась.

Оба эти сценария требуют нарушения изотропного условия энергодоминантности (англ. Null Energy Condition, далее NEC). Это условие гласит, что тензор

энергии-импульса материи $T_{\mu\nu}$ подчиняется неравенству

$$T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu > 0 \quad (2)$$

для любого изотропного (светоподобного) вектора n^μ , т.е. для любого вектора удовлетворяющего условию $g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = 0$. Это условие примечательно тем, что его очень сложно нарушить и не ввести в теорию какую-либо нестабильность: градиентную, тахионную или духовую [15]. Кроме того, оно является одним из условий для теоремы Пенроуза [16], которая утверждает, что если в пространстве для всех изотропных векторов выполняется (2), существует некомпактная поверхность Коши, а также существует замкнутая ловушечная поверхность, то пространство не может быть геодезически полным, т.е. в нем есть сингулярная точка. Ловушечная поверхность – это замкнутая поверхность, на которой выходящие наружу световые лучи на самом деле сходятся, формальное определение дает неравенство:

$$\nabla_\mu l^\mu < 0 \quad (3)$$

для вектора $l^\mu = dx^\mu/d\lambda$, касательного к внешней радиальной изотропной геодезической, λ – аффинный параметр.

В условиях сферической симметрии это означает следующее:

Пусть R — это координата, которая соответствует площади сферы, $S(R) = 4\pi R^2$. Если значение R уменьшается вдоль любого изотропного вектора, направленного в будущее, то такая сфера является ловушечной поверхностью. Это значит, что все световые лучи, исходящие из этой сферы, будут двигаться к её центру.

Примерами таких сфер могут служить: сфера внутри горизонта событий чёрной дыры Шварцшильда; сфера, размер которой больше $|H|^{-1}$, в сжимающейся однородной, изотропной и пространственно плоской Вселенной, где H — параметр Хаббла.

Если материя удовлетворяет условию NEC, то под горизонтом событий чёрной дыры всегда образуется сингулярность. Эволюция сжимающейся Вселенной также заканчивается сингулярностью, если можно пренебречь её пространственной кривизной. Используя обращение времени, можно сказать, что расширяющаяся вселенная имеет сингулярность в прошлом.

Нарушая условия теоремы Пенроуза, можно попытаться построить несингулярные космологические решения, которые будут обладать необходимыми нам свойствами. Один из способов – рассмотрение экзотической материи, которая нарушает NEC (2). Долгое время считалось, что нарушить NEC без возникновения серьезных патологий в теории нельзя [17]. Например, теории скалярного поля, которые минимально связаны с гравитацией и имеют лагранжиан первого порядка по производным, либо удовлетворяют условию NEC, либо сталкиваются с различными типами неустойчивостей [18, 19].

В рамках исследования теорий скалярного поля, в которых безопасно (с точки зрения возникновения неустойчивостей) нарушается NEC, можно рассмотреть класс теорий с более сложными лагранжианами. Однако обычно считается, что теории с лагранжианом, содержащим производные выше первой, не имеют физического применения, так как соответствующие уравнения движения содержат производные выше второй, что приводит к появлению духов Остроградского [20–22].

Тем не менее, существует класс теорий со скалярным полем, для которых характерно, что их лагранжианы включают вторые производные, но уравнения движения при этом остаются второго порядка по производным. Эти теории впервые были описаны в работе [23] и называются теориями Хорндески. Этот класс теорий является наиболее общим среди скалярно-тензорных теорий гравитации с уравнениями движения второго порядка.

Действие теории Хорндески имеет вид:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5), \quad (4a)$$

$$\mathcal{L}_2 = F(\pi, X), \quad (4b)$$

$$\mathcal{L}_3 = K(\pi, X) \square \pi, \quad (4c)$$

$$\mathcal{L}_4 = -G_4(\pi, X)R + 2G_{4X}(\pi, X) \left[(\square \pi)^2 - \pi_{;\mu\nu} \pi^{;\mu\nu} \right], \quad (4d)$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\pi, X) G^{\mu\nu} \pi_{;\mu\nu} + \frac{1}{3} G_{5X} \left[(\square \pi)^3 - 3 \square \pi \pi_{;\mu\nu} \pi^{;\mu\nu} + 2 \pi_{;\mu\nu} \pi^{;\mu\rho} \pi_{;\rho}^{\nu} \right]. \quad (4e)$$

В (4) приняты обозначения: π – скалярное поле, $X = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \pi \nabla_\nu \pi$ – кинетический член, R – скаляр Риччи, $G_{\mu\nu}$ – тензор Эйнштейна, $\pi_{;\mu} = \partial_\mu \pi$, $\pi_{;\mu\nu} = \nabla_\nu \nabla_\mu \pi$, $\square \pi = g^{\mu\nu} \nabla_\nu \nabla_\mu \pi$, $F(\pi, X)$, $K(\pi, X)$, $G_4(\pi, X)$, $G_5(\pi, X)$ – произвольные независи-

мые функции переменных π и X , $G_{iX} = \partial G_i / \partial X$. За счет особой антисимметричной структуры слагаемых со старшими производными уравнения движения, полученные из (4), имеют второй порядок и по производным скалярного поля π , и по производным от метрики $g_{\mu\nu}$.

Изначальная работа [23] не получила большой огласки, но позднее теории была переоткрыта под названием обобщенных галилеонов [24], которая стала обобщением теории скалярного поля с галилеевой симметрией [25] $\partial_\mu \pi \rightarrow \partial_\mu \pi + b_\mu$ на общековариантный случай.

В силу большой свободы теории в виде произвольных скалярных потенциалов, теория Хорндески содержит внутри себя огромное количество изучавшихся ранее моделей. В первую очередь, выбирая $G_5(\pi, X) = 0$, $G_4(\pi, X) = 1/(2\kappa)$, где $\kappa = 8\pi G$, восстанавливается действие Эйнштейна-Гильберта (слагаемые $\mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_3$ не модифицируют гравитацию). Далее, в случае нетривиального выбора функции $G_4(\pi, X)$ теория обретает неминимальную связь с гравитацией, так $f(R)$ -гравитация тоже является подклассом теории Хорндески [26, 27] (эти теории сводятся к подклассу теории Хорндески с помощью введения дополнительного поля вида $\phi = \frac{df}{dR}$). Далее, слагаемое $\mathcal{L}_2$ включает в себя такие модели как k -инфляцию [18], k -эссенцию [28, 29], Хиггс-инфляцию [30–32]. Добавляя слагаемое с функцией K можно обобщить модели кинетического “смешивания” с гравитацией [33] и теории G -инфляции [34, 35]. Теория Гаусса-Бонне также включается в теорию Хорндески, хоть и более сложным образом [36, 37] (для дальнейших деталей см. обзор [38]). Таким образом, теория Хорндески является обобщением большого класса скалярно-тензорных теорий.

В рамках данной работы теория Хорндески будет интересовать нас с целью изучения возможности построения стабильных космологических решений без начальной сингулярности. В этом контексте одним из наиболее важных свойств теории Хорндески является тот факт, что нарушение NEC не влияет на наличие или отсутствие патологий в космологических решениях, построенных в данном классе теорий [14]. Как упоминалось выше, такими моделями в частности являются модель Генезиса [14, 39–46] и вселенной с отскоком [47–55]. В предложенных космологических решениях действительно не было аномальных степеней свободы (так называемых духов и градиентных неустойчивостей) в момент отскока или генезиса.

Однако открытым оставался вопрос, можно ли создать в теории Хорндески устойчивые космологические решения на протяжении всей эволюции. При изучении эволюции решений с отскоком или генезиса в течение достаточно длительного времени неизбежно возникали градиентные неустойчивости.

В работе [56] было доказано, что в кубическом подклассе теории обобщённых галилеонов

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}R + F(\pi, X) + K(\pi, X)$$

неизбежно возникают градиентные неустойчивости на линеаризованном уровне. Это было сформулировано в виде запрещающей теоремы (no-go theorem). Аналогичная теорема была доказана и для случая, когда помимо поля галилеона присутствует дополнительное скалярное поле, для которого выполняется NEC [57]. Позднее запрещающая теорема была обобщена на наиболее общий случай теории Хорндески [58] и для системы с несколькими полями галилеонного типа [59].

Однако помимо построения моделей ранней Вселенной не менее интересной задачей является исследование Вселенной современной. На данный момент все большее развитие получают методы многоканальной астрономии, которые расширяют наши возможности по исследованию космоса и проверке различных гравитационных теорий. В частности, существенные экспериментальные ограничения на разницу между скоростью гравитационных и электромагнитных волн, выведенные из события GW170817 [60], ввели строгие ограничения на применение теории Хорндески / обобщённых галилеонов – для космологии позднего времени [60–66]. В некоторых случаях можно воспользоваться общностью теории Хорндески и специальным подбором скалярных потенциалов теории добиться равенства единице скорости распространения гравитона, однако это является сильным ограничением общности и в некоторой степени подстройкой параметров.

Однако возможен и иной подход: можно попробовать объединить теории электромагнитного и гравитационного взаимодействий таким образом, чтобы скорости распространения волн совпадали автоматически. Это идея не нова и берет свое начало в теории Калуцы-Клейна – попытке обеспечить единое описание природных явлений путем трактовки фундаментальных взаимодействий как общей теории относительности в более высоких измерениях. У пионеров этой теории – Теодора Калуцы [67] (перевод на английский [68]) и Оскара Кляйна [69,

70] – была идея объединить гравитацию и электромагнетизм, рассматривая эти две силы не что иное, как атрибуты пятимерного пространства-времени. С момента своего зарождения эта идея претерпела значительные изменения с целью охвата слабого и сильного ядерного взаимодействия[71–73]. Идея заключается в рассмотрении теории относительности в $(4 + d)$ -измерениях с выбором конкретного анзаца для метрики с наложением дополнительных условий независимости полей от координат дополнительных измерений. При этом предполагается, что теория описывает многообразие $M^4 \times S$, где S является компактным d -мерным многообразием с некоторой группой симметрий, которая после редукции становится внутренней симметрией калибровочных полей четырехмерной теории. Уравнения геодезических, возникающие из анзаца метрики, включают закон силы Лоренца или его обобщение на неабелевы калибровочные теории[71]. Сохраняющиеся заряды соответствуют импульсам в дополнительных измерениях, в то время как многомерные уравнения Эйнштейна сводятся к уравнениям Эйнштейна в четырех измерениях и уравнениям движения для калибровочных полей, хотя и с ограничением на тензор напряженности поля, которое требует введения скалярного поля дилатона для его ослабления.

В рамках теории Калуцы-Клейна можно построить обобщение теории Эйнштейна-Максвелла, объединяющее общую теорию относительности и электромагнетизм. В этом случае калибровочное векторное поле и четырехмерная метрика являются частями одной пятимерной метрики, что создает некоторую общность в их описании. Этот подход можно использовать для построения новой теории путем проведения редукции теории обобщенных галилеонов из пятимерного пространства-времени в четырехмерное. Теория, получаемая таким образом, будет включать в себя поля метрики, $U(1)$ -калибровочное векторное поле, а также два скалярных поля – галилеон и дилатон. Поскольку исходная теория не содержала производных старшего порядка в уравнениях движения, то и новая теория их избежит.

Такое исследование дополнительно решает и другую не менее интересную задачу. Дело в том, что задача систематического построения калибровочно-инвариантных векторных галилеонов и лагранжианов Эйнштейна-Максвелла является сложной сама по себе [74–78], и, как следствие, возникает оправданный интерес к использованию размерной редукции также в качестве инструмента для

расширения теоретического пространства векторно-скалярных взаимодействий при сохранении калибровочной инвариантности и избежании духа Остроградского. Кроме того, векторные поля долгое время изучались для различных космологических приложений [79—81].

Цели и задачи диссертации

Целью данного диссертационного исследования является изучение классических космологических решений без начальной сингулярности в скалярно-тензорных теориях гравитации со старшими производными (в подклассе теории Хорндески), и анализ устойчивости данного типа решений.

Задачи данной работы формулируются в рамках теории Хорндески в ковариантном виде. Так, одной из задач является рассмотрение способа обхода запрещающей теоремы в теории Хорндески, которая была сформулирована в унитарной калибровке. Ранее в литературе рассматривались варианты обхода путем рассмотрения расширенной теории Хорндески, а также предела сильной связи в общей теории Хорндески, но оставалась еще одна возможность для обхода запрещающей теоремы - рассмотреть случай, в котором теорема не может быть сформулирована так как действие оказывается сингулярным. В качестве иллюстрации необходимо построить несингулярные устойчивые на всей временной оси решения, например вселенной с отскоком или генезиса. Такие несингулярные решения представляют особый интерес с точки зрения построения полных моделей ранней Вселенной.

Следующей задачей является рассмотрение возмущений в теории Хорндески над анизотропным фоном. Рассмотрение анизотропного космологического фона является важной задачей, поскольку высокая степень анизотропии в современных исследованиях предполагается не только на ранних стадиях развития Вселенной, но и наблюдается в малой степени до сих пор [6]. С этой целью необходимо найти действие скалярных и тензорных возмущений. Полученные при решении предыдущей задачи решения для изотропного фона специфичны тем, что в них происходит вымирание динамической степени свободы. Поэтому, полученное действие можно использовать для анализа стабильности этих решений, относительно малой анизотропии фона.

Помимо этого рассматривается задача построения скалярно-векторно-тензорной теории со старшими производными путем проведения процедуры ре-

дукции Калуцы-Клейна над теорией обобщенных галилеонов из пятимерного пространства времени в четырехмерное. Эта процедура производится для построения теории объединяющей $U(1)$ -калибровочное поле (которое идентифицируется с фотоном) и теорию гравитации. Поскольку процедура редукции предполагает, что получаемое из нее векторное калибровочное поле и метрика изначально являются компонентами метрики пространства большей размерности, то предполагается некоторое единство описания электромагнитных и гравитационных волн, которое приведет к расширению экспериментально допустимого класса теорий Хорндески.

Научная новизна диссертации

Все основные результаты, выдвигаемые на защиту, являются новыми. Так, рассмотренный вариант обхода запрещающей теоремы в теории Хорндески ранее не рассматривался в литературе. Однако возможность построения несингулярных космологических решений типа вселенной с отскоком и генезиса обсуждались ранее в ряде работ (см., например, [82]). Однако проделанная работа позволила глубже понять структуру используемых скалярно-тензорных теорий. Отдельное исследование анизотропного фона позволило определить недостатки использованного нами подхода и также открывает дальнейшие перспективы для изучения полностью стабильных решений. Применения редукции Калуцы-Клейна к теории Хорндески так же ранее в литературе не рассматривалось. Наш подход позволяет расширить класс допустимых скалярно-тензорных теорий с точки зрения ограничений на скорость гравитационных волн.

Теоретическая и практическая значимость диссертации

Предложенные устойчивые космологические решения без начальной сингулярности позволяют в будущем построить реалистичные модели ранней Вселенной с использованием сценариев с отскоком или генезисом. Так, например, в этих моделях в будущих работах может быть вычислен спектр возмущений, исследованы негауссовости, а знание этих величин позволит наложить дополнительные ограничения на параметры модели из наблюдательных данных. Благодаря тому, что построенные модели представляют собой скалярное поле и стандартную общую теорию относительности, указанные сценарии допускают естественный выход на горячую стадию после эпохи генезиса или после отскока, что делает данные решения интересными с точки зрения построения полной модели Все-

ленной. Построение скалярно-векторно-тензорных теорий несет в себе широкий потенциал применительно к построению различных моделей, описывающих как ранние, так и поздние стадии развития вселенной. Полученный нами результат как минимум расширяет класс теорий допустимых с точки зрения ограничений на скорость гравитационных волн, получаемые из последних наблюдений.

Методология диссертационного исследования

Диссертационная работа опирается на строгий математический аппарат современной теоретической физики. В частности, использовались методы дифференциальной геометрии и уравнений в частных производных, классический формализм теории возмущений, а также апробированные и надежные методики вычисления действия линеаризованной теории. В ходе всей работы для определенных вычислений применялось такое программное обеспечение как системы компьютерной алгебры *Cadabra2* и *Wolfram Mathematica*.

Положения, выносимые на защиту

1. Построено квадратичное действие в калибровочно инвариантном виде для возмущений в теории Хорндески над однородным и изотропным космологическим фоном. Показано нарушение запрещающей теоремы в исключительных условиях, в которых неприменима унитарная калибровка.
2. Построены конкретные примеры лагранжианов теории Хорндески, допускающие решения типа космологического отскока или генезиса.
3. Исходя из построенного квадратичного действия для возмущений в теории Хорндески над однородным анизотропным космологическим фоном, показано, что добавление малой анизотропии к построенным ранее решениям приводит к возникновению духовых и градиентных неустойчивостей.
4. Получена новая скалярно-векторно-тензорная теория со старшими производными в действии, но без неустойчивости Остроградского. Векторы в полученной теории обладают калибровочной $U(1)$ симметрией, а скалярно-тензорная часть соответствует теории Хорндески.
5. Проанализированы скорости распространения скалярных, векторных и тензорных мод возмущений полученной теории и выделен класс теорий потенциально проходящий экспериментальные тесты.

Достоверность и обоснованность результатов

Результаты диссертации были опубликованы в рецензируемых международных научных журналах, а также обсуждались в рамках семинаров и докладов на международных конференциях. Достоверность результатов диссертации обеспечивается применением в ней проверенных в научных кругах методов теоретической физики и соответствием результатам, полученным в работах других авторов.

Апробация результатов

Основные результаты, изложенные в диссертации, были представлены на следующих конференциях и школах:

1. Международная научная школа "International School of Subnuclear Physics 2022 Эриче, Италия, 14-24 июня 2022 года.
2. Международная конференция VII International Conference "Models in Quantum Field Theory", г. Санкт-Петербург, Россия, 10-14 октября 2022 года.
3. Научная школа "LV Зимняя школа ПИЯФ г. Луга, Россия, 13 – 18 марта 2023 года.
4. Международная конференция International Conference on Particle Physics and Cosmology, г.Ереван, Армения, 2-7 октября 2023 года.
5. Международный семинар XXII International Seminar on High-Energy Physics Quarks'24, Переславль, Россия, 20-24 мая 2024 года.
6. Международный семинар COSMO'24, г.Киото, Япония, 21-25 октября 2024 года.
7. Международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике (RUSGRAV-18), г.Казань, Россия, 25-29 ноября 2024 года.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 4 статьях в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах Web of Science, Scopus и RSCI:

1. S. Mironov, A. Shtennikova. Stable cosmological solutions in Horndeski theory // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2023. — Vol. 2023, no.06. — P. 037.
2. S. Mironov, A. Shtennikova. Perturbations in Horndeski theory above anisotropic cosmological background. // JETP Letters. — 2024. — Vol. 119, no.5. — P. 339–344.
3. S. Mironov, A. Shtennikova, M. Valencia-Villegas, Reviving Horndeski after GW170817 by Kaluza-Klein compactifications // Physics Letters B — 2024. — Vol. 858 — P. 139058.
4. S. Mironov, A. Shtennikova and M. Valencia-Villegas, Higher derivative scalar-vector-tensor theories from Kaluza-Klein reductions of Horndeski theory // Physical Review D — 2025 — Vol. 111 no.2 — P. 024028

А так же в материалах конференции:

A. Shtennikova. Stable solutions in Horndeski theory. // Proceedings of International Conference on Particle Physics and Cosmology — PoS(ICPPCRubakov2023) — 2024 — Vol. 455. — P. 032.

Личный вклад автора

Все результаты, выносимые на защиту, получены лично автором или при его непосредственном участии.

Структура, объем и краткое содержание работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, пяти приложений и списка литературы. Общий объем работы 106 страниц. Диссертация содержит 14 рисунков. Список литературы включает 123 наименования.

В главе 1 рассматривается линеаризованную теорию возмущений над однородным фоном для общей теории Хорндески с целью анализа устойчивости космологических решений в виде отскока и генезиса. В параграфе 1.1 приведено квадратичное действие для возмущений в унитарной калибровке, и получен явный вид условий отсутствия духов и градиентных неустойчивостей, а также сверхсветовых мод. С использованием полученных условий устойчивости в параграфе 1.2 рассмотрена запрещающая теорема и обозначены варианты ее обхода. Для того чтобы осуществить ее обход в параграфе 1.3 показан переход

в квадратичном действии скалярного сектора к калибровочно-инвариантным переменным, далее в параграфе 1.4 разрешены связи в общем случае и показано, что результат имеет аналогичную форму, что и в унитарной калибровке. После этого в параграфе 1.5 рассматриваются все варианты динамики скалярного сектора в зависимости от параметров теории, краткие итоги подведены в параграфе 1.6. В качестве иллюстрации на основе фоновых уравнений движения и дополнительного условия в параграфе 1.7 построены два различных решения с нетривиальными асимптотиками: в виде космологического отскока и решения, подобного генезису. Предложенные решения устойчивы на протяжении всего времени эволюции и являются решениями общей теории относительности с неканоническим скалярным полем.

Далее в главе 2 рассматривается теория возмущений над анизотропным фоном типа Бьянки I, с целью построения квадратичного действия и дальнейшего анализа теории на стабильность. В разделе 2.1 приведено квадратичное действие для тензорных и скалярных мод возмущений над анизотропным фоном, затем в разделе 2.2 скалярный сектор переписывается в терминах калибровочно-инвариантных переменных, и в разделе 2.3 рассмотрен изотропный предел теории. После этого в разделе 2.4 в унитарной калибровке исследуется устойчивость полученного в 1 главе решения вселенной с отскоком относительно малой анизотропии фона.

После этого в главе 3 проводится анализ скалярно-векторно-тензорной теории полученной в результате редукции Калуцы-Клейна теории обобщенных галилеонов из пятимерного пространства времени в четырехмерное. В разделе 3.1 введены основные обозначения и проведена компактификация на окружность, выписаны лагранжианы итоговой теории и показан способ переопределения скалярных потенциалов, для перехода к четырехмерной теории Хорндески в ее стандартной форме. Далее в разделе 3.2 рассмотрены возмущения над космологическим фоном и получено квадратичное действие для тензорного сектора, в разделе 3.3 приведено квадратичное действие векторного сектора и показано равенство скоростей распространения гравитационных и электромагнитных волн. Далее в разделе 3.4 приведены рассуждения о механизме Вайнштейна для экранирования взаимодействий фотона со скалярными полями, которые нарушают теорию Максвелла. После этого в разделе 3.5 получено действие второго порядка

для скалярного сектора возмущений и найдены скорости распространения двух динамических мод. После чего в рамках анализа стабильности в разделе 3.6 показана эквивалентность скалярно-тензорной части действия действию теории мульти-галилеонов. И в заключении в разделе 3.7 проведена проверка результата путем рассмотрения нефизичного случая, когда поле дилатона совпадает с масштабным фактором.

Заключение содержит краткую формулировку результатов исследований, представленных в диссертации.

Приложение А содержит явные формулы для коэффициентов в квадратичных действиях для возмущений над изотропным фоном в общей теории Хорндески.

В Приложении В содержатся явные формулы для коэффициентов квадратичного действия для возмущений над анизотропным фоном.

В Приложении С содержатся явные выражения для всех необходимых свертки после компактификации пятимерной теории.

В Приложении D содержатся фоновые уравнения движения скалярно-векторно-тензорной теории.

В Приложении Е содержатся явные формулы для коэффициентов квадратичного действия для возмущений теории обобщенных галилеонов после редукции.

1 Устойчивость решений над изотропным фоном

1.1 Возмущения в теории Хорндески

Рассмотрим действие общей теории Хорндески:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5), \quad (5a)$$

$$\mathcal{L}_2 = F(\pi, X), \quad (5b)$$

$$\mathcal{L}_3 = K(\pi, X) \square \pi, \quad (5c)$$

$$\mathcal{L}_4 = -G_4(\pi, X)R + 2G_{4X}(\pi, X) \left[(\square \pi)^2 - \pi_{;\mu\nu} \pi^{;\mu\nu} \right], \quad (5d)$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\pi, X) G^{\mu\nu} \pi_{;\mu\nu} + \frac{1}{3} G_{5X} \left[(\square \pi)^3 - 3 \square \pi \pi_{;\mu\nu} \pi^{;\mu\nu} + 2 \pi_{;\mu\nu} \pi^{;\mu\rho} \pi_{;\rho}^{\nu} \right]. \quad (5e)$$

где введены обозначения: π - скалярное поле, $X = g^{\mu\nu} \pi_{,\mu} \pi_{,\nu}$, $\pi_{,\mu} = \partial_\mu \pi$, $\pi_{;\mu\nu} = \nabla_\nu \nabla_\mu \pi$, $\square \pi = g^{\mu\nu} \nabla_\nu \nabla_\mu \pi$, $G_{4X} = \partial G_4 / \partial X$, и так далее.

В этом разделе рассмотрим пространственно плоскую вселенную Фридмана — Леметра — Робертсона — Уокера (FLRW):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (6)$$

Над этим фоном уравнения движения, получаемые из действия (5) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta g^{00} : \quad G_{00} = & F - 2F_X X - 6HK_X X \dot{\pi} + K_\pi X + 6H^2 G_4 + 6HG_{4\pi} \dot{\pi} \\ & - 24H^2 X (G_{4X} + G_{4XX} X) + 12HG_{4\pi X} X \dot{\pi} \\ & - 2H^3 X \dot{\pi} (5G_{5X} + 2G_{5XX} X) + 3H^2 X (3G_{5\pi} + 2G_{5\pi X} X) = 0, \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \delta g^{ij} : \quad G_{ii} = & F - X(2K_X \ddot{\pi} + K_\pi) + 2(3H^2 + 2\dot{H})G_4 - 12H^2 G_{4X} X \\ & - 8\dot{H} G_{4X} X - 8HG_{4X} \ddot{\pi} \dot{\pi} - 16HG_{4XX} X \ddot{\pi} \dot{\pi} + 2(\ddot{\pi} + 2H\dot{\pi})G_{4\pi} \\ & + 4XG_{4\pi X}(\ddot{\pi} - 2H\dot{\pi}) + 2XG_{4\pi\pi} - 2XG_{5X}(2H^3 \dot{\pi} + 2H\dot{H}\dot{\pi} + 3H^2 \ddot{\pi}) \\ & - 4H^2 G_{5XX} X^2 \ddot{\pi} + G_{5\pi}(3H^2 X + 2\dot{H}X + 4H\ddot{\pi} \dot{\pi}) \\ & + 2HG_{5\pi X} X(2\ddot{\pi} \dot{\pi} - HX) + 2HG_{5\pi\pi} X \dot{\pi} = 0, \end{aligned} \quad (7b)$$

в этом случае точка означает производную по времени t , тогда $X = \dot{\pi}^2$, а $H = \dot{a}/a$ - параметр Хаббла. Уравнение движения, которое получается при

варьировании действия по полю π , является линейной комбинацией уравнений Фридмана и их производных:

$$\delta\pi : \quad \frac{4}{\dot{\pi}} \frac{d}{dt} [G_{00}] - 3 \frac{H}{\dot{\pi}} G_{ii} = 0. \quad (8)$$

Дальнейшим нашим интересом является рассмотрение квадратичного действия для малых возмущений метрики и скалярного поля. В этом случае удобно работать в терминах ADM разложения метрики. Возмущения метрики $h_{\mu\nu}$ могут быть разложены по спиральностям следующим образом:

$$h_{00} = 2\Phi \quad (9a)$$

$$h_{0i} = -\partial_i \beta + Z_i^T, \quad (9b)$$

$$h_{ij} = -a^2 \left(2\Psi \delta_{ij} - 2\partial_i \partial_j E + (\partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T) + h_{ij}^T \right), \quad (9c)$$

здесь соответственно Φ, β, Ψ, E - скалярные поля, Z_i^T, W_i^T - поперечные векторные поля (поперечность означает, что $\partial_i Z_i^T = \partial_i W_i^T = 0$), h_{ij}^T - поперечный бесследовый тензор (то есть $\partial_i h_{ij}^T = 0, h_i^{Ti} = 0$).

Возмущение скалярного поля π даст вклад в скалярный сектор:

$$\pi \rightarrow \pi + \chi. \quad (10)$$

В этом разделе не анализируется поведение векторных мод, поскольку они не являются динамическими.

Действие для тензорного сектора возмущений имеет вид:

$$S_h^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \left[\frac{A_5}{2} (\dot{h}_{ij}^T)^2 - \frac{A_2}{a^2} (\vec{\nabla} h_{ij}^T)^2 \right]. \quad (11)$$

Здесь и далее коэффициенты A_i являются комбинациями функций лагранжиана и их производных по π и X . Явные выражения для этих коэффициентов можно найти в приложении А.

В дальнейшем основное внимание будет уделяться скалярному сектору возмущений. Полное квадратичное действие для него выражается следующим

образом:

$$\begin{aligned}
S^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \bigg(& A_1 (\dot{\Psi})^2 + A_2 \frac{(\vec{\nabla}\Psi)^2}{a^2} + A_3 \Phi^2 + A_4 \Phi \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} + A_5 \dot{\Psi} \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} \\
& + A_6 \Phi \dot{\Psi} + A_7 \Phi \frac{\vec{\nabla}^2 \Psi}{a^2} + A_8 \Phi \frac{\vec{\nabla}^2 \chi}{a^2} + A_9 \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} \dot{\chi} + A_{10} \chi \ddot{\Psi} + A_{11} \Phi \dot{\chi} \\
& + A_{12} \chi \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} + A_{13} \chi \frac{\vec{\nabla}^2 \Psi}{a^2} + A_{14} (\dot{\chi})^2 + A_{15} \frac{(\vec{\nabla}\chi)^2}{a^2} + A_{17} \Phi \chi + A_{18} \chi \dot{\Psi} \\
& + A_{19} \Psi \chi + A_{20} \chi^2 + A_{21} \chi \vec{\nabla}^2 E + A_{22} \ddot{\chi} \vec{\nabla}^2 E + A_{23} \dot{\chi} \vec{\nabla}^2 E \\
& + A_{24} \dot{\Phi} \vec{\nabla}^2 E + A_{25} \Phi \vec{\nabla}^2 E + A_{26} \ddot{\Psi} \vec{\nabla}^2 E + A_{27} \dot{\Psi} \vec{\nabla}^2 E \bigg). \quad (12)
\end{aligned}$$

Отметим, что коэффициент A_{19} обнуляется на фоновых уравнениях движения ((7a), (7b)).

В общем случае линеаризованная теория инвариантна относительно малых координатных преобразований:

$$x^\mu \rightarrow x^\mu - \xi^\mu,$$

где $\xi^\mu = (\xi_0, \xi_T^i + \delta^{ij} \partial_j \xi_S)^T$, здесь малый вектор сдвига ξ^μ раскладывается на продольную $\partial_j \xi_S$ и поперечную части ξ_T^i . В этом случае скалярные поля преобразуются следующим образом:

$$\Phi \rightarrow \Phi + \dot{\xi}_0, \quad \beta \rightarrow \beta - \xi_0 + a^2 \dot{\xi}_S, \quad \chi \rightarrow \chi + \xi_0 \dot{\pi}, \quad \Psi \rightarrow \Psi + \xi_0 H, \quad E \rightarrow E - \xi_S. \quad (13)$$

Стандартным путем работы с действием (12) является фиксация $E = \chi = 0$ (унитарная калибровка), которая возможна благодаря имеющейся калибровочной свободе. В этом случае поля Φ и β являются связями, и при варьировании по ним получаем соотношения:

$$\Phi = -\frac{1}{A_4} \left(A_5 \dot{\Psi} + A_9 \dot{\chi} + A_{12} \chi \right), \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} = & -\frac{1}{A_4} \left(A_7 \frac{\vec{\nabla}^2 \Psi}{a^2} + A_8 \frac{\vec{\nabla}^2 \chi}{a^2} + A_6 \dot{\Psi} + A_{11} \dot{\chi} + A_{17} \chi \right) \\
& + \frac{2A_3}{A_4^2} \left(A_5 \dot{\Psi} + A_9 \dot{\chi} + A_{12} \chi \right). \quad (15)
\end{aligned}$$

После подстановке этих связей обратно в действие (12) получаем:

$$S_S^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \left(\mathcal{G}_S (\dot{\Psi})^2 - \mathcal{F}_S \frac{(\vec{\nabla} \Psi)^2}{a^2} \right), \quad (16)$$

где

$$\mathcal{G}_S = \frac{4}{9} \frac{A_3 A_1^2}{A_4^2} - A_1, \quad (17a)$$

$$\mathcal{F}_S = -\frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left[\frac{a A_1 A_7}{3 A_4} \right] - A_2 = \frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left[\frac{a A_5 \cdot A_7}{2 A_4} \right] - A_2. \quad (17b)$$

Ожидаемо, остается одна динамическая степень свободы, уравнение движения которой имеет вид волнового со скоростью распространения

$$c_S^2 = \frac{\mathcal{F}_S}{\mathcal{G}_S} = 3 \frac{A_1 A_7 \dot{A}_4 - 3 A_2 A_4^2 - (A_1 A_7 H + A_1 \dot{A}_7 + A_7 \dot{A}_1) A_4}{(4 A_1 A_3 - 9 A_4^2) A_1}. \quad (18)$$

Далее такую скорость будем называть скоростью звука.

Отсутствие духовых и градиентных неустойчивостей на фоне однородного решения в теории не гарантировано, поэтому требуется дополнительно наложить ограничения на коэффициенты в действии (11) и (16):

$$A_5 \geq 2 A_2 > 0, \quad \mathcal{G}_S \geq \mathcal{F}_S > 0. \quad (19)$$

Наложение условий (19) гарантирует так же ограничение скорости распространения скалярных и тензорных волн со скоростями не превышающими скорости света.

Ранее было показано, что выполнение условий (19) на всей временной оси невозможно в рамках общей теории Хорндески. Была сформулирована теорема, которая запрещает существование несингулярных космологических решений, которые были бы устойчивы в любой момент времени [58]. Ниже приведем доказательство этой теоремы, чтобы явно показать возникающую трудность и обозначить пути решения.

1.2 Запрещающая теорема в теории Хорндески

Рассмотрим общее действие для скалярных и тензорных мод возмущений:

$$S_h^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \left[\frac{A_5}{2} (\dot{h}_{ij})^2 - \frac{A_2}{a^2} (\vec{\nabla} h_{ij})^2 + \mathcal{G}_S (\dot{\Psi})^2 - \mathcal{F}_S \frac{(\vec{\nabla} \Psi)^2}{a^2} \right]. \quad (20)$$

Из условия отсутствия градиентных нестабильностей в теории следует:

$$\mathcal{F}_S = \frac{1}{a} \frac{d\xi}{dt} - A_2 > 0, \quad (21)$$

где

$$\xi = \frac{a A_5^2}{2 A_4}. \quad (22)$$

В случае несингулярного расширяющегося при $t \rightarrow +\infty$ космологического решения ($a > \text{const} > 0$) можно сделать вывод, что функция $\xi(t)$ должна быть монотонно растущей функцией:

$$\frac{d\xi}{dt} > a A_2 > 0. \quad (23)$$

Проинтегрируем условие (23) на некотором промежутке от t_i до t_f :

$$\xi_f - \xi_i > \int_{t_i}^{t_f} a A_2 dt. \quad (24)$$

Интеграл в правой части (24) может как сходиться, так и расходиться в зависимости от поведения A_2 (интеграл будет сходящимся в случае, если $A_2 \rightarrow 0$ при $t_{i,f} \rightarrow \pm\infty$, но этот вариант рассматриваться не будет, поскольку он может потенциально приводить к сильной связи в скалярном и тензорном секторах.) Рассмотрим случай, когда интеграл в (24) расходится.

Предположим, что $\xi_i < 0$. Тогда выражение (24) перепишется как:

$$-\xi_f < |\xi_i| - \int_{t_i}^{t_f} a A_2 dt. \quad (25)$$

Так как интеграл является возрастающей функцией t_f , правая часть становится отрицательной при достаточно больших t_f , а значит $\xi_f > 0$, что означает, что функция ξ пересекает 0. Однако из определения функции ξ , она не может пересекать нуль в случае несингулярного космологического сценария ($a \neq 0$), а

значит наше предположение $\xi_i < 0$ неверно и для любого t $\xi > 0$. Тогда из (24) следует

$$-\xi_i < -\xi_f + \int_{t_i}^{t_f} a A_2 dt, \quad (26)$$

тогда правая часть неравенства (26) становится положительной при $t_i \rightarrow -\infty$, и, следовательно, $\xi_i < 0$, что опять противоречит нашему предположению, что $\xi(t) > 0$.

Таким образом, функция $\xi(t)$ при рассмотрении на всей оси обязательно пересекает нуль в некоторый момент времени t_0 . Как уже говорилось выше, $A_2 > 0$ из требования отсутствия духов в тензорном секторе, а A_4 , являясь комбинацией функций лагранжиана, их производных и производных от поля π и a , не может стремиться к бесконечности, т.к. это приведет к сингулярному коэффициенту в действии (12). Из всего вышесказанного, можно сделать вывод, что построить несингулярное космологическое решение в общей теории Хорндески нельзя.

Наивно вывод запрещающей теоремы выглядит излишне строгим, хотя бы потому что в общей теории относительности, которая является частным случаем теории Хорндески ($G_4 = 1/(16\pi G)$, $G_5 = 0$, G — гравитационная постоянная), известно как минимум одно несингулярное космологическое решение — пространство Минковского, $a = \text{const}$. В связи с этим возникает потребность искать пути обхода запрещающей теоремы.

Первый подход заключается в рассмотрении более общей "расширенной" теории Хорндески (beyond Horndeski theory) [83—96]. В этом случае, к действию (5) добавляются еще один вклад:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{BH}} = F_4(\pi, X) \epsilon^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma} \epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma} \pi_{,\mu} \pi_{,\mu'} \pi_{;\nu\nu'} \pi_{;\rho\rho'} + F_5(\pi, X) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \pi_{,\mu} \pi_{,\mu'} \pi_{;\nu\nu'} \pi_{;\rho\rho'} \pi_{;\sigma\sigma'}, \quad (27)$$

который не поглощается предыдущими. При его включении в теорию духов Остроградского так же не возникает, несмотря на то, что уравнения движения становятся третьего порядка, а в действии для скалярного сектора возмущений присутствуют третьи производные (к действию (12) добавляется вклад $\dot{\chi} \frac{\vec{\nabla}^2 \Psi}{a^2}$).

В этом случае условия устойчивости решений модифицируются, функция ξ в (22) заменяется на

$$\xi \rightarrow \xi = \frac{aA_5(A_5 + \mathcal{D})}{2A_4}, \quad \mathcal{D} = \dot{\pi} (4F_4\dot{\pi}^3 + 12HF_5\dot{\pi}^4). \quad (28)$$

Коэффициент $(A_5 + \mathcal{D})$ является заменой собой A_5 в действии (11), и на него накладывается условие устойчивости

$$A_5 + \mathcal{D} > 0. \quad (29)$$

В результате A_5 больше не несет определенного физического смысла, и за счет нетривиального вклада $\mathcal{D}$ удастся добиться того, что $\xi(t)$ пересекает нуль в некоторый момент времени, и тем самым обойти запрещающую теорему.

Второй подход заключается в рассмотрении наивного предела сильной связи на $-\infty$, при этом подразумевается, что одновременно $A_2 \rightarrow 0$ и $A_5 \rightarrow 0$, так что $\xi \rightarrow 0$ [58]. В этом случае оказывается, что в решениях типа генезиса и отскока, сильной связи можно избежать [97–99].

Были рассмотрены варианты, когда A_4 пересекает нуль в конечном числе точек, так называемый γ -кроссинг [88]. В этом случае было показано, что решение в виде общей теории относительности не является патологичным в случае сильной модификации гравитации в прошлом, либо будущем. Однако даже при "здоровом" γ -кроссинге избежать запрещающей теоремы не удастся.

В данной работе предлагается новый подход, при котором $A_4 = 0$ на всей временной оси, в этом случае разрешить связи таким же образом, как это происходит в унитарной калибровке, не представляется возможным, так как они все становятся сингулярными (см. (14)). В связи с этим нужен отдельный подход при рассмотрении скалярного сектора возмущений.

1.3 Действие для скалярного сектора в терминах калибровочно - инвариантных переменных

В этом разделе будет показана возможность переписать действие (12) в терминах калибровочно-инвариантных переменных.

Как было обозначено выше, существует определенная комбинация функций лагранжиана такая, что $A_4 = 0$, и в этом случае действие (16) оказывается

сингулярным. Это свойство характерно для наложения унитарной калибровки $\chi = E = 0$. В связи с этим предлагается рассмотреть действие (12) без наложения какой либо калибровки, но ввести новые калибровочно-инвариантные переменные (Переменные Бардина):

$$\mathcal{X} = \chi + \dot{\pi} \left(\frac{\beta}{a^2} + \dot{E} \right), \quad (30a)$$

$$\mathcal{Y} = \Psi + H \left(\frac{\beta}{a^2} + \dot{E} \right), \quad (30b)$$

$$\mathcal{Z} = \Phi + \frac{d}{dt} \left[\frac{\beta}{a^2} + \dot{E} \right]. \quad (30c)$$

В терминах этих переменных действие (12) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} S^{(2)} = \int dt d^3x a^3 & \left(A_1 (\dot{\mathcal{Y}})^2 + A_2 \frac{(\vec{\nabla} \mathcal{Y})^2}{a^2} + A_3 \mathcal{Z}^2 + A_6 \mathcal{Z} \dot{\mathcal{Y}} + A_7 \mathcal{Z} \frac{\vec{\nabla}^2 \mathcal{Y}}{a^2} \right. \\ & + A_8 \mathcal{Z} \frac{\vec{\nabla}^2 \mathcal{X}}{a^2} + A_{10} \mathcal{X} \ddot{\mathcal{Y}} + A_{11} \mathcal{Z} \dot{\mathcal{X}} + A_{13} \mathcal{X} \frac{\vec{\nabla}^2 \mathcal{Y}}{a^2} + A_{14} (\dot{\mathcal{X}})^2 \\ & \left. + A_{15} \frac{(\vec{\nabla} \mathcal{X})^2}{a^2} + A_{16} \dot{\mathcal{X}} \frac{\vec{\nabla}^2 \mathcal{Y}}{a^2} + A_{17} \mathcal{Z} \mathcal{X} + A_{18} \mathcal{X} \dot{\mathcal{Y}} + A_{20} \mathcal{X}^2 \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Интересно отметить, что в терминах новых переменных $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ действие (31) не меняет своего вида при выборе Ньютоновой калибровки $\beta = E = 0$. Это примечательно поскольку ранее было показано [82], что точка $A_4 = 0$ не является патологичной в Ньютоновой калибровке. Представленный выше выбор переменных позволяет провести дальнейший анализ случая $A_6 = -3A_4 = 0$ (см. приложение А) проще, так как точка $A_4 = 0$ больше не является выделенной.

1.4 Интегрирование связей в общем случае

Для дальнейшей работы необходимо разрешить связи и свести действие (31) к одной динамической переменной. На данном этапе явно видно, что поле $\mathcal{Z}$ не динамическое, а соответствующая ему связь имеет следующий вид:

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{2A_3} \left(-A_7 \frac{\vec{\nabla}^2 \mathcal{Y}}{a^2} - A_8 \frac{\vec{\nabla}^2 \mathcal{X}}{a^2} + 3A_4 \dot{\mathcal{Y}} - A_{11} \dot{\mathcal{X}} - A_{17} \mathcal{X} \right). \quad (32)$$

Здесь было учтено соотношение $A_6 = -3A_4$. В данный момент можно заметить, что для связи (32) случай $A_3 = 0$ является выделенным, более подробное рассмотрение этого случая будет приведено далее.

Подставим связь по $\mathcal{Z}$ и введем новую переменную:

$$\zeta = \mathcal{Y} + \frac{D_1}{D_2} \mathcal{X}.$$

Это необходимо сделать для того, чтобы явно выделить нединамическую переменную из оставшихся двух. В результате получается действие двух переменных:

$$\begin{aligned} S^{(2)} = & -\frac{1}{4} \int dt d^3x a^3 \left(\frac{1}{A_3} \left(C \frac{(\vec{\nabla}^2 \mathcal{X})}{a^2} - A_7 \frac{(\vec{\nabla}^2 \zeta)}{a^2} \right)^2 - \frac{2 D_3}{3 A_3} \frac{(\vec{\nabla}^2 \mathcal{X})}{a^2} \dot{\zeta} \right. \\ & \left. - 4 \frac{(\vec{\nabla} \zeta)^2}{a^2} \left(A_2 + \frac{3}{4a} \frac{d}{dt} \left(\frac{a A_4 A_7}{A_3} \right) - \frac{D_2}{A_3} (\dot{\zeta})^2 \right) \right), \end{aligned} \quad (33)$$

в выражениях выше коэффициенты D_i следующие:

$$D_1 = 3A_{11}A_4 - 2A_{10}A_3, \quad (34a)$$

$$D_2 = 4A_1A_3 - 9A_4^2, \quad (34b)$$

$$D_3 = 2A_1A_{11} - 9A_4A_9, \quad (34c)$$

$$C = A_4 \frac{D_3}{D_2}. \quad (34d)$$

В процессе было учтено соотношение коэффициентов A_i :

$$A_{11}A_7 + 3A_4A_8 = \frac{2}{3}A_1A_{11} - 3A_4A_9. \quad (35)$$

Проварьировав действие (33) по $\mathcal{X}$ получаем уравнение связи:

$$\mathcal{X} = \frac{A_7}{C} \zeta - \frac{1}{3} \frac{a^2 D_3}{k^2 C^2} \dot{\zeta} \quad (36)$$

А подставив его обратно в (33), получаем:

$$S_S^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \left(\mathcal{G}_S (\dot{\zeta})^2 - \mathcal{F}_S \frac{(\vec{\nabla} \zeta)^2}{a^2} \right), \quad (37)$$

где

$$\mathcal{G}_S = \frac{4}{9} \frac{A_3 A_1^2}{A_4^2} - A_1, \quad (38a)$$

$$\mathcal{F}_S = -\frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left[\frac{a A_1 A_7}{3 A_4} \right] - A_2 = \frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left[\frac{a A_5 \cdot A_7}{2 A_4} \right] - A_2. \quad (38b)$$

Полученный результат совпадает с известным результатом из анализа в унитарной калибровке (16).

1.5 Интегрирование связей в случае $A_4 \equiv 0$

Перейдем теперь к рассмотрению, интересующего нас случая $A_4 = 0$. Это легко сделать, если вернуться к действию (31), в котором предполагается $A_4 \equiv 0$ (что также означает $\dot{A}_4 = 0$). Таким образом, подставив в него связь (32) и сделав замену для $\mathcal{Y}$ (79), получаем следующее действие:

$$S^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \left(A_1 (\dot{\zeta})^2 + A_2 \frac{(\vec{\nabla} \zeta)^2}{a^2} - \frac{1}{9} \frac{A_1^2}{A_3} \frac{(\vec{\nabla}^2 \zeta)^2}{a^4} + \frac{1}{3} \frac{A_1 A_{11}}{A_3} \frac{(\vec{\nabla}^2 \mathcal{X})}{a^2} \dot{\zeta} \right), \quad (39)$$

которое приводит к связи $\dot{\zeta} = 0$, которая говорит об отсутствии динамики поля ζ .

Этот результат согласуется с наблюдением, что предел квадрата скорости звука (18) при $A_4 \rightarrow 0$ равен 0:

$$\lim_{A_4 \rightarrow 0, \dot{A}_4 \rightarrow 0} c_S^2 = \lim_{A_4 \rightarrow 0, \dot{A}_4 \rightarrow 0} 3 \frac{A_1 A_7 \dot{A}_4 - 3 A_2 A_4^2 - \left(A_1 A_7 H + A_1 \dot{A}_7 + A_7 \dot{A}_1 \right) A_4}{(4 A_1 A_3 - 9 A_4^2) A_1} = 0. \quad (40)$$

Таким образом, условие $A_4 = 0$ во все моменты времени, без дополнительных условий, приводит к нединамическому скалярному сектору. Однако ранее, при рассмотрении уравнения связи (32) было отмечено, что выделенной является ситуация, в которой $A_3 = 0$. Между коэффициентами действия (12) существуют следующие соотношения:

$$A_3 = \frac{3}{2} A_4 H - \frac{1}{2} A_{11} \dot{\pi}, \quad (41)$$

$$A_{17} = 3 \frac{H}{\dot{\pi}} A_4 - \frac{\ddot{\pi}}{\dot{\pi}} A_{11}, \quad (42)$$

Далее предполагается, что $A_4 = 0$, а значит для того, чтобы $A_3 = 0$ необходимо либо положить $A_{11} = 0$, либо $\dot{\pi} = 0$. Рассмотрим далее оба этих случая отдельно.

1.5.1 $A_{11} = 0$.

Полагая $A_{11} = 0$ в любой момент времени, действие (31) принимает вид:

$$\begin{aligned}
S^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \left(A_1 (\dot{\mathcal{Y}})^2 + A_2 \frac{(\vec{\nabla} \mathcal{Y})^2}{a^2} + A_7 \mathcal{Z} \frac{(\vec{\nabla}^2 \mathcal{Y})}{a^2} + A_8 \mathcal{Z} \frac{(\vec{\nabla}^2 \mathcal{X})}{a^2} \right. \\
+ A_{10} \mathcal{X} \ddot{\mathcal{Y}} + A_{13} \mathcal{X} \frac{(\vec{\nabla}^2 \mathcal{Y})}{a^2} + A_{14} (\dot{\mathcal{X}})^2 + A_{15} \frac{(\vec{\nabla} \mathcal{X})^2}{a^2} + A_{16} \dot{\mathcal{X}} \frac{(\vec{\nabla}^2 \mathcal{Y})}{a^2} \\
\left. + A_{18} \mathcal{X} \dot{\mathcal{Y}} + A_{20} \mathcal{X}^2 \right). \quad (43)
\end{aligned}$$

А вариация (43) по $\mathcal{Z}$ приводит к возникновению связи:

$$\mathcal{X} = -\frac{A_7}{A_8} \mathcal{Y}. \quad (44)$$

Которая в свою очередь сводит (43) к виду:

$$S^{(2)} = \int dt d^3x a^3 m \mathcal{Y}^2, \quad (45)$$

где коэффициент m нетривиальная комбинация из исходных коэффициентов теории:

$$\begin{aligned}
m = \frac{1}{a^3} \left(-\frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{A_{10} A_7 a^3}{A_8} \right] - \frac{1}{A_8^4} \frac{d}{dt} \left[a^3 A_{14} A_7^2 A_8 \dot{A}_8 \right] + \frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{A_8^3} \right] A_{14} A_7^2 (\dot{A}_8) \right. \\
\left. - \frac{d}{dt} \left[A_{14} (\dot{A}_7) a^3 \right] \frac{A_7}{A_8^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{A_7 A_{18} a^3}{A_8} \right] + A_{20} \frac{A_7^2}{A_8^2} \right). \quad (46)
\end{aligned}$$

Этот случай так же привел к отсутствию динамики в скалярном секторе.

1.5.2 $\dot{\pi} = 0$.

Рассмотрим теперь вариант статичного фонового скалярного поля $\dot{\pi} = 0$. В общем случае, условие $A_4 = 0$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
K_X \dot{\pi}^3 - 2G_4 H + 8HG_{4X} \dot{\pi}^2 + 8HG_{4XX} \dot{\pi}^4 - G_{4\pi} \dot{\pi} - 2G_{4\pi X} \dot{\pi}^3 \\
+ 5H^2 G_{5X} \dot{\pi}^3 + 2H^2 G_{5XX} \dot{\pi}^5 - 3HG_{5\pi} \dot{\pi}^2 - 2HG_{5\pi X} \dot{\pi}^4 = 0. \quad (47)
\end{aligned}$$

Предполагая статичность поля π , в условии (47) остается только слагаемое $G_4 H$. Из условий на отсутствие градиентных неустойчивостей $A_2 > 0$, нам

важно, чтобы коэффициент A_2 не обращался в нуль. С другой стороны, из явного выражения для A_2 - коэффициента при слагаемом $\left(\vec{\nabla} h_{ij}^T\right)^2$ в тензорном секторе,

$$A_2 = 2G_4 - 2G_{5X}\dot{\pi}^2\ddot{\pi} - G_{5\pi}\dot{\pi}^2, \quad (48)$$

становится ясно, что условие $G_4 = 0$ приводит к возникновению сильной связи в тензорном секторе (11), а значит условие $A_4 = 0$ эквивалентно условию $H = 0$, что соответствует пространству Минковского ($a(t) = \text{const}$).

В этом случае, коэффициенты в действии (31) сильно упрощаются, и ненулевыми остаются следующие:

$$\begin{aligned} A_1 &= -6G_4, \quad A_2 = 2G_4, \quad A_8 = -2G_{4\pi} \quad A_{13} = -4G_{4\pi}, \\ A_{14} &= F_X - K_\pi, \quad A_{15} = -F_X + K_\pi, \quad A_{17} = F_\pi, \quad A_{20} = \frac{1}{2}F_{\pi\pi}. \end{aligned} \quad (49)$$

А фоновые уравнения движения (7a), (7b), (8) накладывают ограничения:

$$F = 0, \quad F_\pi = 0.$$

В результате всех ограничений действие скалярного сектора возмущений (31) принимает вид:

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \int dt d^3x a^3 \left(-4G_4 \mathcal{Z} \frac{\vec{\nabla}^2 \mathcal{Y}}{a^2} - 2G_{4\pi} \mathcal{Z} \frac{\vec{\nabla}^2 \mathcal{X}}{a^2} - 6G_4 (\dot{\mathcal{Y}})^2 + \frac{1}{2}F_{\pi\pi} \mathcal{X}^2 \right. \\ &\quad \left. + (F_X - K_\pi) \left((\dot{\mathcal{X}})^2 - \frac{(\vec{\nabla} \mathcal{X})^2}{a^2} \right) + 2G_4 \frac{(\vec{\nabla} \mathcal{Y})^2}{a^2} - 6G_{4\pi} \dot{\mathcal{X}} \dot{\mathcal{Y}} - 4G_{4\pi} \mathcal{X} \frac{\vec{\nabla}^2 \mathcal{Y}}{a^2} \right). \end{aligned} \quad (50)$$

В этот раз из вариации по $\mathcal{Z}$ следует, что

$$\mathcal{Y} = -\frac{1}{2} \frac{G_{4\pi}}{G_4} \mathcal{X}. \quad (51)$$

И при подстановке (51) в действие (50), получаем:

$$S^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \left(\mathcal{G}_S (\dot{\mathcal{X}})^2 + m \mathcal{X}^2 - \mathcal{F}_S \frac{(\vec{\nabla} \mathcal{X})^2}{a^2} \right), \quad (52)$$

где коэффициенты принимают следующие значения:

$$\mathcal{G}_S = \mathcal{F}_S = \frac{1}{2G_4} (3G_{4\pi}^2 + 2F_X G_4 - 2K_\pi G_4), \quad (53a)$$

$$m = \frac{1}{2} F_{\pi\pi}. \quad (53b)$$

И соответствующее уравнение движения:

$$\ddot{\mathcal{X}} + \frac{G_4 F_{\pi\pi}}{2K_\pi G_4 - 2F_X G_4 - 3G_{4\pi}^2} \mathcal{X} - \frac{(\vec{\nabla} \mathcal{X})^2}{a^2} = 0. \quad (54)$$

Рассмотренный случай соответствует скалярному полю с не минимальной связью с гравитацией в пространстве Минковского. Уравнение движения (54) иллюстрирует, что квадрат скорости звука $c_\infty^2 = 1$. Это не означает, что скалярная мода распространяется со скоростью света, поскольку у нее есть ненулевая масса, но при больших импульсах ($k \rightarrow \infty$) ее скорость распространения будет стремиться к скорости света.

1.6 Промежуточные итоги

Подведем промежуточный итог предыдущих разделов и сведем их в таблицу:

$A_4 \neq 0$	$c_\infty^2 = \mathcal{F}_S / \mathcal{G}_S (18)$	
$A_4 \equiv 0$	$\dot{\pi} \neq 0$	Отсутствие динамики в скалярном секторе
	$\dot{\pi} = 0$	$c_\infty^2 = 1$

Следовательно, при нетривиальном поле π динамические скалярные возмущения отсутствуют, что исключает необходимость в условиях устойчивости. Однако, при статическом фоновом поле π наблюдается скалярное возмущение со скоростью звука $c_\infty^2 = 1$. В последнем случае условия устойчивости формулируются следующим образом:

$$G_4 > 0, \quad (55)$$

$$3G_{4\pi}^2 + 2F_X G_4 - 2K_\pi G_4 > 0. \quad (56)$$

Для иллюстрации результата построим конкретные примеры стабильных решений типа вселенной с отскоком и Генезиса в теории Хорндески, предполагая $A_4 \equiv 0$.

1.7 Построение стабильных решений.

Приведем ниже конкретные примеры выбора функций лагранжиана в теории Хорндески, которые соответствуют устойчивым решениям с отскоком и генезису.

Здесь и далее все вычисления производятся в терминах планковских величин

$$\kappa = 8\pi G = 1.$$

Алгоритм построения решения будет следующим:

1. Фиксируем необходимое нам решение, а именно параметр Хаббла и масштабный фактор.
2. Выбираем в качестве анзаца функции лагранжиана в виде первых степеней разложения в ряд по переменной X :

$$F(\pi, X) = f_0(\pi) + f_1(\pi) \cdot X, \quad (57a)$$

$$K(\pi, X) = k_1(\pi) \cdot X, \quad (57b)$$

$$G_4(\pi, X) = \frac{1}{2}, \quad (57c)$$

$$G_5(\pi, X) = 0. \quad (57d)$$

Для нас отдельным интересом является построение теории с $G_4 = \frac{1}{2}$, которая соответствует общей теории относительности, поскольку решения отскока и генезиса в ней запрещены NEC.

3. Выберем зависимость от времени однородного фонового значения скалярного поля π линейной, изменить ее всегда можно с помощью преобразования полей:

$$\pi(t) = t, \quad X = (\dot{\pi})^2 = 1. \quad (58)$$

4. Ранее было показано, что условие $A_4 \equiv 0$ приводит к отсутствию динамики в скалярном секторе, поэтому условия стабильности нам не требуются и остаются только фоновые уравнения движения и само условие $A_4 \equiv 0$. Подставляем анзац (57) в уравнения (7a), (7b) и (47), и получаем следующую

связь между функциями лагранжиана и параметром Хаббла:

$$f_0 = -\dot{H}, \quad (59a)$$

$$f_1 = -3H^2, \quad (59b)$$

$$k_1 = H. \quad (59c)$$

Таким образом, функции (59) могут быть непосредственно выражены через параметр Хаббла и его производную.

Следовательно, для любого параметра Хаббла возможно подобрать функции лагранжиана, описывающие поведение скалярного поля в общей теории относительности. Такое решение будет устойчивым, но скалярный сектор не будет иметь динамики.

Далее перейдем к конкретным примерам вселенной с отскоком и Генезиса.

1.7.1 Вселенная с отскоком

Одним из условий, наложенных на искомое решение, является простая асимптотика теории в будущем, а именно поле π должно перейти в безмассовое скалярное поле с уравнением состояния $p = \rho$, где p - давление, а ρ - плотность энергии. В этом случае, асимптотика параметра Хаббла на поздних временах имеет вид:

$$t \rightarrow +\infty : \quad H(t) = \frac{1}{3t}. \quad (60)$$

Решение вселенной с отскоком характеризуется периодом "сжатия" на ранних временах ($H < 0$) с последующим отскоком - сменой знака параметра Хаббла, который продолжается расширением вселенной. Выберем зависимость от времени параметра Хаббла, следующим образом:

$$H(t) = \frac{t}{3(\tau^2 + t^2)}, \quad (61)$$

а масштабный фактор равен

$$a(t) = (\tau^2 + t^2)^{\frac{1}{6}}. \quad (62)$$

При таком выборе функций, отскок происходит в момент времени $t = 0$, а параметр τ определяет продолжительность стадии отскока. В дальнейшем предполагается, что $\tau \gg 1$, чтобы временные масштабы были много больше Планковского времени.

Условия (59) однозначно определяют функции лагранжиана при заданном параметре Хаббла. Ниже на Рис. 1 приведены соответствующие графики.

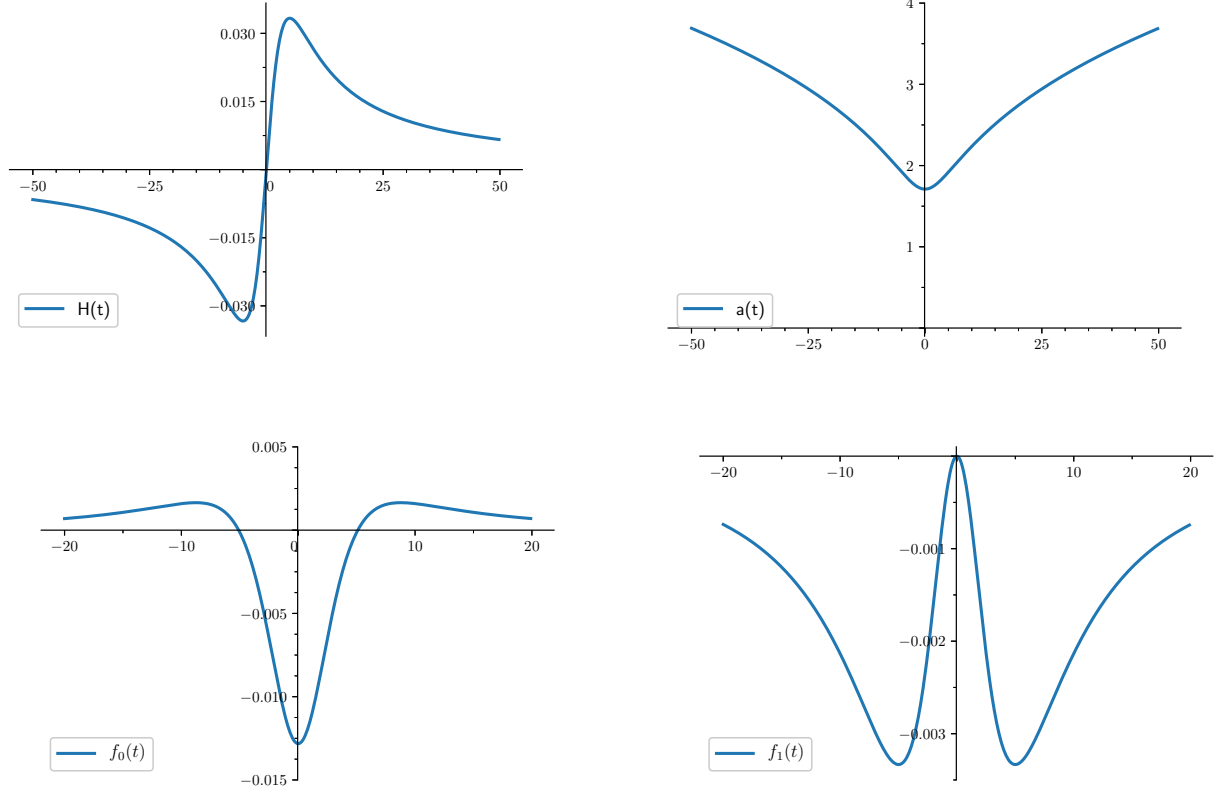


Рис. 1: Параметр Хаббла $H(t)$, масштабный фактор $a(t)$ и функции лагранжиана $f_0(t)$, $f_1(t)$ в случае сценария с отскоком. Графики построены при выборе $\tau = 25$ (напоминаем, что $k_1(t) = H(t)$).

На основе условий (59) и выражения для параметра Хаббла (61) можно реконструировать следующий лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \frac{\pi^2 - \tau^2}{3(\tau^2 + \pi^2)^2} - \frac{\pi^2 X}{3(\tau^2 + \pi^2)^2} + \frac{\pi X}{3(\tau^2 + \pi^2)} \square \pi - \frac{1}{2} R. \quad (63)$$

1.7.2 Генезис

Вселенная типа генезиса [14] соответствует параметру Хаббла со следующей асимптотикой на $t \rightarrow -\infty$:

$$H(t) \propto \frac{1}{(-t)^3}. \quad (64)$$

Мы рассматриваем полную эволюцию вселенной с Генезисом в начале и выходом на асимптотику пространства Минковского в конце. Соответствующий параметр Хаббла:

$$H(t) = \alpha \frac{\tau^2}{(t^2 + \tau^2)^{3/2}}, \quad (65)$$

где α - произвольный параметр, отвечающий за отношение масштабных факторов на $+$ и $-\infty$. И сам масштабный фактор имеет вид:

$$a(t) = \exp \left(\frac{\alpha t}{\sqrt{\tau^2 + t^2}} + \alpha \right). \quad (66)$$

Ниже на Рис. 2 приведены графики параметра Хаббла $H(t)$, масштабного фактора $a(t)$ и функций лагранжиана.

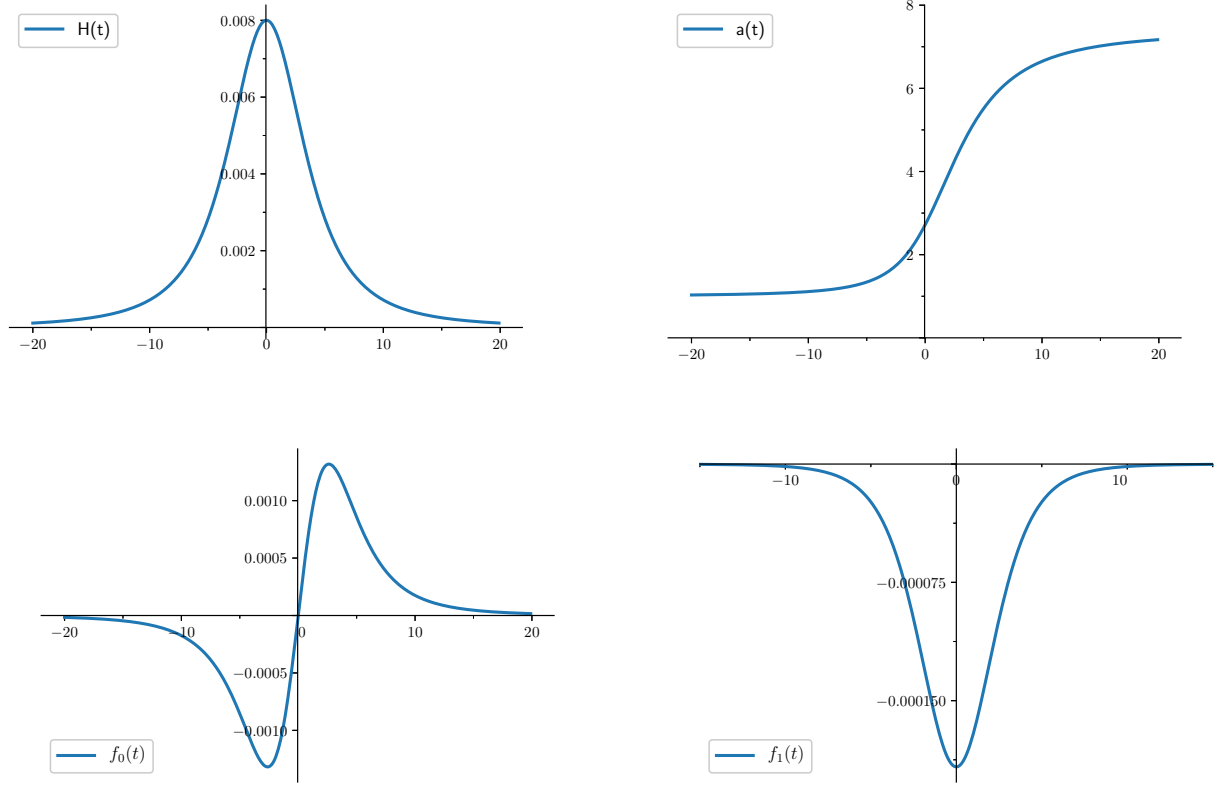


Рис. 2: Параметр Хаббла $H(t)$, масштабный фактор $a(t)$ и функции лагранжиана $f_0(t)$, $f_1(t)$ отвечающие сценарию Генезиса с параметрами: $\alpha = 1$, $\tau = 25$ (напоминаем, что $k_1(t) = H(t)$).

Эти решения могут быть получены из лагранжиана:

$$\mathcal{L} = \frac{3\alpha\tau^2\pi}{(\tau^2 + \pi^2)^{5/2}} - 3X \frac{\alpha^2\tau^4}{(\tau^2 + \pi^2)^3} + X \frac{\alpha\tau^2}{(\tau^2 + \pi^2)^{3/2}} \square \pi - \frac{1}{2}R. \quad (67)$$

Основные результаты Главы 1

В данной главе был проведен детальный анализ устойчивости космологических решений в рамках общей теории Хорндески на фоне пространственно-плоской FLRW вселенной. Были рассмотрены скалярные и тензорные возмущения и получено квадратичное действие для них.

После обсуждения известной запрещающей теоремы, которая утверждает невозможность существования несингулярных космологических решений, устой-

чивых на всем протяжении эволюции, в рамках стандартной теории Хорндески, был исследован вариант обхода этой теоремы.

Основным результатом главы является исследование способа обхода этой теоремы путем рассмотрения класса теорий, в которых коэффициент A_4 в действии (12) тождественно равен нулю. Анализ, проведенный с использованием калибровочно-инвариантных переменных, показал, что при $A_4 = 0$:

- В случае динамического фонового скалярного поля ($\dot{\pi} \neq 0$) скалярные возмущения становятся нединамическими ($\dot{\zeta} = 0$), что тривиально снимает проблему градиентной неустойчивости скалярного сектора и позволяет обойти запрещающую теорему.
- В случае статического фонового поля ($\dot{\pi} = 0$), соответствующего пространству Минковского (при $G_4 \neq 0$), скалярные возмущения динамические и распространяются со скоростью света ($c_S^2 = 1$).

Условие $A_4 = 0$ накладывает дополнительное условие на функции лагранжиана и фоновые поля, это позволило нам явно реконструировать лагранжианы для заданных несингулярных космологических сценариев, таких как вселенная с отскоком и генезис, при условии линейной эволюции фонового поля $\pi(t) = t$.

Таким образом, показано, что подкласс теорий Хорндески с $A_4 = 0$ допускает построение несингулярных космологических решений устойчивых на протяжении всей своей эволюции.

2 Устойчивость решений над анизотропным фоном

2.1 Возмущения над анизотропным фоном

В рамках данного раздела рассматриваются только первые четыре слагаемых в лагранжиане общей теории Хорндески:

$$\mathcal{L} = F(\pi, X) + K(\pi, X)\Box\pi - G_4(\pi, X)R + 2G_{4X}(\pi, X) \left[(\Box\pi)^2 - \pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu} \right], \quad (68)$$

где обозначения остаются прежними: π - скалярное поле, $X = g^{\mu\nu}\pi_{,\mu}\pi_{,\nu}$, $\pi_{,\mu} = \partial_\mu\pi$, $\pi_{;\mu\nu} = \nabla_\nu\nabla_\mu\pi$, $\Box\pi = g^{\mu\nu}\nabla_\nu\nabla_\mu\pi$, $G_{4X} = \partial G_4/\partial X$, и т.д.

В качестве фона рассмотрим однородное анизотропное пространство типа Бьянки I:

$$ds^2 = dt^2 - (a^2(t)dx^2 + b^2(t)dy^2 + c^2(t)dz^2). \quad (69)$$

Над этим фоном уравнения движения, получаемые из действия (68) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta g^{00} : \quad & F - 2F_X(\dot{\pi})^2 + K_\pi(\dot{\pi})^2 \\ & + (H_a H_b + H_a H_c + H_b H_c) \left(2G_4 - 8G_{4X}(\dot{\pi})^2 - 8G_{4XX}(\dot{\pi})^4 \right) \\ & + 3H \left(4G_{4\pi X}(\dot{\pi})^3 + 2G_{4\pi} \ddot{\pi} - 2K_X(\dot{\pi})^3 \right) = 0, \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \delta g^{ii} : \quad & \frac{1}{2}F - K_X \ddot{\pi}(\dot{\pi})^2 - \frac{1}{2}K_\pi(\dot{\pi})^2 + 2G_{4\pi X} \ddot{\pi}(\dot{\pi})^2 + G_{4\pi} \ddot{\pi} + (\dot{\pi})^2 G_{4\pi\pi} \\ & + (H_j + H_k) \left(G_{4\pi} \dot{\pi} - 2G_{4X} \dot{\pi} \ddot{\pi} - 4G_{4XX}(\dot{\pi})^3 \ddot{\pi} - 2G_{4\pi X}(\dot{\pi})^3 \right) \\ & + \left(H_j^2 + H_j H_k + H_k^2 + \dot{H}_j + \dot{H}_k \right) \left(G_4 - 2G_{4X}(\dot{\pi})^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (71)$$

где предполагается, что индексы i, j, k пробегает значения a, b, c и при этом $i \neq j \neq k$, H_i - параметры Хаббла, отвечающие соответствующим направлениям, а $H = \frac{1}{3}(H_a + H_b + H_c)$.

Разложение возмущений метрики $h_{\mu\nu}$ по спиралям в этом случае будет следующим:

$$h_{00} = 2\Phi \quad (72a)$$

$$h_{0i} = -\partial_i \beta + Z_i^T, \quad (72b)$$

$$h_{ij} = -2\frac{H_i}{H}\Psi g_{ij} - 2\partial_i \partial_j E - (\partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T) + h_{ij}^T, \quad (72c)$$

где Φ, β, Ψ, E - скалярные поля, Z_i^T, W_i^T - поперечные векторные поля, ($\partial_i Z_i^T = \partial_i W_i^T = 0$), h_{ij}^T - поперечный бесследовый тензор, а также χ - возмущение скалярного поля π .

Действие для тензорного сектора возмущений имеет следующую форму:

$$S_h^{(2)} = \int dt \, d^3x a^3 \left[\frac{A_5}{2} \left(\dot{h}_{ij}^T \right)^2 - A_2 \left(\Delta_a^2 h_{ij}^T + \Delta_b^2 h_{ij}^T + \Delta_c^2 h_{ij}^T \right) \right]. \quad (73)$$

Здесь точка означает производную по космологическому времени t , $\Delta_a = a^{-1}\partial_x$, $\Delta_b = b^{-1}\partial_y$, $\Delta_c = c^{-1}\partial_z$, коэффициенты A_i являются комбинациями функ-

ций лагранжиана и их производных, точные выражения для них содержатся в приложении В.

Аналогично изотропному случаю, векторные возмущения оказываются нединамичными, а скалярные самыми нетривиальными в разрешении связей. Без потери общности, можно частично воспользоваться калибровочной свободой и зафиксировать $\partial_i \partial_j E = 0$ с самого начала. Тогда действие второго порядка для скалярного сектора возмущений принимает вид:

$$\begin{aligned}
S^{(2)} = \int dx \, abc \left(\frac{1}{6} A_1 \sum_{i \neq j} \dot{\Psi}_i \dot{\Psi}_j + \frac{A_2}{2} \sum_{\substack{i=a,b,c \\ i \neq j \neq k}} \Delta_i \Psi_j \Delta_i \Psi_k + A_3 \Phi^2 \right. \\
+ \Phi (A_4^i \Delta_i^2 \beta) + A_5 \sum_{\substack{i=a,b,c \\ i \neq j \neq k}} \dot{\Psi}_i (\Delta_j^2 \beta + \Delta_k^2 \beta) + \Phi (A_6^i \dot{\Psi}_i) + \frac{A_7}{2} \Phi \sum_{\substack{i=a,b,c \\ i \neq j \neq k}} \Delta_i^2 (\Psi_j + \Psi_k) \\
+ \Phi (A_8^i \Delta_i^2 \chi) + \dot{\chi} (A_9^i \Delta_i^2 \beta) + \chi (A_{10}^i \ddot{\Psi}_i) + A_{11} \Phi \dot{\chi} + \chi (A_{12}^i \Delta_i^2 \beta) \\
+ \chi \sum_{i,j} \frac{1}{2} A_{13}^{ij} (\Delta_i^2 \Psi_j + \Delta_j^2 \Psi_i) + A_{14} (\dot{\chi})^2 + A_{15}^i (\Delta_i \chi)^2 + A_{17} \Phi \chi + \chi (A_{18}^i \dot{\Psi}_i) \\
+ A_{20} \chi^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=a,b,c \\ i \neq j}} B^{ij} \Psi_i \dot{\Psi}_j - \Psi_a (B^{ab} \Delta_y^2 \beta + B^{ac} \Delta_z^2 \beta) + \Psi_b (B^{ab} \Delta_x^2 \beta + B^{bc} \Delta_z^2 \beta) \\
\left. + \Psi_c (B^{ac} \Delta_x^2 \beta - B^{bc} \Delta_y^2 \beta) \right). \tag{74}
\end{aligned}$$

Здесь $\Psi_i = \bar{H}_i \Psi$ и $\bar{H}_i = H_i/H$, кроме того здесь подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Явная форма коэффициентов может быть найдена в приложении В. Отменим, что все коэффициенты перед пространственными производными (кроме A_1 и A_2) претерпевают "расщепление". Это является прямым следствием анизотропии фоновой метрики. Коэффициенты A_1 и A_2 так же "расщепятся" но только после добавления члена $\mathcal{L}_5$ в общую теорию Хорндески. Выбор обозначения A_i сделан для явного соответствия между изотропным и анизотропным случаями; коэффициенты B_i отвечают слагаемым, которых не было в изотропном случае. Переменные Ψ_i вводятся для удобства и упрощения записи.

2.2 Переход к калибровочно-инвариантным величинам

В данном разделе действие (74) будет сведено к одной переменной с использованием калибровочно-инвариантных полей.

Поскольку в самом начале была произведена частичная фиксация калибровки условием $\partial_i \partial_j E = 0$, действие (74) инвариантно относительно остаточных калибровочных преобразований:

$$\Phi \rightarrow \Phi + \dot{\xi}_0, \quad \beta \rightarrow \beta - \xi_0, \quad \chi \rightarrow \chi + \xi_0 \dot{\pi}, \quad \Psi \rightarrow \Psi + \xi_0 H. \quad (75)$$

На основе этого вводятся новые калибровочно-инвариантные переменные:

$$\mathcal{X} = \chi + \dot{\pi} \beta, \quad (76a)$$

$$\mathcal{Y}_i = \Psi_i + H_i \beta, \quad (76b)$$

$$\mathcal{Z} = \Phi + \dot{\beta}. \quad (76c)$$

И в терминах этих переменных действие (74) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} S^{(2)} = \int dx \, abc & \left(\frac{1}{6} A_1 \sum_{i \neq j} \dot{\mathcal{Y}}_i \dot{\mathcal{Y}}_j + \frac{A_2}{2} \sum_{\substack{i=a,b,c \\ i \neq j \neq k}} \Delta_i \mathcal{Y}_j \Delta_i \mathcal{Y}_k + A_3 \mathcal{Z}^2 + \mathcal{Z} (A_6^i \dot{\mathcal{Y}}_i) \right. \\ & + \frac{A_7}{2} \mathcal{Z} \sum_{\substack{i=a,b,c \\ i \neq j \neq k}} \Delta_i^2 (\mathcal{Y}_j + \mathcal{Y}_k) + \mathcal{Z} (A_8^i \Delta_i^2 \mathcal{X}) + \mathcal{X} (A_{10}^i \ddot{\mathcal{Y}}_i) + A_{11} \mathcal{Z} \dot{\mathcal{X}} \\ & + \mathcal{X} \sum_{i,j} \frac{1}{2} A_{13}^{ij} (\Delta_i^2 \mathcal{Y}_j + \Delta_j^2 \mathcal{Y}_i) + A_{14} (\dot{\mathcal{X}})^2 + (A_{15}^i (\Delta_i \mathcal{X})^2) + A_{17} \mathcal{X} \mathcal{Z} \\ & \left. + \mathcal{X} (A_{18}^i \dot{\mathcal{Y}}_i) + A_{20} \mathcal{X}^2 + C_3^{ab} \mathcal{Y}_a \dot{\mathcal{Y}}_b + C_3^{bc} \mathcal{Y}_c \dot{\mathcal{Y}}_b + C_3^{ac} \mathcal{Y}_a \dot{\mathcal{Y}}_c \right). \quad (77) \end{aligned}$$

Поле $\mathcal{Z}$ очевидно является нединамическим, и варьирование действия по нему приводит к следующей связи:

$$\mathcal{Z} = -\frac{1}{2} \frac{1}{A_3} \left((A_8^i \Delta_i^2 \mathcal{X}) + A_6^i \dot{\mathcal{Y}}_i + A_{11} \dot{\mathcal{X}} \frac{A_7}{2} \sum_{\substack{i=a,b,c \\ i \neq j \neq k}} \Delta_i^2 (\mathcal{Y}_j + \mathcal{Y}_k) + \mathcal{X} A_{17} \right). \quad (78)$$

После подстановки $\mathcal{Y}_i = \bar{H}_i \mathcal{Y}$ вводится новое поле ζ в виде следующей линейной комбинации:

$$\zeta = \mathcal{Y} + \eta \mathcal{X}, \quad \text{где } \eta = 9 \frac{A_{11} A_4 + 2 A_3 A_8}{4 (\bar{H}_a \bar{H}_b + \bar{H}_a \bar{H}_c + \bar{H}_b \bar{H}_c) A_1 A_3 - 27 A_4^2}, \quad (79)$$

здесь и далее

$$A_4 = \frac{1}{3} \sum_{l=a,b,c} A_4^l \bar{H}_l, \quad A_8 = \frac{1}{3} \sum_{l=a,b,c} A_8^l \bar{H}_l. \quad (80)$$

Поле ζ оказывается единственной динамической переменной, в то время как $\mathcal{X}$ становится связью. Следует отметить, что существует и альтернативный подход, при котором $\mathcal{Y}$ становится нединамическим. При этом физический результат остается инвариантным относительно выбора переменных, однако вид действия может претерпеть изменения.

Таким образом, в терминах ζ и $\mathcal{X}$ действие принимает вид:

$$S^{(2)} = \int dx \, abc \left(\left(\dot{\zeta} \right)^2 \left(\frac{2}{3} A_1 (\bar{H}_a \bar{H}_b + \bar{H}_a \bar{H}_c + \bar{H}_b \bar{H}_c) - \frac{9}{2} \frac{A_4^2}{A_3} \right) - \zeta \mathcal{X} C_3 \right. \\ \left. - \frac{1}{2A_3} (\mathcal{X} C_1 - \zeta C_2)^2 + M \mathcal{X}^2 + \zeta^2 (m + C_4) + \mathcal{X} \zeta C_5 \right), \quad (81)$$

где

$$C_1 = \Sigma_a \frac{k_x^2}{a^2} + \Sigma_b \frac{k_y^2}{b^2} + \Sigma_c \frac{k_z^2}{c^2}, \quad (82a)$$

$$C_2 = \Theta_a \frac{k_x^2}{a^2} + \Theta_b \frac{k_y^2}{b^2} + \Theta_c \frac{k_z^2}{c^2}, \quad (82b)$$

$$C_3 = \Lambda_a \frac{k_x^2}{a^2} + \Lambda_b \frac{k_y^2}{b^2} + \Lambda_c \frac{k_z^2}{c^2}, \quad (82c)$$

$$C_4 = \Pi_a \frac{k_x^2}{a^2} + \Pi_b \frac{k_y^2}{b^2} + \Pi_c \frac{k_z^2}{c^2}, \quad (82d)$$

$$C_5 = \Xi_a \frac{k_x^2}{a^2} + \Xi_b \frac{k_y^2}{b^2} + \Xi_c \frac{k_z^2}{c^2}, \quad (82e)$$

где $\Lambda_i, \Xi_i, \Pi_i, \Theta, M, m$ и Σ_i - линейные комбинации коэффициентов A_i , которые могут быть найдены в приложении В.

Как было отмечено ранее, теперь становится очевидным, что поле $\mathcal{X}$ является нединамическим, и соответствующая ему связь имеет следующий вид:

$$\mathcal{X} = \frac{1}{C_1^2 - 2MA_3} \left((C_1 C_2 + A_3 C_5) \zeta - A_3 C_3 \dot{\zeta} \right) \quad (83)$$

Подстановка (83) в (81) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned}
S^{(2)} = & \int dx \, abc \left(\left(\dot{\zeta} \right)^2 \left(\frac{2}{3} A_1 (\bar{H}_a \bar{H}_b + \bar{H}_a \bar{H}_c + \bar{H}_b \bar{H}_c) - \frac{9}{2} \frac{A_4^2}{A_3} + \frac{1}{2} \frac{A_3 C_3^2}{C_1^2 - 2MA_3} \right) \right. \\
& + \zeta^2 \left(C_4 + \frac{C_1 C_2 C_5}{C_1^2 - 2MA_3} + \frac{1}{2} \frac{1}{abc} \left[abc \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1^2 - 2MA_3} \right] \right) + \\
& \left. + \zeta^2 \left(m + \frac{1}{2} \frac{A_3 C_5^2 + 2C_2^2 M}{C_1^2 - 2MA_3} + \frac{1}{2} \frac{1}{abc} \frac{d}{dt} \left[\frac{abc A_3 C_3 C_5}{C_1^2 - 2MA_3} \right] \right) \right). \quad (84)
\end{aligned}$$

В действии (84) первое слагаемое - кинетический член, второе - градиентный (он пропорционален k^2), а третий соответствует массе поля ζ .

2.3 Изотропный предел

В изотропном случае $b = a, c = a$ коэффициенты C_i , соответственно, принимают вид:

$$C_1 = A_4 \frac{(2A_1 A_{11} + 9A_4 A_8) k^2}{(4A_1 A_3 - 9A_4^2) a^2}, \quad (85a)$$

$$C_2 = \frac{2}{3} A_1 \frac{k^2}{a^2}, \quad (85b)$$

$$C_3 = \frac{9A_4 A_8 + 2A_1 A_{11}}{3A_3} \frac{k^2}{a^2}, \quad (85c)$$

$$C_4 = \left(A_2 + \frac{1}{2} \frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left[\frac{A_4 A_1 a}{A_3} \right] \right) \frac{k^2}{a^2}, \quad (85d)$$

$$C_5 = 0, \quad (85e)$$

$$m = M = 0. \quad (85f)$$

А действие (84) сокращается до

$$S^{(2)} = \int dt \, d^3x \, a^3 \left(\mathcal{G}_S \left(\dot{\zeta} \right)^2 - \mathcal{F}_S \frac{(\vec{\nabla} \zeta)^2}{a^2} \right), \quad (86)$$

где

$$\mathcal{G}_S = \frac{4}{9} \frac{A_3 A_1^2}{A_4^2} - A_1, \quad (87a)$$

$$\mathcal{F}_S = -\frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left[\frac{a A_1 A_7}{3A_4} \right] - A_2 = \frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left[\frac{a A_5 \cdot A_7}{2A_4} \right] - A_2. \quad (87b)$$

что соответствует уже известному результату (см. (16) и (37)).

2.4 Проверка стабильности вселенной с отскоком относительно малой анизотропии

Для дальнейшего анализа теории рассматривается действие (74) в унитарной калибровке $\chi = 0$ с вектором момента $\bar{k}$, направленным вдоль оси x ($\bar{k} = (k_x, 0, 0)$). Фиксация направления вектора момента определяет систему координат, что не ограничивает общность рассуждений. В результате получается следующее действие:

$$\begin{aligned}
S^{(2)} = \int dx \, abc \left(\frac{1}{6} A_1 \sum_{i \neq j} \dot{\Psi}_i \dot{\Psi}_j - A_2 k_x^2 \Psi_b \Psi_c + A_3 \Phi^2 + A_4^a k_x^2 \Phi \beta \right. \\
+ A_5 \beta k_x^2 (\dot{\Psi}_b + \dot{\Psi}_c) + \Phi (A_6^i \dot{\Psi}_i) + A_7 \Phi k_x^2 (\Psi_b + \Psi_c) \\
\left. + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=a,b,c \\ i \neq j}} B^{ij} \Psi_i \dot{\Psi}_j - k_x^2 \beta (B^{ab} \Psi_b + B^{ac} \Psi_c) \right)
\end{aligned} \quad (88)$$

Затем варьируем действие (88) по переменным Φ и β и получаем следующие связи:

$$\Phi = \frac{A_1}{3A_4^x} \left(\dot{\Psi}_b + \dot{\Psi}_c - (H_a - H_b) \Psi_b - (H_a - H_c) \Psi_c \right) \quad (89a)$$

$$\begin{aligned}
k_x^2 \beta = \frac{1}{A_4^x} \left(\left(\dot{\Psi}_i A_4^i \right) - \frac{1}{3} A_1 k_x^2 (\Psi_b + \Psi_c) \right) \\
+ \frac{2 A_1 A_3}{3 (A_4^x)^2} (H_a - H_b) \Psi_b + (H_a - H_c) \Psi_c - (\dot{\Psi}_b + \dot{\Psi}_c)
\end{aligned} \quad (89b)$$

Отрешение связей приводит к действию, выраженному через переменную Ψ :

$$S^{(2)} = \int dt \, d^3x \, abc \left(\mathcal{G}_S (\dot{\Psi})^2 + M \Psi^2 + \mathcal{F}_S \frac{k_x^2}{a^2} \Psi^2 \right), \quad (90)$$

где

$$\mathcal{G}_S = \frac{2 A_3 A_1^2}{9 (A_4^x)^2} (\bar{H}_b + \bar{H}_c)^2 - \frac{2 A_1}{3 A_4^x} (A_4^y \bar{H}_b + A_4^z \bar{H}_c) (\bar{H}_b + \bar{H}_c) + \frac{2}{3} A_1 \bar{H}_b \bar{H}_c, \quad (91a)$$

$$\mathcal{F}_S = -2 A_2 \bar{H}_b \bar{H}_c - \frac{1}{9 a^3} (\bar{H}_b + \bar{H}_c)^2 \frac{d}{dt} \left[\frac{A_1^2 a^3}{A_4^x} \right] + \frac{A_1^2}{9 A_4^x} (\bar{H}_b^2 - \bar{H}_c^2) (H_b - H_c), \quad (91b)$$

явное выражение для коэффициента M в данный момент не имеет большого значения. Следует отметить, что несмотря на повторное отрешивание связей в унитарной калибровке, скорость звука совпадает со значением, полученным из действия (84).

Рассмотрим теперь модель вселенной с отскоком (63)

$$\mathcal{L} = \frac{\pi^2 - \tau^2}{3(\tau^2 + \pi^2)^2} - \frac{\pi^2 X}{3(\tau^2 + \pi^2)^2} + \frac{\pi X}{3(\tau^2 + \pi^2)} \square \pi - \frac{1}{2}R. \quad (92)$$

В предыдущей главе обсуждалось, что этот лагранжиан отвечает ситуации, когда в действии (86) $A_4 = 0$. В этой модели существует решение изотропной вселенной с отскоком, но без динамических скалярных мод возмущений. Проверим теперь стабильность этого решения относительно малых отклонений решения от изотропного, усредненный параметр Хаббла $\bar{H}$ при этом остается неизменным

$$H_a = \frac{t}{(\tau^2 + t^2)} + \frac{\alpha}{(\tau^2 + t^2)^{3/2}}, \quad H_b = \frac{t}{(\tau^2 + t^2)} - \frac{\alpha}{(\tau^2 + t^2)^{3/2}}, \quad H_c = \frac{t}{(\tau^2 + t^2)}. \quad (93)$$

Здесь параметр τ определяет амплитуду отскока, а α - величина отклонения решения от изотропного случая (см. Рис.3).

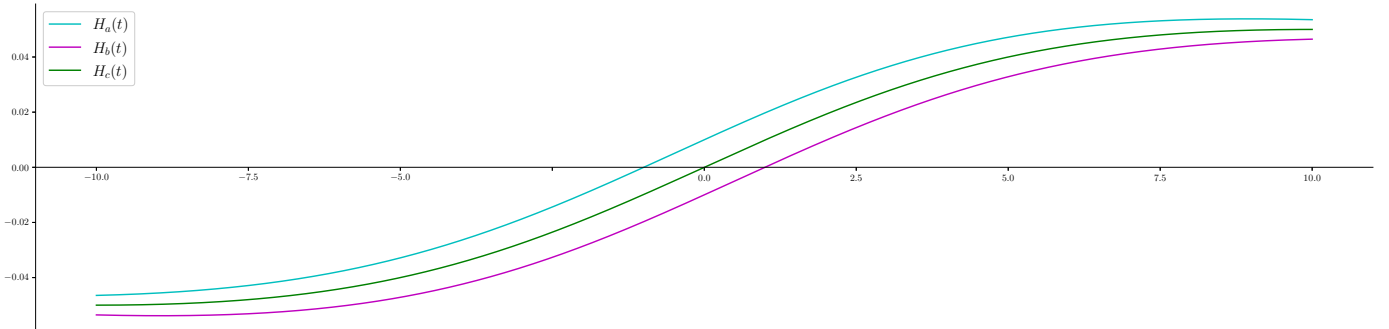


Рис. 3: Параметры Хаббла $H_a(t)$, $H_b(t)$, $H_c(t)$, при выборе $\alpha = 10$, $\tau = 10$. Решение с отскоком характеризуется наличием изгиба в начале координат и стремлением к 0 на $\pm\infty$.

Для анализа стабильности скалярного поля численно был построен график квадрата скорости звука c_s^2 (Рис.4):

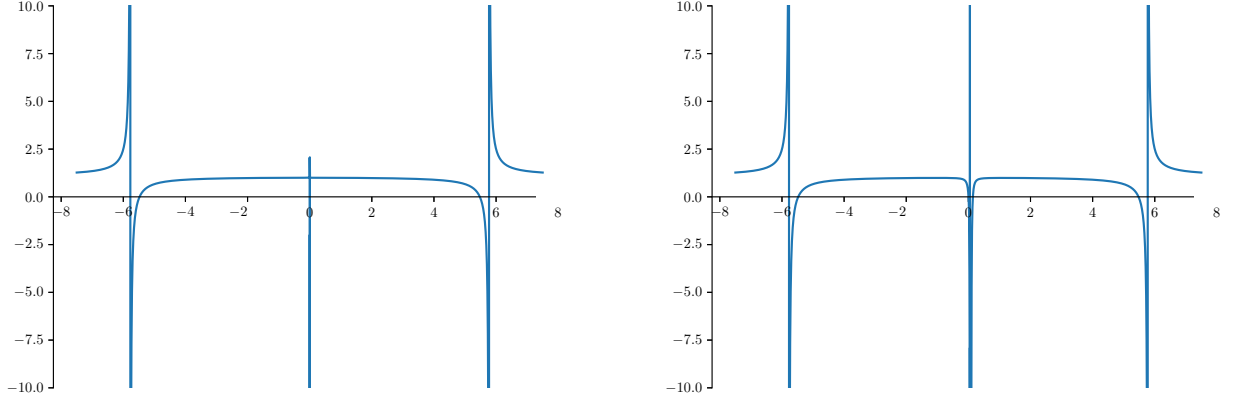


Рис. 4: Квадрат скорости звука c_s^2 , при выборе $\alpha = 0.1, \tau = 10$ (слева) и $\alpha = 1, \tau = 20$ (справа). В этом случае, квадрат скорости звука будет иметь как минимум 2 симметричные сингулярные точки и стремиться к 0 по мере того, как вселенная становится изотропной.

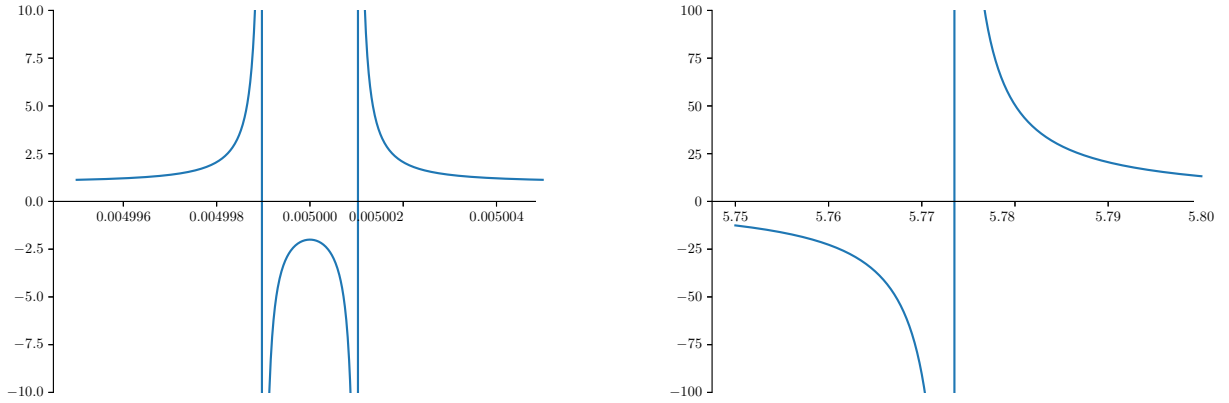


Рис. 5: Приближение окрестности сингулярных точек квадрата скорости звука c_s^2 для параметров $\alpha = 0.1, \tau = 10$.

Графики(5) показывают, что в теории (92) скалярное поле становится неустойчивым даже при небольшом отклонении от изотропного фона. Характер этой неустойчивости можно понять, если посмотреть на графики 6. На них явно видно, что оба коэффициента $\mathcal{F}_S$ и $\mathcal{G}_S$ имеют непостоянные знаки, при этом присутствуют области с градиентной неустойчивостью - между нулями функций, и область с духовой неустойчивостью - где обе функции отрицательные.

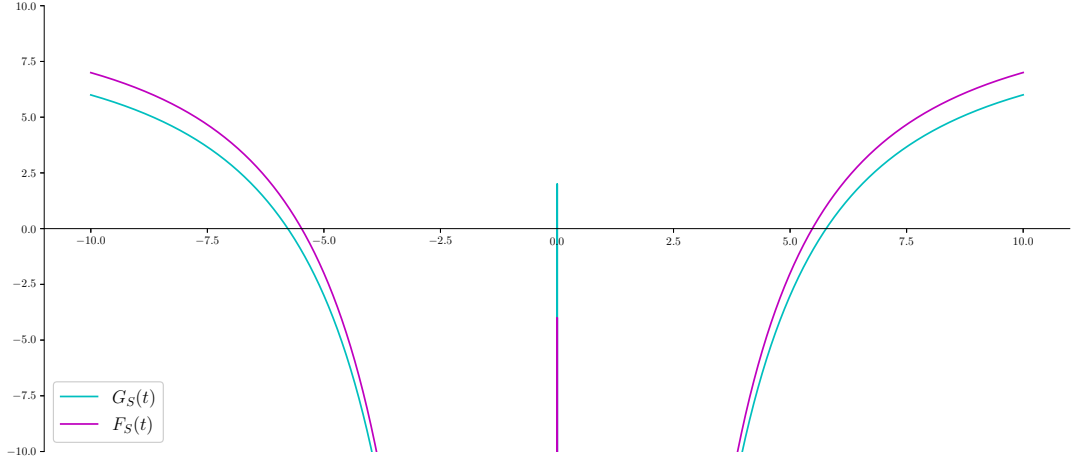


Рис. 6: Графики коэффициентов действия $\mathcal{G}_S$, $\mathcal{F}_S$ для параметров $\alpha = 0.1$, $\tau = 10$.

Основные результаты Главы 2

В данной главе было исследовано влияние космологической анизотропии на устойчивость решений в теории Хорндески. Основное внимание было уделено анализу возмущений над однородным, но анизотропным фоном типа Бьянки I.

Был построен квадратичный лагранжиан для скалярных и тензорных возмущений над указанным фоном. Продемонстрировано, что анизотропия приводит к “расщеплению” коэффициентов действия, известных из изотропного случая, и появлению новых членов, связывающих различные направления. Анализ проводился с использованием калибровочно-инвариантных переменных, обобщающих переменные Бардина на анизотропный случай.

В качестве проверки согласованности был рассмотрен изотропный предел полученного действия для скалярных возмущений, который, как и ожидалось, совпал с результатом, полученным в Главе 1 при анализе изотропного фона.

Ключевым результатом главы стала проверка устойчивости космологического решения с отскоком, построенного в Главе 1 в рамках подкласса теорий с $A_4 = 0$. Напомним, что в изотропном случае для этого решения скалярные возмущения были нединамическими, что обеспечивало формальную устойчивость. Однако, при введении даже малой анизотропии в фон, анализ квадратичного действия для скалярных возмущений показал возникновение как духовых ($\mathcal{G}_S < 0$), так

и градиентных ($\mathcal{F}_S < 0$) неустойчивостей в определенные моменты времени вблизи точки отскока.

Таким образом, сделан вывод, что устойчивость несингулярных решений (типа отскока), достигнутая в Главе 1 за счет выбора $A_4 = 0$ и последующего “вымирания” динамики скалярной моды, является артефактом высокой симметрии изотропного фона. При внесении анизотропии эта стабильность нарушается, указывая на то, что данный механизм обхода запрещающей теоремы неустойчив относительно анизотропных возмущений фона.

3 Скалярно-Векторно-Тензорные теории с высшими производными

Экспериментальные данные о разнице между скоростью гравитационных и электромагнитных волн, полученные из события GW170817 [60], сильно ограничивают применение теории Хорндески/обобщенных галилеонов для космологии позднего времени [60–63]. Стандартный подход к этим экспериментальным ограничениям был чисто прагматическим: воспользоваться общностью теории Хорндески, выбрав четыре скалярных потенциала в действии, чтобы удовлетворить субсветовому характеру гравитона (и другим физически обоснованным условиям в космологических решениях). В данной главе будет продемонстрировано, что отказ от ограничения на неизменность скорости света в ИК-масштабе теории гравитации открывает новые возможности. В частности, будет показано, что могут существовать фотон-галилеонные связи, которые способны объяснить точное постоянство отношения скорости гравитации к скорости света на протяжении всей космической эволюции, при этом без необходимости тонкой настройки потенциалов в действии.

Таким образом, исследование, например, связи фотон-(темная энергия) и, в более широком смысле, связи материя-(темная энергия) – при использовании галилеонных моделей в качестве темной энергии – может представлять собой важный новый подход к экспериментальному поиску перспективных направлений в модифицированной гравитации для космологии позднего времени с помощью различных тестов. В данной главе рассматривается размерная редукция теории

обобщенных галилеонов в пяти измерениях с целью получения широкого класса $U(1)$ калибровочно-инвариантных векторных/мультишкалярных галилеонов в четырехмерном пространстве-времени: а именно, теории с высшими производными $U(1)$ калибровочно-инвариантного вектора и двух скаляров в действии, но с уравнениями движения второго порядка для всех полей. Теории такого типа и ранее получали путем редукции Калуцы-Клейна, например, из теории Гаусса-Бонне в 5D [100, 101], или из теории Лавлока [102]. Однако, поскольку исходной точкой является более общая скалярная модификация теории Лавлока в 5D, обладающая высшими производными в действии, но при этом уравнения движения остаются второго порядка (обобщенные галилеоны), можно получить более широкий класс векторно-скалярных связей в 4D, при этом уравнения движения второго порядка сохраняются. Действительно, поскольку метрика 5D подчиняется уравнениям второго порядка, ее компоненты (четырёхмерная метрика, вектор и дилатон) также подчиняются уравнениям второго порядка, как и галилеон, по построению. Задача систематического построения таких калибровочно-инвариантных векторных галилеонов и лагранжианов Эйнштейна-Максвелла сложна с других точек зрения [74—78], и отсюда интерес использовать размерную редукцию в качестве инструмента для расширения пространства возможных векторно-скалярных взаимодействий при сохранении калибровочной инвариантности и избегании духа Остроградского. Мы, тем не менее, не стремимся ни к общности, ни к полной классификации, а делаем акцент на этих теориях с тем интересом, что, во-первых, их подкласс, как выяснилось, приводит к гравитону, распространяющемуся со скоростью света, в четырёхмерии (для произвольных скалярных потенциалов и неминимальной связи с гравитацией); и во-вторых, потому что имеют связь с теориями более высоких размерностей¹. В некоторых случаях они могут быть более простыми для анализа, например, при поиске решений Черной дыры в четырехмерном пространстве [102, 108]. (См., например, связь ковариантных галилеонов в произвольной размерности D [109] - частный случай нашей отправной точки, обобщенных галилеонов в 5D - с теорией Лавлока в еще более высоких измерениях $D + N$ с помощью диагональных

¹Дополнительный интерес в этом отношении проистекает из самого происхождения галилеонов, которые были вдохновлены эффективной теорией DGP модели [103] и дальнейшими связями с теориями более высоких размерностей [104—106], а также с теорией струн [107]

компактификаций Калуцы-Клейна [104]). Кроме того, векторные поля давно изучаются в космологическом контексте [79—81], и поэтому последовательное объединение со скалярными модификациями гравитации — не вызывая духов и сохраняя калибровочную инвариантность — может открыть новые перспективы.

3.1 Редукция теории обобщенных галилеонов в пятимерном пространстве

Рассмотрим пятимерное псевдо-риманово многообразие M_5 . Величины, определенные на M_5 , обозначаются с помощью шапочек, $\hat{x}$. Заглавные латинские индексы пробегает пять значений, $A = 0, 1, 2, 3, 4$, в то время как строчные греческие только четыре, $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Мы предполагаем, что M_5 является прямым произведением некоторого четырехмерного псевдо-риманового многообразия M_4 и окружности S^1 , то есть $M_5 = M_4 \times S^1$. Такая факторизация позволяет нам раскладывать поля на M_5 в ряд Фурье по дополнительной координате x_4 . В частности:

$$\rho = \sum_n \rho_n e^{inx_4}, \quad (94)$$

где ρ подразумевает любое поле на M_5 , а коэффициенты ρ_n — функции координаты x^μ на M_4 . В случае, если в разложении будут присутствовать слагаемые помимо ρ_0 , поля определенные на M_5 после редукции будут порождать бесконечное число массивных полей на M_4 . Во избежание этого накладывается условие независимости всех величин от координаты x_4 , таким образом, любое $\rho = \rho(x^\mu)$.

Запишем явно анзац для пятимерной метрики:

$$\hat{g}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} - \phi^2 A_\mu A_\nu & \phi^2 A_\mu \\ \phi^2 A_\nu & -\phi^2 \end{pmatrix}, \quad (95)$$

и обратная к ней

$$\hat{g}^{MN} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & g^{\mu\nu} A_\nu \\ g^{\mu\nu} A_\mu & A_\mu A^\mu - \frac{1}{\phi^2} \end{pmatrix}, \quad (96)$$

здесь $g_{\mu\nu}$ — метрика на M_4 , A_μ — четыре-вектор, а ϕ — скалярное поле.

Рассмотрим обобщенные галилеоны, сформулированные в пятимерном пространстве-времени. Рассматриваемая ранее теория Хорндески является четырехмерной теорией обобщенных галилеонов, в пяти измерениях появляется воз-

можность добавить еще один вклад в действие. Теория обобщенных галилеонов сформулирована для произвольной размерности D и описывается лагранжианом следующего вида [110]:

$$\mathcal{L}_n^{\text{cov}}\{f\} = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \mathcal{C}_{n,p} \mathcal{L}_{n,p}\{f\},$$

где $\mathcal{C}_{n,p} = \left(-\frac{1}{8}\right)^p \frac{n!}{(n-2p)!p!},$ (97)

а слагаемые $\mathcal{L}_{n,p}\{f\}$ строятся следующим образом:

$$\mathcal{L}_{n,p}\{f\} = \mathcal{P}_{(p)}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n} \mathcal{R}_{(p)} \mathcal{S}_{(q\equiv n-2p)}, \quad (98a)$$

$$\text{где } \mathcal{P}_{(p)}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n} = \int_{X_0}^X dX_1 \int_{X_0}^{X_1} dX_2 \cdots \int_{X_0}^{X_{p-1}} dX_p \mathcal{T}_{(2n)}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(\pi, X_1), \quad (98b)$$

$$\mathcal{T}_{(2n)}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(\pi, X) = \frac{f(\pi, X)}{(D-m)!} \varepsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{D-n}} \times \varepsilon_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{D-n}}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}, \quad (98c)$$

$$\mathcal{R}_{(p)} \equiv \prod_{i=1}^p R_{\mu_{2i-1}\mu_{2i}\nu_{2i-1}\nu_{2i}}, \quad (98d)$$

$$\mathcal{S}_{(q\equiv n-2p)} \equiv \prod_{i=0}^{q-1} \pi_{\mu_{n-i}\nu_{n-i}}, \quad (98e)$$

для того, чтобы лагранжиан не занулялся требуется, чтобы $n \leq D+1$. Используя формулы (97) и (98) выпишем явно действие для обобщенных галилеонов в пятимерном пространстве-времени:

$$S = \int d^5x \sqrt{\hat{g}} (\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_6), \quad (99a)$$

$$\mathcal{L}_2 = F(\pi, X), \quad (99b)$$

$$\mathcal{L}_3 = K(\pi, X) \hat{\square} \pi, \quad (99c)$$

$$\mathcal{L}_4 = -G_4(\pi, X) \hat{R} + 2G_{4X}(\pi, X) \left[\left(\hat{\square} \pi \right)^2 - \pi_{;MN} \pi^{;MN} \right], \quad (99d)$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\pi, X) \hat{G}^{MN} \pi_{;MN} + \frac{1}{3} G_{5X} \left[\left(\hat{\square} \pi \right)^3 - 3 \hat{\square} \pi \pi_{;MN} \pi^{;MN} + 2 \pi_{;MN} \pi^{;MP} \pi_{;P}^N \right], \quad (99e)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6 = & \frac{3}{4} G_6 \left(\hat{R}^2 - 4 \hat{R}^{AB} \hat{R}_{AB} + \hat{R}^{ABCD} \hat{R}_{ABCD} \right) + 3 G_{6X} \left(-\hat{R} \left(\left(\hat{\square} \pi \right)^2 - \pi^{;AB} \pi_{;AB} \right) \right. \\ & + 4 \hat{R}^{AB} \hat{\square} \pi \pi_{;AB} - 4 \hat{R}^{AB} \pi_{;A}^C \pi_{;CB} - 2 \hat{R}^{ABCD} \pi_{;AC} \pi_{;BD} \Big) + G_{6XX} \left(\left(\hat{\square} \pi \right)^4 \right. \\ & \left. - 6 \pi^{;AB} \pi_{;AB} \left(\hat{\square} \pi \right)^2 + 8 \hat{\square} \pi \pi^{;AB} \pi_{;B}^C \pi_{;CA} + 3 \left(\pi^{;AB} \pi_{;AB} \right)^2 - 6 \pi^{;AB} \pi_{;B}^C \pi_{;C}^D \pi_{;DA} \right), \end{aligned} \quad (99f)$$

Данная теория инвариантна относительно 5-мерных малых диффеоморфизмов

$$x^M \rightarrow x^M + \xi^M, \quad (100)$$

но при проведении процедуры редукции (наложении цилиндрического условия и интегрирования по координате x^4) инвариантность относительно пятимерного диффеоморфизма переходит в инвариантность относительно четырехмерного диффеоморфизма и калибровочного преобразования векторного поля A_μ . Таким образом все поля при сдвиге (100) преобразуются следующим образом:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \partial_\alpha g_{\mu\nu} \xi^\alpha + \partial_\mu \xi^\alpha g_{\nu\alpha} + \partial_\nu \xi^\alpha g_{\mu\alpha}, \quad (101a)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \xi^\alpha \partial_\alpha A_\mu + A_\alpha \partial_\mu \xi^\alpha + \partial_\mu \xi^\alpha, \quad (101b)$$

$$\phi \rightarrow \phi + \xi^\alpha \partial_\alpha \phi, \quad (101c)$$

$$\pi \rightarrow \pi + \xi^\alpha \partial_\alpha \pi, \quad (101d)$$

где $\xi^\mu = (\xi_0, \xi_T^i + \delta^{ij} \partial_j \xi_S)^T$. Т.к. поле галилеона π является скаляром относительно пятимерных малых сдвигов, то преобразуется аналогично полю ϕ .

В результате подстановки метрики (95) и применения всех необходимых условий действие (99) интегрируется по координате x^4 , результатом чего является

мультипликативная константа, равная длине окружности S^1 . В дальнейшем, для краткости, поля переопределяются таким образом, чтобы данная константа была равна 1. Соответственно, теорию пятимерных галилеонов можно записать как четырехмерную теорию (явные выражения для всех необходимых сверток могут быть найдены в приложении С) с действием:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \phi (\mathcal{L}_\pi + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_A) , \quad (102)$$

где $\mathcal{L}_\pi$ принимает форму (99), но без шапочек, т.е. все величины и производные вычисляются по четырехмерной метрике $g_{\mu\nu}$. Другими словами, $\mathcal{L}_\pi$ принимает вид обычного лагранжиана для обобщенных галилеонов в четырех измерениях, но с добавлением слагаемых пропорциональных G_6 и ее производным. Однако известно, что теория Хорндески является наиболее общей скалярно-тензорной теорией гравитации с уравнениями движения второго порядка, а значит путем переопределения функций лагранжиана можно избавиться от слагаемых типа G_6 . Действительно, если сделать следующее переопределение скалярных потенциалов

$$\begin{aligned} F \rightarrow \hat{F} + \frac{3}{2}X^2 \int (G_{6\pi\pi\pi\pi}X^{-1} + 2G_{6X\pi\pi\pi\pi}) dX - \frac{9}{2}G_{6\pi\pi\pi\pi}X^2 \\ + \frac{3}{2}X \int G_{6X\pi\pi\pi\pi}X dX, \end{aligned} \quad (103a)$$

$$K \rightarrow \hat{K} + \frac{9}{2}X \int (G_{6\pi\pi\pi}X^{-1} + 2G_{6X\pi\pi\pi}) dX - \frac{21}{2}XG_{6\pi\pi\pi} + \frac{3}{2} \int XG_{6X\pi\pi\pi} dX, \quad (103b)$$

$$G_4 \rightarrow \hat{G}_4 + \frac{3}{2}X \int (G_{6\pi\pi}X^{-1} + 2G_{6\pi\pi X}) dX - 3G_{6\pi\pi}X, \quad (103c)$$

$$G_5 \rightarrow \hat{G}_5 + 3 \int (G_{6\pi}X^{-1} + 2G_{6\pi X}) dX, \quad (103d)$$

лагранжиан $\mathcal{L}_\pi$ будет переписан как четырехмерная теория Хорндески, но с четырьмя потенциалами $\hat{F}$, $\hat{K}$, $\hat{G}_4$, $\hat{G}_5$.

В свою очередь $\mathcal{L}_\phi$ и $\mathcal{L}_A$ равны:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\phi = & \frac{1}{\phi} K \phi^{;\alpha} \pi_{;\alpha} + \frac{2}{\phi} G_4 (\Box \phi) + \frac{4}{\phi} G_{4X} (\Box \pi) \phi^{;\alpha} \pi_{;\alpha} + \frac{1}{\phi} G_5 ((\Box \phi) (\Box \pi) - \phi^{;\alpha\beta} \pi_{;\alpha\beta}) \\
& - \frac{1}{2\phi} G_5 R \phi^{;\alpha} \pi_{;\alpha} + \frac{1}{\phi} G_{5X} \phi^{;\alpha} \pi_{;\alpha} \left((\Box \pi)^2 - \pi_{;\alpha\beta} \pi^{;\alpha\beta} \right) + \frac{6}{\phi} G_6 G^{\alpha\beta} \phi_{;\alpha\beta} \\
& + \frac{4}{\phi} G_{6XX} \phi^{;\alpha} \pi_{;\alpha} \left((\Box \pi)^3 - (\Box \pi) \pi_{;\alpha\beta} \pi^{;\alpha\beta} + 2 \pi_{;\alpha\beta} \pi^{;\beta\gamma} \pi^{;\gamma\alpha} \right) \\
& + \frac{6}{\phi} G_{6X} \left((\Box \phi) (\Box \pi)^2 - (\Box \phi) \pi_{;\alpha\beta} \pi^{;\alpha\beta} - 2 (\Box \pi) \phi^{;\alpha\beta} \pi_{;\alpha\beta} \right) \\
& + \frac{12}{\phi} G_{6X} G^{\alpha\beta} \pi_{;\alpha\beta} \phi^{;\gamma} \pi_{;\gamma} + \frac{12}{\phi} G_{6X} \phi^{;\alpha\beta} \pi_{;\beta\gamma} \pi^{;\gamma\alpha}, \tag{104}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{4A} = \frac{\phi^2}{4} G_4 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - 2\phi^2 G_{4X} F_{\alpha\gamma} F^{\alpha\beta} \pi^{;\beta} \pi^{;\gamma}, \tag{105a}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{5A} = & G_5 \phi^2 \left(\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} F_{\alpha}{}^{\gamma} \pi_{;\beta\gamma} - \frac{1}{8} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \Box \pi + \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \nabla^{\gamma} F_{\alpha\gamma} \pi_{;\beta} \right) \\
& + G_5 \phi^2 \left(\frac{3}{2\phi} F^{\alpha\beta} F_{\alpha}{}^{\gamma} \phi_{;\beta} \pi_{;\gamma} - \frac{3}{8\phi} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \phi^{;\gamma} \pi_{;\gamma} \right) \\
& + G_{5X} \phi^2 \left(\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} F_{\alpha}{}^{\gamma} (\Box \pi) \pi_{;\beta} \pi_{;\gamma} - \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} F^{\gamma\delta} \pi_{;\alpha\gamma} \pi_{;\beta} \pi_{;\delta} \right), \tag{105b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{6A} = & G_6 \phi^2 \left(\frac{3}{8} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} R - \frac{9}{4\phi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} (\Box\phi) + \frac{9\phi^2}{64} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F^{\alpha\beta} F^{\gamma\delta} + 3F_{\alpha\beta} F_{\gamma}{}^{\alpha} R^{\gamma\beta} \right. \\
& - \frac{9}{2\phi} F_{\alpha\beta} F_{\gamma}{}^{\alpha} \phi^{;\gamma\beta} - \frac{9\phi^2}{32} F_{\alpha\beta} F_{\gamma}{}^{\alpha} F_{\delta}{}^{\beta} F^{\gamma\delta} - \frac{9}{\phi^2} F_{\alpha\beta} F_{\gamma}{}^{\alpha} \phi^{;\beta} \phi^{;\gamma} - \frac{9}{\phi} F_{\alpha}{}^{\beta} \nabla^{\gamma} F_{\beta\gamma} \phi^{;\alpha} \\
& + \frac{3}{2} \nabla^{\alpha} F_{\alpha\beta} \nabla^{\gamma} F_{\gamma}{}^{\beta} + \frac{9}{4} R^{\alpha\gamma\beta\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} - \frac{3}{\phi} F^{\alpha\beta} \nabla^{\gamma} F_{\alpha\beta} \phi_{;\gamma} + \frac{3}{\phi} F_{\alpha}{}^{\beta} \nabla^{\alpha} F_{\beta\gamma} \phi^{;\gamma} \\
& - \frac{9}{2\phi^2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \phi_{;\gamma} \phi^{;\gamma} - \frac{15}{16} \nabla^{\alpha} F_{\beta\gamma} \nabla_{\alpha} F^{\beta\gamma} + \frac{3}{8} \nabla^{\alpha} F_{\beta\gamma} \nabla^{\beta} F_{\alpha}{}^{\gamma} \Big) \\
& + G_{6X} \phi^2 \left(-\frac{3}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} (\Box\pi)^2 - \frac{9}{2\phi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} (\Box\pi) \phi^{;\gamma} \pi_{;\gamma} + \frac{3}{2} R F_{\alpha\beta} F_{\gamma}{}^{\alpha} \pi^{;\beta} \pi^{;\gamma} \right. \\
& + \frac{3}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \pi_{;\gamma\delta} \pi^{;\gamma\delta} + \frac{9\phi^2}{8} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F_{\gamma}{}^{\alpha} F^{\gamma\delta} \pi^{;\beta} \pi^{;f} - 6F_{\alpha\beta} F_{\gamma}{}^{\alpha} (\Box\pi) \pi^{;\gamma\beta} \\
& - \frac{9}{\phi} F_{\alpha\beta} F_{\gamma}{}^{\alpha} \pi^{;\gamma\beta} \phi^{;\delta} \pi_{;\delta} - \frac{18}{\phi} F_{\alpha\beta} F_{\gamma}{}^{\alpha} (\Box\pi) \phi^{;\gamma} \pi^{;\beta} - 6F_{\alpha}{}^{\beta} (\Box\pi) \nabla^{\gamma} F_{\beta\gamma} \pi^{;\alpha} \\
& + 6F_{\alpha\beta} F_{\gamma}{}^{\alpha} \nabla^{\gamma} \pi_{;\delta} \pi^{;\beta\delta} + 3F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} R^{\alpha\gamma} \pi^{;\beta} \pi^{;\delta} - \frac{9\phi^2}{4} F_{\alpha\beta} F_{\gamma}{}^{\alpha} F_{\delta}{}^{\beta} F_{\gamma}{}^{\delta} \pi^{;\delta} \pi^{;f} \\
& - \frac{18}{\phi} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \pi^{;\alpha\gamma} \phi^{;\beta} \pi^{;\delta} + 6F_{\alpha\beta} \nabla^{\gamma} F_{\gamma\delta} \pi^{;\alpha\delta} \pi^{;\beta} - \frac{9}{2} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \pi^{;\alpha\gamma} \pi^{;\beta\delta} \\
& + 6F_{\alpha}{}^{\beta} \nabla^{\gamma} F_{\beta\delta} \pi_{;\gamma}{}^{\delta} \pi^{;\alpha} + \frac{18}{\phi} F_{\alpha\beta} F_{\gamma}{}^{\alpha} \pi^{;\gamma\delta} \phi_{;\delta} \pi^{;\beta} \Big) \\
& - 3\phi^2 G_{6XX} \left(F_{\alpha\beta} F_{\gamma}{}^{\alpha} \pi^{;\beta} \pi^{;\gamma} (\Box\pi)^2 + 2F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} (\Box\pi) \pi^{;\alpha\gamma} \pi^{;\beta} \pi^{;\delta} \right. \\
& \left. - F_{\alpha\beta} F_{\gamma}{}^{\alpha} \pi_{;\delta\kappa} \pi^{;\delta\kappa} \pi^{;\beta} \pi^{;\gamma} - 2F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \pi_{;\alpha}{}^{\kappa} \pi_{;\kappa}{}^{\gamma} \pi^{;\beta} \pi^{;\delta} \right), \tag{105c}
\end{aligned}$$

здесь и далее $F_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha} A_{\beta} - \nabla_{\beta} A_{\alpha}$.

Теорию, описываемую лагранжианами (105), можно назвать вариантом теории векторных галилеонов, поскольку она включает в себя старшие производные от векторного поля A^{μ} , уравнения движения при этом имеют второй порядок. Попытки построить такую теорию предпринимал еще сам Хорндески в своей работе [111], однако для теории в 4D, а позднее было показано, что и в любой размерности [76], невозможно построить теорию квадратичную по производным напряженности векторного поля, которая давала бы уравнения поля второго порядка. Тем не менее были построены обобщения теории Прока [112], которые не имеют калибровочной симметрии, и активно ведется работа по разработке векторно-тензорных моделей различными методами [77, 113, 114]. За счет наличия нетривиальной связи с производными двух скалярных полей - π и ϕ - наша теория имеет возможность сохранить калибровочную $U(1)$ -симметрию, и

расширить при этом круг возможных взаимодействий, которые в дальнейшем можно будет использовать для рассмотрения моделей темной энергии.

3.2 Возмущения СВТ-теории над космологическим фоном

Запишем возмущенную метрику и 4-вектор следующим образом

$$ds^2 = (g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu, \quad (106a)$$

$$A^\mu = A^{(0)\mu} + \delta A^\mu, \quad (106b)$$

в то время как галилеон $\pi(x^\mu)$ и дилатон $\phi(x^\mu)$ расщепляются как $\pi(t) + \delta\pi(x^\mu)$ и $\phi(t) + \delta\phi(x^\mu)$ соответственно, а π и ϕ будут пониматься как фоновые поля.

Фоновая, пространственно плоская метрика Фридмана записывается как обычно

$$ds^2 = h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (107)$$

где $a(t)$ - масштабный фактор. В свою очередь, векторный фон $A^{(0)i}$ выбирается тождественно нулевым в следствии изотропии, а компонента $A^{(0)0}$ также обнуляется на уравнениях движения. Остальные фоновые уравнения движения можно найти в приложении D.

Разложение возмущений $h_{\mu\nu}, \delta A^\mu, \delta\pi$ и $\delta\phi$ на компоненты по спиральности в общем случае имеет вид

$$h_{00} = 2\Phi \quad (108a)$$

$$h_{0i} = -\partial_i\beta + Z_i^T, \quad (108b)$$

$$h_{ij} = -2\Psi\delta_{ij} - 2\partial_i\partial_j E - (\partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T) + h_{ij}^T, \quad (108c)$$

$$\delta A_0 = \gamma, \quad (108d)$$

$$\delta A_i = \partial_i\alpha + A_i, \quad (108e)$$

$$\delta\pi = \chi, \quad (108f)$$

$$\delta\phi = \varphi, \quad (108g)$$

где $\Phi, \beta, \Psi, E, \chi, \varphi, \alpha, \gamma$ - скалярные поля, Z_i^T, W_i^T, A_i - поперечные векторные поля ($\partial_i Z_i^T = \partial_i W_i^T = \partial_i A_i = 0$), h_{ij}^T - поперечные бесследовый тензор.

Разложим до второго порядка действие (102) и получим в тензорном секторе

следующее квадратичное действие

$$S_{tensor}^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \phi \left[\mathcal{G}_\tau (\dot{h}_{ij})^2 - \frac{\mathcal{F}_\tau}{a^2} (\vec{\nabla} h_{ij})^2 \right], \quad (109)$$

где $\mathcal{G}_\tau$ и $\mathcal{F}_\tau$ – комбинации функций лагранжиана, их производных и фоновых полей $\pi(t)$, $\phi(t)$, a . Явные выражения для них можно найти в приложении Е. С точностью до слагаемых, содержащих $H_\phi = \frac{\dot{\phi}}{\phi}$, они совпадают с обычной теорией Хорндески.

Напомним, что квадрат скорости распространения тензорных мод

$$c_g^2 = \frac{\mathcal{F}_\tau}{\mathcal{G}_\tau}, \quad (110)$$

отличен от единицы в теории Хорндески даже если $H_\phi = 0$. Например, в случае $H_\phi = 0$ и нулевого скалярного потенциала G_5 скорость принимает хорошо известную² форму с $A_2 = 2G_4$ и $A_5 = 4(G_4 - 2\dot{\pi}^2 G_{4X})$. Таким образом, только если G_4 является только функцией π - но не X - скорость гравитона может быть в точности равна единице. Иными словами, поскольку в теориях Хорндески, где фотон является минимально связанным, скорость света постоянна и равна $c_A^2 = 1$ в наших единицах, эти теории оказываются сильно ограниченными экспериментальными данными [63],

$$\left| \frac{c_g}{c_A} - 1 \right| \leq 5 \times 10^{-16}. \quad (111)$$

Способ обойти это строгое ограничение – рассмотреть теорию Хорндески, дополненную фотон-скалярными взаимодействиями, показанными в действии (105) для произвольных скалярных потенциалов $G_4(\pi, X)$ и $G_5(\pi)$. В этих случаях, даже при ненулевом H_ϕ , скорость фотона меняется со временем точно так же, как и скорость гравитона, так что отношение $\frac{c_g}{c_A} = 1$ сохраняется на протяжении всей космологической эволюции. Перейдем теперь к рассмотрению векторного сектора возмущений.

3.3 Векторный сектор

Заметим, что комбинация

$$V_i = \dot{W}_i - 2HW_i + Z_i$$

²Напомним, что скалярный потенциал G_6 может быть полностью поглощен (103)

является калибровочно-инвариантной под действием преобразований

$$Z_i \rightarrow Z_i - a^2 \xi_T^i, \quad (112a)$$

$$W_i \rightarrow W_i + a^2 \xi_T^i, \quad (112b)$$

получаемых из (101a), и разложив до второго порядка действие (102) с (106a)-(108), векторный сектор возмущений можно записать как

$$\delta S_{vector}^2 = \int dt d^3x a^3 \phi \left(\frac{\phi^2}{a^2} \left(\mathcal{G}_V \left(\dot{A}^i \right)^2 + \frac{\mathcal{F}_V}{a^2} \left(\vec{\nabla} A^i \right)^2 \right) + \frac{\mathcal{K}}{a^2} \left(\vec{\nabla} V^i \right)^2 \right), \quad (113)$$

где, как и ранее, $\mathcal{G}_V$, $\mathcal{F}_V$, $\mathcal{K}$ – комбинации функций лагранжиана и их производных, а также фоновых полей теории. Их также можно найти в приложении Е.

Из (113) следует, что векторные возмущения метрики $\vec{V}$ и векторные возмущения четырех-вектора A^μ не связаны между собой. Тот факт, что первое является нединамическим, позволяет записать конечное действие для векторных мод в виде:

$$\delta S_{vector}^2 = \int dt d^3x a \phi^3 \left(\mathcal{G}_V \left(\dot{A}^i \right)^2 + \frac{\mathcal{F}_V}{a^2} \left(\vec{\nabla} A^i \right)^2 \right), \quad (114)$$

так, что они распространяются с квадратом скорости

$$c_A^2 = \frac{\mathcal{F}_V}{\mathcal{G}_V}. \quad (115)$$

Как упоминалось ранее, для теорий (102) с произвольными скалярными потенциалами $F(\pi, X)$, $K(\pi, X)$, $G_4(\pi, X)$ и $G_5(\pi)$, можно заметить, что:

$$\mathcal{G}_V = \mathcal{G}_\tau \quad \mathcal{F}_V = \mathcal{F}_\tau \quad (116)$$

и, таким образом, скорость гравитона и 4-вектора одинакова на протяжении всей космологической эволюции $\frac{c_g}{c_A} = 1$. Теперь, при условии экспериментальных ограничений, которые устанавливают скорость гравитационных волн очень близко к скорости света, разумно — по крайней мере, в этих случаях — отождествить 4-вектор с фотоном.

Стоит отметить, что в недавней работе [115] установлено, что, по крайней мере, на космологическом фоне, расширение теории Хорндески с помощью скалярно-векторного взаимодействия типа (105a) может быть воспроизведено

дисформными преобразованиями уже известных Расширенных теорий Хорндески (beyond Horndeski) с минимальной связью с фотоном. Более того, последние исследования показывают, что это отождествление не нарушается и в случае неоднородных фонов [116].

3.4 О Вайнштейновском экранировании модификаций вблизи источников

Общепринятой практикой в ИК-модификациях ОТО (общей теории относительности), и в частности в теории Хорндески, является отождествление тензорных мод возмущений космологического фона с гравитоном ОТО. Это отождествление явно мотивировано, во-первых, двумя распространяющимися поляризациями, а во-вторых, тем, что модификации ОТО, обусловленные скаляром Хорндески, могут быть экранированы в тестах Солнечной системы. Одной из самых старых идей является механизм Вайнштейна – механизм, первоначально открытый в контексте массивной гравитации [117] (обзор см. в [118]). Задача этого механизма – экранировать эффекты, которые могут возникать при взаимодействии метрики с полем галилеона, но отсутствуют в наблюдениях в масштабах Солнечной системы.

Простейшей нетривиальной моделью, демонстрирующей механизм Вайнштейна, является кубическая модель галилеона [119]:

$$\mathcal{L} = -3(\partial\phi)^2 - \frac{1}{\Lambda^3}\Box\phi(\partial\phi)^2 + \frac{g}{M_{\text{Pl}}}\phi T^\mu_\mu, \quad (117)$$

где $g \sim \mathcal{O}(1)$ для гравитационной связи, а Λ - масштаб сильной связи теории (необычная нормировка кинетического члена для удобства выбрана так, чтобы предел расщепления в модели DGP соответствовал в точности $g = 1$). Уравнение движения по полю ϕ тогда имеет вид:

$$6\Box\phi + \frac{2}{\Lambda^3}\left((\Box\phi)^2 - (\partial_\mu\partial_\nu\phi)^2\right) = -\frac{g}{M_{\text{Pl}}}T^\mu_\mu. \quad (118)$$

Рассмотрим поведение теории галилеонов и возникновение экранирования Вайнштейна вблизи статического точечного источника массы M , такого что $T^\mu_\mu = -M\delta^{(3)}(x^i)$. Если предположить, что поле статичное и сферически-симметричное

($\phi = \phi(r)$), то (118) сводится к

$$\vec{\nabla} \cdot \left(6\vec{\nabla}\phi + \hat{r} \frac{4}{\Lambda^3} \frac{(\vec{\nabla}\phi)^2}{r} \right) = \frac{gM}{M_{\text{Pl}}} \delta^{(3)}(\vec{x}). \quad (119)$$

Интегрирование этого уравнения по сфере с центром в начале координат дает следующее выражение:

$$6\phi' + \frac{4}{\Lambda^3} \frac{\phi'^2}{r} = \frac{gM}{4\pi r^2 M_{\text{Pl}}} \quad (120)$$

Теперь это уравнение алгебраическое по ϕ' , и поэтому разрешимо в радикалах. Сосредоточимся на ветви, для которой $\phi' \rightarrow 0$ на пространственной бесконечности (другая ветвь асимптотически совпадает с самоускоряющимся решением и имеет неустойчивые (духовые) возмущения),

$$\phi'(r) = \frac{3\Lambda^3 r}{4} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{9\pi} \left(\frac{r_V}{r} \right)^3} \right), \quad (121)$$

где r_V – радиус Вайнштейна,

$$r_V \equiv \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{gM}{M_{\text{Pl}}} \right)^{1/3}. \quad (122)$$

Рассмотрим два режима поведения ϕ' в зависимости от расстояния до источника:

- $r \gg r_V$: Вдали от источника решение ведет себя $\sim 1/r^2$

$$\phi'(r \gg r_V) \simeq \frac{g}{3} \cdot \frac{M}{8\pi M_{\text{Pl}} r^2}, \quad (123)$$

что совпадает с поведением гравитационного потенциала в ОТО в пространстве Минковского:

$$\Psi' = \frac{1}{8\pi g M_{\text{Pl}}} \frac{M}{r^2} \quad (124)$$

с точностью до константы $g^2/3$.

- $r \ll r_V$: Вблизи источника решение сводится к

$$\phi'(r \ll r_V) \simeq \frac{\Lambda^3 r_V}{2} \sqrt{\frac{r_V}{r}} \sim \frac{1}{\sqrt{r}}, \quad (125)$$

и тогда

$$\left. \frac{\phi'(r)}{\Psi'(r)} \right|_{r \ll r_V} \sim \left(\frac{r}{r_V} \right)^{3/2} \ll 1, \quad (126)$$

поэтому действие скалярного поля оказывается сильно подавленным на расстояниях, значительно меньших вайнштейновского радиуса.

Следовательно, можно заключить, что вблизи массивных объектов (например, звезд) градиенты (производные) скалярного поля становятся достаточно большими, чтобы нелинейные члены в уравнениях движения скалярного поля доминировали над линейными членами. Эти доминирующие нелинейные самодействия эффективно подавляют связь скалярного поля с материей внутри радиуса Вайнштейна, r_V . В результате, внутри радиуса Вайнштейна действие скалярного потенциала ослабевает, и предсказания теории приближаются к предсказаниям ОТО, обеспечивая согласие с наблюдениями. На больших (космологических) масштабах нелинейные эффекты слабы, и скалярное поле может влиять на расширение Вселенной.

Аналогичную процедуру можно провести и в случае теории Хорндески [120]. Для этого рассматривается теория Хорндески на фоне пространства Минковского с метрикой $\eta_{\mu\nu}$ с постоянным фоновым полем π_0 и изучаются возмущения вокруг этого фона:

$$\pi = \pi_0 + \chi, \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (127)$$

Отличительной особенностью механизма Вайнштейна является то, что взаимодействия между производными скалярного поля достаточно, чтобы контролировать его поведение вокруг источника и экранировать его воздействие. Поэтому, чтобы явно получить эти вершины взаимодействия и реализовать механизм Вайнштейна, потребуем, чтобы скаляр не взаимодействовал напрямую с источником, оставляя возможность взаимодействия с материей через смешивание с гравитацией. Для этого требуется, чтобы действие скалярных возмущений удовлетворяло галилеевой симметрии $\chi \rightarrow \chi + c + b_\mu x^\mu$. Данная симметрия предотвращает прямое взаимодействие между полем χ и тензором энергии-импульса. Более того, симметрия не допускает наличия потенциала для скалярного поля χ или взаимодействия между первыми производными χ и самим χ .

Для получения необходимого эффективного действия применяется разложение действия теории Хорндески в терминах возмущений (127) на основе следующих предположений: поля χ и $h_{\mu\nu}$ считаются малыми, вследствие чего взаимодействия высшего порядка, содержащие тензорные возмущения $h_{\mu\nu}$, а также члены, содержащие только старшие степени скалярного поля χ и его первых производных, опускаются. При этом сохраняются все члены с производными второго

порядка от χ , которые обеспечивают галилееву симметрию и необходимые самодействия для реализации вайнштейновского механизма экранирования. Иными словами, необходимо разложить в ряд Тейлора функции F, K, G_4, G_5 до первого порядка по величинам X и π , считая, что $K(\pi_0) = K_\pi(\pi_0) = 0, G_4(\pi_0, 0) = 1/2$, а тензоры кривизны $G_{\mu\nu}$ и R - до первого и второго порядка по $h_{\mu\nu}$, соответственно. Предполагается, что все высшие производные этих функций подавлены, чтобы получить эффективное действие, сохраняющее галилееву симметрию. В результате данного разложения схематически получаются следующие члены:

$$(\partial h)^2, \quad (\partial \chi)^2, \quad (\partial \chi)^2 (\partial^2 \chi)^n, \quad h (\partial^2 \chi)^n. \quad (128)$$

Дальнейший анализ эффективной теории показывает возможность экранирования скаляра теории Хорндески в экспериментах в масштабе солнечной системы, детали см. в [38, 120].

Исходя из вышесказанного, есть аналогичные основания попытаться идентифицировать как фотон наш $U(1)$ -калибровочно инвариантный вектор (обсуждавшиеся ранее вклады $\mathcal{L}_{4A}$ и $\mathcal{L}_{5A}$), связанный со скаляром Хорндески. Если предположить, что модифицированный гравитон распространяется со скоростью света, то теории $\mathcal{L}_{4A}, \mathcal{L}_{5A}$ расширяют пространство допустимых теорий с точки зрения тестов на скорость. Это касается только класса Хорндески^{3, 4}. Теперь важной проблемой является то, как согласовать ИК-скалярную модификацию фотона с максвелловской электродинамикой и лабораторными тестами.

Легко видеть, что тот же Вайнштейновский механизм экранирования действует и в случае теории Хорндески с неминимальной скалярной связью с фотоном (π -A) в $\mathcal{L}_{4A}$ (105a). Для простоты рассмотрим случай постоянного дилатона ϕ , тогда в окрестности источника скалярная мода π замораживается и эффективное описание динамических мод гравитации может быть учтено с помощью предела

$$G_4 \rightarrow \text{constant}, \quad \mathcal{L}_4 \rightarrow R \quad (129)$$

и минимальной связи с материей $\mathcal{L}_2$ (т.е. без включения в рассмотрение $\mathcal{L}_3$ и $\mathcal{L}_5$). Таким образом, при условии, что вайнштейновское экранирование модификаций

³См. однако [121] для альтернативы

⁴Имеется в виду удержание уравнений движений второго порядка. См. однако недавнее обсуждение в рамках расширенной теории Хорндески[115].

ОТО эффективно, например, в Солнечной системе, применение предела (129) к действию (105a) приводит к стандартной максвелловской электродинамике вблизи источников

$$\mathcal{L}_{4A} \rightarrow -\frac{1}{4} F^2. \quad (130)$$

Действительно, построение эффективного действия для анализа экранирования Вайнштейна показывает, что новое слагаемое $\mathcal{L}_{4A}$ в действии (102) не вносит вклада в эффективное действие для возмущений. Чтобы это увидеть, рассмотрим статическую, сферически симметричную конфигурацию возмущений (h, χ, A) на фоне Минковского с постоянными скалярным ($\pi = \text{const}$) и 4-векторным ($A^{(0)\mu} = \text{const}$) фонами. Следуя подходу из [120], мы предполагаем, что возмущения достаточно малы, чтобы пренебречь взаимодействиями высшего порядка между гравитоном, вектором и скаляром, а также их самодействиями с производными $(\partial\chi)^n$. Мы сохраняем только нелинейности вида $(\partial^2\chi)^n$. Кроме того, в этом разложении не возникает линейных по ∂A членов вида $\partial A (\partial^2\chi)^n$ или $h \partial A$ (поскольку $\mathcal{L}_{4A}$ квадратичен в ∂A , а фоновый 4-вектор постоянен). Соответственно, члены, дающие вклад в эффективную теорию, имеют вид

$$(\partial h)^2, (\partial\chi)^2, (\partial A)^2, (\partial\chi)^2(\partial^2\chi)^n, h(\partial^2\chi)^n. \quad (131)$$

Таким образом, использование (131) позволяет получить то же эффективное действие, что и в [120], но с дополнительным максвелловским членом $(\partial A)^2$, из чего следует вывод об экранировании дополнительной скалярной моды вблизи источников. Другими словами, причина, позволяющая восстановить предсказания ОТО, также является причиной, позволяющей восстановить электродинамику Максвелла в лабораторных тестах, таким образом, что, свет действительно движется по геодезическим вблизи источников гравитации.

Однако эта дискуссия заслуживает дополнительного изучения возможных последствий и экспериментальных ограничений. Кроме того, экранирование Вайнштейна не исключает возможности модификации света, идущего от удаленных источников, вдали от плотных областей. Таким образом, электромагнитные расширения гравитации Хорндески (105a), (105b) дают в принципе экспериментально различимые предсказания, например, в космических лучах.

3.5 Скалярный сектор

Не ограничивая общности, можно частично воспользоваться калибровочной свободой и изначально исключить продольную компоненту $\partial_i \partial_j E$. Тогда квадратичное действие для скалярных возмущений имеет вид

$$\begin{aligned} \delta S_{scalar}^2 = \int dt d^3x a^3 \phi \bigg(& A_1 (\dot{\Psi})^2 + A_2 \frac{(\vec{\nabla} \Psi)^2}{a^2} + A_3 \Phi^2 + A_4 \Phi \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} + A_5 \dot{\Psi} \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} \\ & + A_6 \Phi \dot{\Psi} + A_7 \Phi \frac{\vec{\nabla}^2 \Psi}{a^2} + A_8 \Phi \frac{\vec{\nabla}^2 \chi}{a^2} + A_9 \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} \dot{\chi} + A_{10} \chi \ddot{\Psi} + A_{11} \Phi \dot{\chi} \\ & + A_{12} \chi \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} + A_{13} \chi \frac{\vec{\nabla}^2 \Psi}{a^2} + A_{14} (\dot{\chi})^2 + A_{15} \frac{(\vec{\nabla} \chi)^2}{a^2} + A_{17} \Phi \chi + A_{18} \chi \dot{\Psi} \\ & + A_{19} \Psi \chi + A_{20} \chi^2 + C_1 \dot{\Psi} \dot{\varphi} + C_2 \dot{\Psi} \varphi + C_4 \chi \ddot{\varphi} + C_5 \chi \dot{\varphi} + C_7 \dot{\varphi} \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} \\ & + C_8 \varphi \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} + C_9 \Phi \dot{\varphi} + C_{10} \varphi \frac{\vec{\nabla}^2 \chi}{a^2} + C_{11} \varphi \frac{\vec{\nabla}^2 \Psi}{a^2} + C_{12} \varphi \frac{\vec{\nabla}^2 \Phi}{a^2} \\ & + \phi^2 \left(B_1 \frac{(\vec{\nabla} \dot{\alpha})^2}{a^2} + B_2 \gamma \frac{\vec{\nabla}^2 \alpha}{a^2} - 2B_1 \dot{\gamma} \frac{\vec{\nabla}^2 \alpha}{a^2} + B_1 \frac{(\vec{\nabla} \gamma)^2}{a^2} \right) \bigg), \end{aligned} \quad (132)$$

где коэффициенты A_i, B_i, C_i - комбинации функций лагранжиана и их производных. Явную форму этих коэффициентов можно найти в приложении Е. Слагаемые с коэффициентами A_i - это обычные скалярные возмущения теории Хорндески, B_i - слагаемые отвечающие возмущениям векторного поля, а C_i - члены, содержащие возмущение дилатона φ .

Мы используем остаточную калибровочную свободу и положим $\chi = 0$. Уравнения движения, полученные из вариаций по β, Φ, γ и α , являются связями, при этом уравнения из вариаций по γ и α эквивалентны друг другу:

$$\delta \Phi : \quad \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} = -\frac{1}{3A_4} \left(2A_1 \frac{\vec{\nabla}^2 \Psi}{a^2} + 6A_3 \Phi - 9A_4 \dot{\Psi} + C_1 \frac{\vec{\nabla}^2 \varphi}{a^2} + 3C_9 \dot{\varphi} \right) \quad (133a)$$

$$\delta \beta : \quad \Phi = \frac{1}{3A_4} \left(2A_1 \dot{\Psi} + C_2 \varphi + C_1 \dot{\varphi} \right), \quad (133b)$$

$$\delta \gamma : \quad \frac{\vec{\nabla}^2 \gamma}{a^2} = \frac{\vec{\nabla}^2 \dot{\alpha}}{a^2}. \quad (133c)$$

Связь по γ оказывается тривиальной в силу соотношения

$$\frac{1}{2} B_2 + \dot{B}_1 + B_1 (3H_\phi + H) = 0.$$

Применение связей (133) позволяет исключить Φ, β, γ из действия (132), при этом слагаемые, содержащие α и γ , полностью исчезают. Результирующее действие содержит две динамические переменные - Ψ и φ :

$$\begin{aligned} \delta S_{scalar}^2 = \int dt d^3x a^3 \phi & \left(\left(\dot{\Psi} \right)^2 \mathcal{G}_S^\Psi + \mathcal{G}_S^{\Psi\varphi} \dot{\Psi} \dot{\varphi} + (\dot{\varphi})^2 \mathcal{G}_S^\varphi \right. \\ & - \mathcal{F}_S^\Psi \frac{(\vec{\nabla} \Psi)^2}{a^2} - \mathcal{F}_S^{\Psi\varphi} \frac{\vec{\nabla} \Psi}{a} \frac{\vec{\nabla} \varphi}{a} - \mathcal{F}_S^\varphi \frac{(\vec{\nabla} \varphi)^2}{a^2} \\ & \left. + \mathcal{R} \Psi \dot{\varphi} + M_{\Psi\varphi} \Psi \varphi + M_\varphi \varphi^2 \right), \end{aligned} \quad (134)$$

где

$$\mathcal{G}_S^\Psi = -A_1 + \frac{4}{9} \frac{A_3 A_1^2}{A_4}, \quad (135a)$$

$$\mathcal{F}_S^\Psi = -A_2 - \frac{1}{a\phi} \frac{d}{dt} \left[\frac{2A_1^2 \phi a}{9A_4} \right], \quad (135b)$$

$$\mathcal{G}_S^\varphi = \frac{1}{9} \frac{A_3 C_1^2}{A_4^2} + \frac{1}{3} \frac{C_1 C_9}{A_4}, \quad (135c)$$

$$\mathcal{F}_S^\varphi = \frac{\phi}{a^3} \frac{d}{dt} \left[\frac{a^3 C_1^2}{18\phi A_4} \right], \quad (135d)$$

$$\mathcal{F}_S^{\Psi\varphi} = C_{11} - \frac{1}{a} \phi \frac{d}{dt} \left[\frac{2A_1 C_1 a^2}{9A_4} \right], \quad (135e)$$

$$\mathcal{G}_S^{\Psi\varphi} = \frac{2(2A_3 C_1 + 3A_4 C_9) A_1}{9 A_4^2}, \quad (135f)$$

$$\mathcal{R} = -\frac{4}{9} \frac{A_1 A_3 C_2}{A_4^2}, \quad (135g)$$

$$M_\varphi = -\frac{1}{9a^4} \frac{d}{dt} \left[\frac{A_3 C_1 C_2 a^4}{A_4^2} \right] - \frac{1}{6\phi a^3} \frac{d}{dt} \left[\frac{C_2 C_9 \phi a^3}{A_4} \right], \quad (135h)$$

$$M_{\Psi\varphi} = \frac{4}{9} \frac{1}{a^3 \phi} \frac{d}{dt} \left[\phi a^3 \frac{A_1 A_3 C_2}{A_4^2} \right], \quad (135i)$$

Определим кинетическую матрицу $\mathcal{G}_S$ и "градиентную" матрицу $\mathcal{F}_S$,

$$\mathcal{G}_S = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_S^\Psi & \frac{1}{2} \mathcal{G}_S^{\Psi\varphi} \\ \frac{1}{2} \mathcal{G}_S^{\Psi\varphi} & \mathcal{G}_S^\varphi \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_S = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_S^\Psi & \frac{1}{2} \mathcal{F}_S^{\Psi\varphi} \\ \frac{1}{2} \mathcal{F}_S^{\Psi\varphi} & \mathcal{F}_S^\varphi \end{pmatrix}, \quad (136)$$

несложно проверить, что $\mathcal{G}_S$ имеет ненулевой детерминант, а значит в нашей теории присутствуют две динамические степени свободы

$$\det \mathcal{G}_S = -\frac{1}{9} \frac{A_1}{A_4^2} (A_1 C_9^2 + A_3 C_1^2 + 3A_4 C_1 C_9). \quad (137)$$

Более того, поворот полей, диагонализующий кинетическую матрицу, не диагонализует градиентную. Таким образом, скорости распространения двух скалярных мод могут быть найдены как собственные значения матрицы $\mathcal{F}_S \mathcal{G}_S^{-1}$. Факторизация данных выражений невозможна, и они имеют громоздкий вид. Однако их сумма и произведение могут быть выражены через детерминанты обеих матриц, используя свойство, что след матрицы равен сумме ее собственных значений, а детерминант матрицы – произведению собственных значений:

$$(c_S^{(1)})^2 (c_S^{(2)})^2 = \frac{\det \mathcal{F}_S}{\det \mathcal{G}_S}, \quad (138a)$$

$$(c_S^{(1)})^2 + (c_S^{(2)})^2 = \frac{1}{\det \mathcal{G}_S} (\mathcal{G}_S^\Psi \mathcal{F}_S^\varphi - \frac{1}{2} \mathcal{G}_S^{\Psi\varphi} \mathcal{F}_S^{\Psi\varphi} + \mathcal{G}_S^\varphi \mathcal{F}_S^\Psi), \quad (138b)$$

где,

$$\det \mathcal{F}_S = \frac{\phi}{18a^3} \left(A_2 + \frac{2}{9a\phi} \frac{d}{dt} \left[\frac{\phi a A_1^2}{A_4} \right] \right) \frac{d}{dt} \left[\frac{C_1^2 a^3}{A_4 \phi} \right] - \frac{1}{8} \left(C_{11} - \frac{2}{9a^2} \frac{d}{dt} \left[\frac{a^2 A_1 C_1}{A_4} \right] \right)^2. \quad (139)$$

3.6 Устойчивость FLRW фона относительно возмущений

Теперь обсудим стабильность космологического фона. Сначала предположим, что дилатонный фон $\phi(t)$ имеет определенный знак. Это естественное предположение, поскольку в противном случае при исчезновении $\phi(t)$ пятимерная метрика становилась бы вырожденной, поскольку компоненты фонового 4-вектора также зануляются на уравнениях движения и в следствии изотропии.

Для исключения духовых мод для тензорных и векторных возмущений необходимо выполнение условий $\mathcal{G}_\tau > 0$ и $\mathcal{G}_V > 0$. Кроме того, для предотвращения градиентных неустойчивостей требуется, чтобы $\mathcal{F}_\tau > 0$ и $\mathcal{F}_V > 0$. Наконец, предполагается наличие обычной асимптотики, при которой $\mathcal{F}_\tau$ имеет ненулевую нижнюю границу в асимптотическом прошлом и будущем (см., например, [58, 99]). Отметим попутно, что для электромагнитных расширений теории Хорндески - а именно, в случаях с $\mathcal{L}_{4A}$ и $\mathcal{L}_{5A}$, но без G_6 или зависимости G_5 от X - требуется только два условия. Действительно, в этом случае отсутствие духов и стабильность гравитона, очевидно, подразумевают то же самое для фотона.

С другой стороны, в скалярном секторе необходимо, чтобы $\det \mathcal{G}_S > 0$ и $\det \mathcal{F}_S > 0$.

Однако теперь покажем, что запрещающая теорема [56, 58] для всюду стабильных, несингулярных космологических решений применима и в этом случае, даже с произвольными галилеоном и дилатоном. Таким образом, даже если локальная устойчивость может быть достигнута в некоторый момент времени для некоторой модели, несомненно, что — при условии обычной асимптотики, а не частных случаев (См. [58, 99] или предыдущие главы) — градиентная неустойчивость рано или поздно возникнет.

В связи с этим следует напомнить, что согласно анализу, проведенному в предыдущем разделе, скалярные возмущения A^μ не взаимодействуют со скалярными возмущениями метрики, галилеона и дилатона. Более того, первые являются нединамическими. Следовательно, квадратичное действие для скалярного сектора, полученное из (102), эквивалентно (на уравнениях движения) квадратичному действию, полученному при условии $A^\mu = 0$, что соответствует $\mathcal{L}_A \rightarrow 0$ в (102). Таким образом, эквивалентная скалярная динамика может быть получена при рассмотрении только $\mathcal{L}_\pi$ и $\mathcal{L}_\phi$ в (102). Далее, следует отметить, что, используя переопределение скалярных потенциалов (103) в $\mathcal{L}_\pi$, эта часть действия может быть переписана исключительно как функция от $\hat{F}$, $\hat{K}$, $\hat{G}_4$, $\hat{G}_5$ (то есть, без G_6). В то же время, при переопределении (103) получается $\mathcal{L}_\phi = \mathcal{L}_\phi(\hat{F}, \hat{K}, \hat{G}_4, \hat{G}_5, G_6)$. Теперь, следуя [122, 123], определим следующие мультискалярные потенциалы

$$G_2 = \hat{F}(\pi, X) + \frac{1}{\phi} \hat{K}(\pi, X) \phi^{;\alpha} \pi_{;\alpha}, \quad (140a)$$

$$G_3^\pi = \hat{K}(\pi, X) + \frac{4}{\phi} \hat{G}_{4X} \phi^{;\alpha} \pi_{;\alpha}, \quad (140b)$$

$$G_3^\phi = \frac{2}{\phi} \hat{G}_4(\pi, X), \quad (140c)$$

$$\tilde{G}_4 = \hat{G}_4 + \frac{1}{2\phi} \hat{G}_5(\pi, X) \phi^{;\alpha} \pi_{;\alpha}, \quad (140d)$$

$$G_5^\pi = \hat{G}_5(\pi, X) + \frac{9}{\phi} G_{6X} \phi^{;\alpha} \pi_{;\alpha}, \quad (140e)$$

$$G_5^\phi = \frac{6}{\phi} G_6, \quad (140f)$$

таким образом, выражение $\mathcal{L}_\pi + \mathcal{L}_\phi$ может быть переписано как:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & G_2 - G_3^I \square \phi^I + G_4 R + G_{4, \langle IJ \rangle} (\square \phi^I \square \phi^J - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi^I \nabla^\mu \nabla^\nu \phi^J) \\ & + G_5^I G^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi^I - \frac{1}{6} G_{5, (JK)}^I \left[\square \phi^I \square \phi^J \square \phi^K - 3 \square \phi^{(I} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi^{J} \nabla^\mu \nabla^\nu \phi^{K)} \right. \\ & \left. + 2 \nabla_\mu \nabla_\nu \phi^I \nabla^\nu \nabla^\lambda \phi^J \nabla_\lambda \nabla^\mu \phi^K \right],\end{aligned}\quad (141)$$

где, в нашем случае, ϕ^I - это поля π и ϕ , $X^{IJ} := g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^I \partial_\nu \phi^J$, а индекс $\langle IJ \rangle$ обозначает симметризованную производную $f_{\langle IJ \rangle} := (\partial f / \partial X^{IJ} + \partial f / \partial X^{JI}) / 2$. Таким образом, запрещающая теорема, доказанная в [123], применима к теориям, обсуждаемым в этой главе.

3.7 Светоподобная ветвь фоновых решений

На этом этапе уместно обсудить перекрестную проверку всех вычислений. Это обсуждение выявит интересный аспект действия (102), если рассматривать его в общем контексте СВТ-теорий.

Поскольку четырехмерная метрика, 4-вектор и дилатон являются различными компонентами одной и той же пятимерной метрики, следовало бы ожидать, что, например, их скорости одинаковы. Ранее указывалось, что такое поведение встречается довольно часто, хотя и не всегда. В частности, скорости 4-вектора и гравитона не совпадают, если скалярный потенциал G_5 зависит от X или присутствует потенциал G_6 . Это различие объясняется компактификацией одного из измерений и нарушением изотропности в пространственных направлениях. В качестве перепроверки наших результатов восстановим изотропию и однородность в пространственноподобных измерениях в пятимерной метрике, задав $\phi(t) = a(t)$, другими словами, рассмотрев метрику FLRW в пяти измерениях. В этом случае одно из уравнений для фоновых полей становится избыточным — а именно, уравнение для дилатонного фона ϕ — и поэтому, как и ожидалось, независимыми остаются только уравнения, полученные из варьирования по g^{00} и g^{ii} (явный вид фоновых уравнений в приложении D). Более того, обнаружено, что скорости гравитона и 4-вектора в этом случае совпадают даже при наличии произвольных потенциалов $G_5(\pi, X)$, $G_6(\pi, X)$. И, наконец, коэффициенты действия (132) упрощаются до следующим образом:

$$C_1 = A_1, \quad C_2 = C_8 = 0, \quad C_9 = -A_4, \quad C_{11} = -2A_2, \quad (142)$$

и скорости для скалярных мод могут быть записаны в явном виде как

$$(c_S^{(1)})^2 = A_4^2 \frac{\frac{1}{a^2} \frac{d}{dt} \left[\frac{a^2 A_1^2}{A_4} \right] + 6A_2}{4A_1 A_4^2 - 2A_1^2 A_3}, \quad (143a)$$

$$(c_S^{(2)})^2 = -3 \frac{A_2}{A_1} = \frac{\mathcal{F}_\tau}{\mathcal{G}_\tau}. \quad (143b)$$

Таким образом, показано, что скорость одного из скаляров $(c_S^{(2)})^2$ — дополнительной скалярной моды, обусловленной дилатоном — совпадает со скоростью тензорной и векторной мод для всех скалярных потенциалов $G_5(\pi, X)$ и $G_6(\pi, X)$.

Подчеркнем, однако, что этот частный случай не имеет физического смысла в контексте размерной редукции Калуцы-Клейна, поскольку для последней было естественно предположить, что радиус компактифицированного пятого измерения мал, что неизбежно нарушает пространственную изотропию и однородность пятимерного пространства-времени.

С другой стороны, давайте обсудим более широкий результат: В контексте всех СВТ-теорий с высшими производными последний результат просто говорит, что теория (102) является подклассом со «светоподобной» ветвью фоновых решений. А именно, не обсуждая связь с высшими измерениями, рассмотрим действие (102) как СВТ-теорию для метрики, двух скаляров с высшими производными ϕ и π — здесь они рассматриваются на равных основаниях — и для $U(1)$ калибровочно инвариантного вектора с высшей производной A^μ , такого, что уравнения движения имеют второй порядок. Эта теория обладает тем определяющим свойством, что имеет определенную ветвь космологических фоновых решений ($\phi(t) = a(t)$), на которой скорость распространения всех возмущений, за исключением скалярной моды, совпадает для всех скалярных потенциалов вплоть до $G_6(\pi, X)$. Несмотря на свой нефизический характер в связи с более высокой размерностью, этот случай может оказаться актуальным для поиска векторно-галилеевых связей с более широкой точки зрения, выходящей за рамки нашего конкретного метода КК-редукции.

Основные результаты Главы 3

В данной главе был предложен и детально исследован новый подход к построению СВТ-теорий гравитации, основанный на процедуре размерной редукции Калуцы-Клейна теории обобщенных галилеонов из пятимерного пространства-времени.

Ключевые результаты главы заключаются в следующем:

- Успешно проведена редукция Калуцы-Клейна пятимерных обобщенных галилеонов на четырехмерное пространство. Полученная 4D теория включает динамическую метрику, $U(1)$ -калибровочное векторное поле (отождествляемое с фотоном) и два скалярных поля (дилатон ϕ и исходный галилеон π). Показано, как пятимерное действие (99) переходит в четырехмерное действие, содержащее стандартные члены Хорндески для поля π , лагранжиан дилатона $\mathcal{L}_\phi$ (104) и лагранжиан векторного поля $\mathcal{L}_A$ (105), включающий нетривиальные связи скаляров с вектором.
- Проведен анализ квадратичного действия для тензорных и векторных возмущений над космологическим фоном. Установлено, что квадраты скоростей распространения тензорных мод (гравитонов) c_g^2 и векторных мод (фотонов) c_A^2 в полученной теории автоматически совпадают в случае $G_5 = G_5(\pi)$ без необходимости тонкой настройки потенциалов теории. Этот результат расширяет класс экспериментально допустимых теорий Хорндески.
- Выведено квадратичное действие для скалярных возмущений. Показано, что в общем случае теория содержит две динамические скалярные степени свободы s , вообще говоря, различными скоростями распространения. Сформулированы полные условия устойчивости теории, включающие отсутствие духов и градиентных нестабильностей во всех секторах (тензорном, векторном и скалярном).
- Обсуждена применимость механизма Вайнштейна для экранирования эффектов модифицированной гравитации и электромагнетизма в данной теории вблизи массивных источников.

Таким образом, в главе представлена последовательная процедура построения нового класса СВТ-теорий, свободных от неустойчивости Остроградского и естественно удовлетворяющих современным астрофизическим ограничениям на скорость гравитационных волн. Полученные результаты открывают новые возможности для построения моделей темной энергии и модифицированной гравитации, совместимых с наблюдениями.

Заключение

В работе изучались классические космологические решения без начальной сингулярности в рамках теории Хорндески над изотропным и анизотропным космологическими фонами. Центральным вопросом при исследовании указанных решений являлась устойчивость на всех этапах эволюции системы. Были получены следующие результаты:

1. Показано, что полностью устойчивые космологические решения без начальной сингулярности могут быть построены в теории Хорндески. Так, явно продемонстрировано, что в случае отсутствия динамики у фонового скалярного поля галилеона существует решение в виде плоского пространства Минковского. В случае динамического фонового скалярного поля, возможен выбор функций лагранжиана при котором будет отсутствовать динамика у скалярной моды возмущений, и при этом будет существовать стабильное космологическое решение.
2. Предложены конкретные примеры лагранжианов теории Хорндески, допускающие решения в виде космологического отскока и генезиса, в которых не возникает градиентных неустойчивостей на протяжении всего времени эволюции. Устойчивость построенных решений следует из устойчивости тензорных мод и отсутствия динамики в скалярном секторе. При этом предложенные лагранжианы являются лагранжианами общей теории относительности с неканоническим скалярным полем.
3. Рассмотрены возмущения над анизотропным космологическим фоном типа Бьянки I, полученное действие использовано для анализа стабильности

решения с отскоком относительно отклонения от изотропного фона. Выяснено, что вырождение динамической степени свободы в скалярном секторе является следствием высокой симметрии фоновой метрики, и при отклонении от нее возникают духовые и градиентные неустойчивости.

4. Получена новая скалярно-векторно-тензорная теория со старшими производными в действии, но при этом с уравнениями движения второго порядка.
5. Проанализированы скорости распространения скалярных, векторных и тензорных мод возмущений в этой теории и выделен класс теорий потенциально проходящий экспериментальные тесты.

В заключение автор хотел бы выразить свою искреннюю признательность научному руководителю Сергею Андреевичу Миронову за внимание к работе, ценные замечания и неизменную поддержку. Автор выражает признательность своему соавтору и коллеге Маурисио Валенсия-Вильегас за совместную работу над материалом, вошедшим в последнюю главу данной рукописи, а также своей коллеге Виктории Волковой за обсуждения и помощь в различных рабочих вопросах, а также за дружескую поддержку.

Автор благодарен сотрудникам Отдела теоретической физики Института ядерных исследований РАН за уникальную творческую атмосферу и доброжелательность.

Список литературы

1. *Guth A. H.* The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems // *Phys. Rev. D* / под ред. L.-Z. Fang, R. Ruffini. — 1981. — Т. 23. — С. 347—356. — DOI: [10.1103/PhysRevD.23.347](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.347).
2. *Starobinsky A. A.* A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity // *Phys. Lett. B* / под ред. I. M. Khalatnikov, V. P. Mineev. — 1980. — Т. 91. — С. 99—102. — DOI: [10.1016/0370-2693\(80\)90670-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(80)90670-X).
3. *Sato K.* First Order Phase Transition of a Vacuum and Expansion of the Universe // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 1981. — Т. 195. — С. 467—479.
4. *Linde A. D.* A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems // *Phys. Lett. B* / под ред. L.-Z. Fang, R. Ruffini. — 1982. — Т. 108. — С. 389—393. — DOI: [10.1016/0370-2693\(82\)91219-9](https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)91219-9).
5. *Albrecht A., Steinhardt P. J.* Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking // *Phys. Rev. Lett.* / под ред. L.-Z. Fang, R. Ruffini. — 1982. — Т. 48. — С. 1220—1223. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.48.1220](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.1220).
6. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters / N. Aghanim [и др.] // *Astron. Astrophys.* — 2020. — Т. 641. — A6. — DOI: [10.1051/0004-6361/201833910](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910). — arXiv: [1807.06209](https://arxiv.org/abs/1807.06209) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/archive/astro)].
7. *Hawking S. W., Ellis G. F. R.* The Large Scale Structure of Space-Time: 50th Anniversary Edition. — Cambridge University Press, 2023. — (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). — ISBN 9781009253161. — DOI: [10.1017/9781009253161](https://doi.org/10.1017/9781009253161).
8. The Ekpyrotic universe: Colliding branes and the origin of the hot big bang / J. Khoury [и др.] // *Phys. Rev. D.* — 2001. — Т. 64. — С. 123522. — DOI: [10.1103/PhysRevD.64.123522](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.64.123522). — arXiv: [hep-th/0103239](https://arxiv.org/abs/hep-th/0103239).
9. Visible branes with negative tension in heterotic M theory / R. Y. Donagi [и др.] // *JHEP.* — 2001. — Т. 11. — С. 041. — DOI: [10.1088/1126-6708/2001/11/041](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2001/11/041). — arXiv: [hep-th/0105199](https://arxiv.org/abs/hep-th/0105199).

10. *Steinhardt P. J., Turok N.* Cosmic evolution in a cyclic universe // Physical Review D. — 2002. — Май. — Т. 65, № 12. — ISSN 1089-4918. — DOI: [10.1103/physrevd.65.126003](https://doi.org/10.1103/physrevd.65.126003). — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.65.126003>.
11. Starting the Universe: Stable Violation of the Null Energy Condition and Non-standard Cosmologies / P. Creminelli [и др.] // JHEP. — 2006. — Т. 12. — С. 080. — DOI: [10.1088/1126-6708/2006/12/080](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2006/12/080). — arXiv: [hep-th/0606090](https://arxiv.org/abs/hep-th/0606090).
12. *Buchbinder E. I., Khoury J., Ovrut B. A.* New ekpyrotic cosmology // Physical Review D. — 2007. — Дек. — Т. 76, № 12. — ISSN 1550-2368. — DOI: [10.1103/physrevd.76.123503](https://doi.org/10.1103/physrevd.76.123503). — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.76.123503>.
13. *Creminelli P., Senatore L.* A smooth bouncing cosmology with scale invariant spectrum // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2007. — Нояб. — Т. 2007, № 11. — С. 010—010. — ISSN 1475-7516. — DOI: [10.1088/1475-7516/2007/11/010](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2007/11/010). — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2007/11/010>.
14. *Creminelli P., Nicolis A., Trincherini E.* Galilean Genesis: An Alternative to inflation // JCAP. — 2010. — Т. 11. — С. 021. — DOI: [10.1088/1475-7516/2010/11/021](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2010/11/021). — arXiv: [1007.0027 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1007.0027).
15. *Rubakov V. A.* The Null Energy Condition and its violation // Phys. Usp. — 2014. — Т. 57. — С. 128—142. — DOI: [10.3367/UFNe.0184.201402b.0137](https://doi.org/10.3367/UFNe.0184.201402b.0137). — arXiv: [1401.4024 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1401.4024).
16. *Penrose R.* Gravitational collapse and space-time singularities // Phys. Rev. Lett. — 1965. — Т. 14. — С. 57—59. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.14.57](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.14.57).
17. *Buniy R. V., Hsu S. D. H., Murray B. M.* The null energy condition and instability // Physical Review D. — 2006. — Сент. — Т. 74, № 6. — ISSN 1550-2368. — DOI: [10.1103/physrevd.74.063518](https://doi.org/10.1103/physrevd.74.063518). — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.74.063518>.
18. *Armendariz-Picon C., Damour T., Mukhanov V. F.* k - inflation // Phys. Lett. B. — 1999. — Т. 458. — С. 209—218. — DOI: [10.1016/S0370-2693\(99\)00603-6](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(99)00603-6). — arXiv: [hep-th/9904075](https://arxiv.org/abs/hep-th/9904075).

19. *Garriga J., Mukhanov V. F.* Perturbations in k-inflation // Phys. Lett. B. — 1999. — T. 458. — C. 219—225. — DOI: [10.1016/S0370-2693\(99\)00602-4](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(99)00602-4). — arXiv: [hep-th/9904176](https://arxiv.org/abs/hep-th/9904176).
20. *Ostrogradsky M.* Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres // Mem. Acad. St. Petersburg. — 1850. — T. 6, № 4. — C. 385—517.
21. *Woodard R. P.* Avoiding dark energy with $1/r$ modifications of gravity // Lect. Notes Phys. / под ред. L. Papantonopoulos. — 2007. — T. 720. — C. 403—433. — DOI: [10.1007/978-3-540-71013-4_14](https://doi.org/10.1007/978-3-540-71013-4_14). — arXiv: [astro-ph/0601672](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0601672).
22. *Motohashi H., Suyama T.* Third order equations of motion and the Ostrogradsky instability // Phys. Rev. D. — 2015. — T. 91, № 8. — C. 085009. — DOI: [10.1103/PhysRevD.91.085009](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.085009). — arXiv: [1411.3721](https://arxiv.org/abs/1411.3721) [[physics.class-ph](#)].
23. *Horndeski G. W.* Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space // Int. J. Theor. Phys. — 1974. — T. 10. — C. 363—384. — DOI: [10.1007/BF01807638](https://doi.org/10.1007/BF01807638).
24. *Deffayet C., Esposito-Farese G., Vikman A.* Covariant Galileon // Phys. Rev. D. — 2009. — T. 79. — C. 084003. — DOI: [10.1103/PhysRevD.79.084003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.79.084003). — arXiv: [0901.1314](https://arxiv.org/abs/0901.1314) [[hep-th](#)].
25. *Nicolis A., Rattazzi R., Trincherini E.* The Galileon as a local modification of gravity // Phys. Rev. D. — 2009. — T. 79. — C. 064036. — DOI: [10.1103/PhysRevD.79.064036](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.79.064036). — arXiv: [0811.2197](https://arxiv.org/abs/0811.2197) [[hep-th](#)].
26. *Sotiriou T. P., Faraoni V.* $f(R)$ Theories Of Gravity // Rev. Mod. Phys. — 2010. — T. 82. — C. 451—497. — DOI: [10.1103/RevModPhys.82.451](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.82.451). — arXiv: [0805.1726](https://arxiv.org/abs/0805.1726) [[gr-qc](#)].
27. *De Felice A., Tsujikawa S.* $f(R)$ theories // Living Rev. Rel. — 2010. — T. 13. — C. 3. — DOI: [10.12942/lrr-2010-3](https://doi.org/10.12942/lrr-2010-3). — arXiv: [1002.4928](https://arxiv.org/abs/1002.4928) [[gr-qc](#)].
28. *Chiba T., Okabe T., Yamaguchi M.* Kinetically driven quintessence // Phys. Rev. D. — 2000. — T. 62. — C. 023511. — DOI: [10.1103/PhysRevD.62.023511](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.62.023511). — arXiv: [astro-ph/9912463](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9912463).

29. *Armendariz-Picon C., Mukhanov V. F., Steinhardt P. J.* A Dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late time cosmic acceleration // *Phys. Rev. Lett.* — 2000. — T. 85. — C. 4438—4441. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.85.4438](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.4438). — arXiv: [astro-ph/0004134](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0004134).
30. *Germani C., Kehagias A.* New Model of Inflation with Non-minimal Derivative Coupling of Standard Model Higgs Boson to Gravity // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — T. 105. — C. 011302. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.105.011302](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.011302). — arXiv: [1003.2635](https://arxiv.org/abs/1003.2635) [[hep-ph](#)].
31. *Germani C., Kehagias A.* Cosmological Perturbations in the New Higgs Inflation // *JCAP*. — 2010. — T. 05. — C. 019. — DOI: [10.1088/1475-7516/2010/05/019](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2010/05/019). — arXiv: [1003.4285](https://arxiv.org/abs/1003.4285) [[astro-ph.CO](#)]. — [Erratum: *JCAP* 06, E01 (2010)].
32. *Germani C., Kehagias A.* UV-Protected Inflation // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — T. 106. — C. 161302. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.106.161302](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.161302). — arXiv: [1012.0853](https://arxiv.org/abs/1012.0853) [[hep-ph](#)].
33. Imperfect Dark Energy from Kinetic Gravity Braiding / C. Deffayet [и др.] // *JCAP*. — 2010. — T. 10. — C. 026. — DOI: [10.1088/1475-7516/2010/10/026](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2010/10/026). — arXiv: [1008.0048](https://arxiv.org/abs/1008.0048) [[hep-th](#)].
34. *Kobayashi T., Yamaguchi M., Yokoyama J.* G-inflation: Inflation driven by the Galileon field // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — T. 105. — C. 231302. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.105.231302](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.231302). — arXiv: [1008.0603](https://arxiv.org/abs/1008.0603) [[hep-th](#)].
35. Higgs G-inflation / K. Kamada [и др.] // *Phys. Rev. D*. — 2011. — T. 83. — C. 083515. — DOI: [10.1103/PhysRevD.83.083515](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.083515). — arXiv: [1012.4238](https://arxiv.org/abs/1012.4238) [[astro-ph.CO](#)].
36. General second order scalar-tensor theory, self tuning, and the Fab Four / C. Charmousis [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — T. 108. — C. 051101. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.108.051101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.051101). — arXiv: [1106.2000](https://arxiv.org/abs/1106.2000) [[hep-th](#)].
37. *Kobayashi T., Yamaguchi M., Yokoyama J.* Generalized G-inflation: Inflation with the most general second-order field equations // *Prog. Theor. Phys.* — 2011. — T. 126. — C. 511—529. — DOI: [10.1143/PTP.126.511](https://doi.org/10.1143/PTP.126.511). — arXiv: [1105.5723](https://arxiv.org/abs/1105.5723) [[hep-th](#)].

38. *Kobayashi T.* Horndeski theory and beyond: a review // Rept. Prog. Phys. — 2019. — T. 82, № 8. — C. 086901. — DOI: [10.1088/1361-6633/ab2429](https://doi.org/10.1088/1361-6633/ab2429). — arXiv: [1901.07183](https://arxiv.org/abs/1901.07183) [gr-qc].
39. *Veneziano G.* A Model for the big bounce // JCAP. — 2004. — T. 03. — C. 004. — DOI: [10.1088/1475-7516/2004/03/004](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2004/03/004). — arXiv: [hep-th/0312182](https://arxiv.org/abs/hep-th/0312182).
40. *Aref'eva I. Y., Joukovskaya L. V., Vernov S. Y.* Bouncing and accelerating solutions in nonlocal stringy models // JHEP. — 2007. — T. 07. — C. 087. — DOI: [10.1088/1126-6708/2007/07/087](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2007/07/087). — arXiv: [hep-th/0701184](https://arxiv.org/abs/hep-th/0701184).
41. *Creminelli P.* Subluminal Galilean Genesis // JHEP. — 2013. — T. 02. — C. 006. — DOI: [10.1007/JHEP02\(2013\)006](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2013)006). — arXiv: [1209.3768](https://arxiv.org/abs/1209.3768) [hep-th].
42. DBI Realizations of the Pseudo-Conformal Universe and Galilean Genesis Scenarios / K. Hinterbichler [и др.] // JCAP. — 2012. — T. 12. — C. 030. — DOI: [10.1088/1475-7516/2012/12/030](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2012/12/030). — arXiv: [1209.5742](https://arxiv.org/abs/1209.5742) [hep-th].
43. *Elder B., Joyce A., Khoury J.* From Satisfying to Violating the Null Energy Condition // Phys. Rev. D. — 2014. — T. 89, № 4. — C. 044027. — DOI: [10.1103/PhysRevD.89.044027](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.89.044027). — arXiv: [1311.5889](https://arxiv.org/abs/1311.5889) [hep-th].
44. Inflation from Minkowski Space / D. Pirtskhalava [и др.] // JHEP. — 2014. — T. 12. — C. 151. — DOI: [10.1007/JHEP12\(2014\)151](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2014)151). — arXiv: [1410.0882](https://arxiv.org/abs/1410.0882) [hep-th].
45. *Nishi S., Kobayashi T.* Generalized Galilean Genesis // JCAP. — 2015. — T. 03. — C. 057. — DOI: [10.1088/1475-7516/2015/03/057](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2015/03/057). — arXiv: [1501.02553](https://arxiv.org/abs/1501.02553) [hep-th].
46. *Kobayashi T., Yamaguchi M., Yokoyama J.* Galilean Creation of the Inflationary Universe // JCAP. — 2015. — T. 07. — C. 017. — DOI: [10.1088/1475-7516/2015/07/017](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2015/07/017). — arXiv: [1504.05710](https://arxiv.org/abs/1504.05710) [hep-th].
47. Bouncing Galileon Cosmologies / T. Qiu [и др.] // JCAP. — 2011. — T. 10. — C. 036. — DOI: [10.1088/1475-7516/2011/10/036](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2011/10/036). — arXiv: [1108.0593](https://arxiv.org/abs/1108.0593) [hep-th].
48. *Easson D. A., Sawicki I., Vikman A.* G-Bounce // JCAP. — 2011. — T. 11. — C. 021. — DOI: [10.1088/1475-7516/2011/11/021](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2011/11/021). — arXiv: [1109.1047](https://arxiv.org/abs/1109.1047) [hep-th].

49. *Cai Y.-F., Easson D. A., Brandenberger R.* Towards a Nonsingular Bouncing Cosmology // JCAP. — 2012. — T. 08. — C. 020. — DOI: [10.1088/1475-7516/2012/08/020](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2012/08/020). — arXiv: [1206.2382 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1206.2382).
50. *Osipov M., Rubakov V.* Galileon bounce after ekpyrotic contraction // JCAP. — 2013. — T. 11. — C. 031. — DOI: [10.1088/1475-7516/2013/11/031](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2013/11/031). — arXiv: [1303.1221 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1303.1221).
51. *Qiu T., Gao X., Saridakis E. N.* Towards anisotropy-free and nonsingular bounce cosmology with scale-invariant perturbations // Phys. Rev. D. — 2013. — T. 88, № 4. — C. 043525. — DOI: [10.1103/PhysRevD.88.043525](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.043525). — arXiv: [1303.2372 \[astro-ph.CO\]](https://arxiv.org/abs/1303.2372).
52. *Koehn M., Lehnert J.-L., Ovrut B. A.* Cosmological super-bounce // Phys. Rev. D. — 2014. — T. 90, № 2. — C. 025005. — DOI: [10.1103/PhysRevD.90.025005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.90.025005). — arXiv: [1310.7577 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1310.7577).
53. Cosmological Perturbations Through a Non-Singular Ghost-Condensate/Galileon Bounce / L. Battarra [и др.] // JCAP. — 2014. — T. 07. — C. 007. — DOI: [10.1088/1475-7516/2014/07/007](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2014/07/007). — arXiv: [1404.5067 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1404.5067).
54. *Qiu T., Wang Y.-T.* G-Bounce Inflation: Towards Nonsingular Inflation Cosmology with Galileon Field // JHEP. — 2015. — T. 04. — C. 130. — DOI: [10.1007/JHEP04\(2015\)130](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2015)130). — arXiv: [1501.03568 \[astro-ph.CO\]](https://arxiv.org/abs/1501.03568).
55. *Ijjas A., Steinhardt P. J.* Classically stable nonsingular cosmological bounces // Phys. Rev. Lett. — 2016. — T. 117, № 12. — C. 121304. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.117.121304](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.121304). — arXiv: [1606.08880 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1606.08880).
56. *Libanov M., Mironov S., Rubakov V.* Generalized Galileons: instabilities of bouncing and Genesis cosmologies and modified Genesis // JCAP. — 2016. — T. 08. — C. 037. — DOI: [10.1088/1475-7516/2016/08/037](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2016/08/037). — arXiv: [1605.05992 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1605.05992).
57. *Kolevatov R., Mironov S.* Cosmological bounces and Lorentzian wormholes in Galileon theories with an extra scalar field // Physical Review D. — 2016. — Дек. — T. 94, № 12. — ISSN 2470-0029. — DOI: [10.1103/physrevd.94.123516](https://doi.org/10.1103/physrevd.94.123516). — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.94.123516>.

58. *Kobayashi T.* Generic instabilities of nonsingular cosmologies in Horndeski theory: A no-go theorem // Phys. Rev. D. — 2016. — T. 94, № 4. — C. 043511. — DOI: [10.1103/PhysRevD.94.043511](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.043511). — arXiv: [1606.05831](https://arxiv.org/abs/1606.05831) [hep-th].
59. *Akama S., Kobayashi T.* Generalized multi-Galileons, covariantized new terms, and the no-go theorem for nonsingular cosmologies // Physical Review D. — 2017. — Март. — T. 95, № 6. — ISSN 2470-0029. — DOI: [10.1103/physrevd.95.064011](https://doi.org/10.1103/physrevd.95.064011). — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.95.064011>.
60. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral / B. P. Abbott [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2017. — T. 119, № 16. — C. 161101. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.119.161101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.161101). — arXiv: [1710.05832](https://arxiv.org/abs/1710.05832) [gr-qc].
61. Cosmology intertwined: A review of the particle physics, astrophysics, and cosmology associated with the cosmological tensions and anomalies / E. Abdalla [и др.] // JHEAp. — 2022. — T. 34. — C. 49–211. — DOI: [10.1016/j.jheap.2022.04.002](https://doi.org/10.1016/j.jheap.2022.04.002). — arXiv: [2203.06142](https://arxiv.org/abs/2203.06142) [astro-ph.CO].
62. Speed of Gravitational Waves and the Fate of Scalar-Tensor Gravity / D. Bettoni [и др.] // Phys. Rev. D. — 2017. — T. 95, № 8. — C. 084029. — DOI: [10.1103/PhysRevD.95.084029](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.084029). — arXiv: [1608.01982](https://arxiv.org/abs/1608.01982) [gr-qc].
63. *Ezquiaga J. M., Zumalacárregui M.* Dark Energy After GW170817: Dead Ends and the Road Ahead // Phys. Rev. Lett. — 2017. — T. 119, № 25. — C. 251304. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.119.251304](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.251304). — arXiv: [1710.05901](https://arxiv.org/abs/1710.05901) [astro-ph.CO].
64. *Sakstein J., Jain B.* Implications of the Neutron Star Merger GW170817 for Cosmological Scalar-Tensor Theories // Phys. Rev. Lett. — 2017. — T. 119, № 25. — C. 251303. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.119.251303](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.251303). — arXiv: [1710.05893](https://arxiv.org/abs/1710.05893) [astro-ph.CO].
65. Strong constraints on cosmological gravity from GW170817 and GRB 170817A / T. Baker [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2017. — T. 119, № 25. — C. 251301. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.119.251301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.251301). — arXiv: [1710.06394](https://arxiv.org/abs/1710.06394) [astro-ph.CO].

66. *Creminelli P., Vernizzi F.* Dark Energy after GW170817 and GRB170817A // Phys. Rev. Lett. — 2017. — T. 119, № 25. — C. 251302. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.119.251302](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.251302). — arXiv: [1710.05877](https://arxiv.org/abs/1710.05877) [[astro-ph.CO](#)].
67. *Kaluza T.* Zum Unitätsproblem der Physik // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) — 1921. — T. 1921. — C. 966—972. — DOI: [10.1142/S0218271818700017](https://doi.org/10.1142/S0218271818700017).
68. *Kaluza T.* On the unification problem in physics // International Journal of Modern Physics D. — 2018. — T. 27, № 14. — C. 1870001. — arXiv: [1803.08616](https://arxiv.org/abs/1803.08616).
69. *Klein O.* Quantum theory and five-dimensional relativity theory // The Oskar Klein Memorial Lectures: Vol 1: Lectures by CN Yang and S Weinberg. — World Scientific, 1991. — C. 67—80.
70. *Klein O.* The atomicity of electricity as a quantum theory law // Nature. — 1926. — T. 118, № 2971. — C. 516—516.
71. *Kerner R.* Generalization of the Kaluza-Klein theory for an arbitrary non-abelian gauge group // Annales de l'IHP Physique théorique. T. 9. — 1968. — C. 143—152.
72. *Salam A., Strathdee J.* On kaluza-klein theory // Annals of Physics. — 1982. — T. 141, № 2. — C. 316—352.
73. *Weinberg S.* Charges from extra dimensions // Physics Letters B. — 1983. — T. 125, № 4. — C. 265—269.
74. *Tasinato G., Koyama K., Khosravi N.* The role of vector fields in modified gravity scenarios // JCAP. — 2013. — T. 11. — C. 037. — DOI: [10.1088/1475-7516/2013/11/037](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2013/11/037). — arXiv: [1307.0077](https://arxiv.org/abs/1307.0077) [[hep-th](#)].
75. *Petrov P.* Galileon-like vector fields // Phys. Rev. D. — 2019. — T. 100, № 2. — C. 025006. — DOI: [10.1103/PhysRevD.100.025006](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.025006). — arXiv: [1812.11134](https://arxiv.org/abs/1812.11134) [[hep-th](#)].
76. A no-go theorem for generalized vector Galileons on flat spacetime / C. Deffayet [и др.] // JHEP. — 2014. — T. 04. — C. 082. — DOI: [10.1007/JHEP04\(2014\)082](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2014)082). — arXiv: [1312.6690](https://arxiv.org/abs/1312.6690) [[hep-th](#)].

77. *Colléaux A., Langlois D., Noui K.* Classification of generalised higher-order Einstein-Maxwell Lagrangians // JHEP. — 2024. — T. 03. — C. 041. — DOI: [10.1007/JHEP03\(2024\)041](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2024)041). — arXiv: [2312.14814](https://arxiv.org/abs/2312.14814) [gr-qc].
78. *Colléaux A., Langlois D., Noui K.* Degenerate Higher-Order Maxwell Theories in Flat Space-Time. — 2024. — App. — arXiv: [2404.18715](https://arxiv.org/abs/2404.18715) [gr-qc].
79. *Esposito-Farese G., Pitrou C., Uzan J.-P.* Vector theories in cosmology // Phys. Rev. D. — 2010. — T. 81. — C. 063519. — DOI: [10.1103/PhysRevD.81.063519](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.063519). — arXiv: [0912.0481](https://arxiv.org/abs/0912.0481) [gr-qc].
80. *Golovnev A., Mukhanov V., Vanchurin V.* Vector Inflation // JCAP. — 2008. — T. 06. — C. 009. — DOI: [10.1088/1475-7516/2008/06/009](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2008/06/009). — arXiv: [0802.2068](https://arxiv.org/abs/0802.2068) [astro-ph].
81. *Beltran Jimenez J., Maroto A. L.* A cosmic vector for dark energy // Phys. Rev. D. — 2008. — T. 78. — C. 063005. — DOI: [10.1103/PhysRevD.78.063005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.063005). — arXiv: [0801.1486](https://arxiv.org/abs/0801.1486) [astro-ph].
82. *Ijjas A.* Space-time slicing in Horndeski theories and its implications for non-singular bouncing solutions // JCAP. — 2018. — T. 02. — C. 007. — DOI: [10.1088/1475-7516/2018/02/007](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2018/02/007). — arXiv: [1710.05990](https://arxiv.org/abs/1710.05990) [gr-qc].
83. The Effective Field Theory of nonsingular cosmology / Y. Cai [и др.] // JHEP. — 2017. — T. 01. — C. 090. — DOI: [10.1007/JHEP01\(2017\)090](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2017)090). — arXiv: [1610.03400](https://arxiv.org/abs/1610.03400) [gr-qc].
84. Stability of Geodesically Complete Cosmologies / P. Creminelli [и др.] // JCAP. — 2016. — T. 11. — C. 047. — DOI: [10.1088/1475-7516/2016/11/047](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2016/11/047). — arXiv: [1610.04207](https://arxiv.org/abs/1610.04207) [hep-th].
85. Cosmological bounce and Genesis beyond Horndeski / R. Koleyatov [и др.] // JCAP. — 2017. — T. 08. — C. 038. — DOI: [10.1088/1475-7516/2017/08/038](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2017/08/038). — arXiv: [1705.06626](https://arxiv.org/abs/1705.06626) [hep-th].
86. *Cai Y., Piao Y.-S.* A covariant Lagrangian for stable nonsingular bounce // JHEP. — 2017. — T. 09. — C. 027. — DOI: [10.1007/JHEP09\(2017\)027](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2017)027). — arXiv: [1705.03401](https://arxiv.org/abs/1705.03401) [gr-qc].

87. The Effective Field Theory of nonsingular cosmology: II / Y. Cai [и др.] // Eur. Phys. J. C. — 2017. — Т. 77, № 6. — С. 369. — DOI: [10.1140/epjc/s10052-017-4938-y](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-4938-y). — arXiv: [1701.04330](https://arxiv.org/abs/1701.04330) [gr-qc].
88. *Mironov S., Rubakov V., Volkova V.* Bounce beyond Horndeski with GR asymptotics and γ -crossing // JCAP. — 2018. — Т. 10. — С. 050. — DOI: [10.1088/1475-7516/2018/10/050](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2018/10/050). — arXiv: [1807.08361](https://arxiv.org/abs/1807.08361) [hep-th].
89. *Mironov S., Rubakov V., Volkova V.* Genesis with general relativity asymptotics in beyond Horndeski theory // Phys. Rev. D. — 2019. — Т. 100, № 8. — С. 083521. — DOI: [10.1103/PhysRevD.100.083521](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.083521). — arXiv: [1905.06249](https://arxiv.org/abs/1905.06249) [hep-th].
90. *Mironov S., Rubakov V., Volkova V.* Subluminal cosmological bounce beyond Horndeski // JCAP. — 2020. — Т. 05. — С. 024. — DOI: [10.1088/1475-7516/2020/05/024](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2020/05/024). — arXiv: [1910.07019](https://arxiv.org/abs/1910.07019) [hep-th].
91. *Mironov S., Rubakov V., Volkova V.* Cosmological scenarios with bounce and Genesis in Horndeski theory and beyond: An essay in honor of I.M. Khalatnikov on the occasion of his 100th birthday. — 2019. — Июнь. — DOI: [10.1134/S0044451019100079](https://doi.org/10.1134/S0044451019100079), [10.1134/S1063776119100236](https://doi.org/10.1134/S1063776119100236). — arXiv: [1906.12139](https://arxiv.org/abs/1906.12139) [hep-th].
92. DHOST Bounce / A. Ilyas [и др.] // JCAP. — 2020. — Т. 09. — С. 002. — DOI: [10.1088/1475-7516/2020/09/002](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2020/09/002). — arXiv: [2002.08269](https://arxiv.org/abs/2002.08269) [gr-qc].
93. Emergent Universe and Genesis from the DHOST Cosmology / A. Ilyas [и др.] // JHEP. — 2021. — Т. 01. — С. 141. — DOI: [10.1007/JHEP01\(2021\)141](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2021)141). — arXiv: [2009.10351](https://arxiv.org/abs/2009.10351) [gr-qc].
94. Scalar and tensor perturbations in DHOST bounce cosmology / M. Zhu [и др.] // JCAP. — 2021. — Т. 11, № 11. — С. 045. — DOI: [10.1088/1475-7516/2021/11/045](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2021/11/045). — arXiv: [2108.01339](https://arxiv.org/abs/2108.01339) [gr-qc].
95. *Zhu M., Zheng Y.* Improved DHOST Genesis // JHEP. — 2021. — Т. 11. — С. 163. — DOI: [10.1007/JHEP11\(2021\)163](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2021)163). — arXiv: [2109.05277](https://arxiv.org/abs/2109.05277) [gr-qc].
96. Perturbative unitarity and NEC violation in genesis cosmology / Y. Cai [и др.] // JHEP. — 2022. — Т. 10. — С. 140. — DOI: [10.1007/JHEP10\(2022\)140](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2022)140). — arXiv: [2207.11772](https://arxiv.org/abs/2207.11772) [gr-qc]. — [Erratum: JHEP 11, 063 (2022)].

97. *Ageeva Y., Petrov P., Rubakov V.* Horndeski genesis: consistency of classical theory // JHEP. — 2020. — Т. 12. — С. 107. — DOI: [10.1007/JHEP12\(2020\)107](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2020)107). — arXiv: [2009.05071](https://arxiv.org/abs/2009.05071) [hep-th].
98. Toward evading the strong coupling problem in Horndeski genesis / Y. Ageeva [и др.] // Phys. Rev. D. — 2020. — Т. 102, № 2. — С. 023519. — DOI: [10.1103/PhysRevD.102.023519](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.023519). — arXiv: [2003.01202](https://arxiv.org/abs/2003.01202) [hep-th].
99. *Ageeva Y., Petrov P., Rubakov V.* Nonsingular cosmological models with strong gravity in the past // Phys. Rev. D. — 2021. — Т. 104, № 6. — С. 063530. — DOI: [10.1103/PhysRevD.104.063530](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.104.063530). — arXiv: [2104.13412](https://arxiv.org/abs/2104.13412) [hep-th].
100. *Buchdahl H. A.* On a Lagrangian for non-minimally coupled gravitational and electromagnetic fields // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1979. — Июль. — Т. 12, № 7. — С. 1037. — DOI: [10.1088/0305-4470/12/7/020](https://doi.org/10.1088/0305-4470/12/7/020). — URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/12/7/020>.
101. *Mueller-Hoissen F.* Modification of Einstein Yang-Mills Theory From Dimensional Reduction of the Gauss-Bonnet Action // Class. Quant. Grav. — 1988. — Т. 5. — С. L35. — DOI: [10.1088/0264-9381/5/1/008](https://doi.org/10.1088/0264-9381/5/1/008).
102. *Charmousis C.* Higher order gravity theories and their black hole solutions // Lect. Notes Phys. / под ред. E. Papantonopoulos. — 2009. — Т. 769. — С. 299—346. — DOI: [10.1007/978-3-540-88460-6_8](https://doi.org/10.1007/978-3-540-88460-6_8). — arXiv: [0805.0568](https://arxiv.org/abs/0805.0568) [gr-qc].
103. *Nicolis A., Rattazzi R., Trincherini E.* Galileon as a local modification of gravity // Physical Review D. — 2009. — Т. 79, № 6. — С. 064036.
104. *Van Acoleyen K., Van Doorsselaere J.* Galileons from Lovelock actions // Phys. Rev. D. — 2011. — Т. 83. — С. 084025. — DOI: [10.1103/PhysRevD.83.084025](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.084025). — arXiv: [1102.0487](https://arxiv.org/abs/1102.0487) [gr-qc].
105. *Rham C. de, Tolley A. J.* DBI and the Galileon reunited // JCAP. — 2010. — Т. 05. — С. 015. — DOI: [10.1088/1475-7516/2010/05/015](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2010/05/015). — arXiv: [1003.5917](https://arxiv.org/abs/1003.5917) [hep-th].
106. *Trodden M., Hinterbichler K.* Generalizing Galileons // Class. Quant. Grav. — 2011. — Т. 28. — С. 204003. — DOI: [10.1088/0264-9381/28/20/204003](https://doi.org/10.1088/0264-9381/28/20/204003). — arXiv: [1104.2088](https://arxiv.org/abs/1104.2088) [hep-th].

107. The Stringy Origins of Galileons and their Novel Limit / D. Easson [и др.] // JCAP. — 2021. — Т. 05. — С. 031. — DOI: [10.1088/1475-7516/2021/05/031](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2021/05/031). — arXiv: [2012.12277](https://arxiv.org/abs/2012.12277) [hep-th].
108. Charmousis C. From Lovelock to Horndeski's Generalized Scalar Tensor Theory // Lect. Notes Phys. / под ред. E. Papantonopoulos. — 2015. — Т. 892. — С. 25—56. — DOI: [10.1007/978-3-319-10070-8_2](https://doi.org/10.1007/978-3-319-10070-8_2). — arXiv: [1405.1612](https://arxiv.org/abs/1405.1612) [gr-qc].
109. Deffayet C., Deser S., Esposito-Farese G. Generalized Galileons: All scalar models whose curved background extensions maintain second-order field equations and stress-tensors // Phys. Rev. D. — 2009. — Т. 80. — С. 064015. — DOI: [10.1103/PhysRevD.80.064015](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.80.064015). — arXiv: [0906.1967](https://arxiv.org/abs/0906.1967) [gr-qc].
110. From k-essence to generalised Galileons / C. Deffayet [и др.] // Phys. Rev. D. — 2011. — Т. 84. — С. 064039. — DOI: [10.1103/PhysRevD.84.064039](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.84.064039). — arXiv: [1103.3260](https://arxiv.org/abs/1103.3260) [hep-th].
111. Horndeski G. W. Conservation of Charge and the Einstein-Maxwell Field Equations // J. Math. Phys. — 1976. — Т. 17. — С. 1980—1987. — DOI: [10.1063/1.522837](https://doi.org/10.1063/1.522837).
112. Heisenberg L. Generalization of the Proca Action // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2014. — Май. — Т. 2014, № 05. — С. 015—015. — ISSN 1475-7516. — DOI: [10.1088/1475-7516/2014/05/015](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2014/05/015). — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2014/05/015>.
113. De Felice A., Naruko A. On metric transformations with a $U(1)$ gauge field // Physical Review D. — 2020. — Апр. — Т. 101, № 8. — ISSN 2470-0029. — DOI: [10.1103/physrevd.101.084044](https://doi.org/10.1103/physrevd.101.084044). — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.101.084044>.
114. Gumrukcuoglu A. E., Namba R. Role of matter in gravitation: going beyond the Einstein-Maxwell theory // Phys. Rev. D. — 2019. — Т. 100. — С. 124064. — DOI: [10.1103/PhysRevD.100.124064](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.124064). — arXiv: [1907.12292](https://arxiv.org/abs/1907.12292) [hep-th].
115. Horndeski speed tests with scalar-photon couplings / E. Babichev [и др.]. — 2024. — Июль. — arXiv: [2407.20339](https://arxiv.org/abs/2407.20339) [gr-qc].

116. *Mironov S., Sharov M., Volkova V.* Linear stability of a time-dependent, spherically symmetric background in beyond Horndeski theory and the speed of gravity waves. — 2024. — ABR. — arXiv: [2408.01480 \[gr-qc\]](#).
117. *Vainshtein A. I.* To the problem of nonvanishing gravitation mass // Phys. Lett. B. — 1972. — T. 39. — C. 393—394. — DOI: [10.1016/0370-2693\(72\)90147-5](#).
118. *Babichev E., Deffayet C.* An introduction to the Vainshtein mechanism // Class. Quant. Grav. — 2013. — T. 30. — C. 184001. — DOI: [10.1088/0264-9381/30/18/184001](#). — arXiv: [1304.7240 \[gr-qc\]](#).
119. Beyond the Cosmological Standard Model / A. Joyce [и др.] // Phys. Rept. — 2015. — T. 568. — C. 1—98. — DOI: [10.1016/j.physrep.2014.12.002](#). — arXiv: [1407.0059 \[astro-ph.CO\]](#).
120. *Koyama K., Niz G., Tasinato G.* Effective theory for the Vainshtein mechanism from the Horndeski action // Phys. Rev. D. — 2013. — T. 88. — C. 021502. — DOI: [10.1103/PhysRevD.88.021502](#). — arXiv: [1305.0279 \[hep-th\]](#).
121. The 4D Einstein–Gauss–Bonnet theory of gravity: a review / P. G. S. Fernandes [и др.] // Class. Quant. Grav. — 2022. — T. 39, № 6. — C. 063001. — DOI: [10.1088/1361-6382/ac500a](#). — arXiv: [2202.13908 \[gr-qc\]](#).
122. *Padilla A., Sivanesan V.* Covariant multi-galileons and their generalisation // JHEP. — 2013. — T. 04. — C. 032. — DOI: [10.1007/JHEP04\(2013\)032](#). — arXiv: [1210.4026 \[gr-qc\]](#).
123. *Akama S., Kobayashi T.* Generalized multi-Galileons, covariantized new terms, and the no-go theorem for nonsingular cosmologies // Phys. Rev. D. — 2017. — T. 95, № 6. — C. 064011. — DOI: [10.1103/PhysRevD.95.064011](#). — arXiv: [1701.02926 \[hep-th\]](#).

А Выражения для коэффициентов A_i в квадратичном действии для возмущений над изотропным фоном

Выражения для коэффициентов A_i в терминах функций лагранжиана в главе 1:

$$A_1 = 3 \left[-2G_4 + 4G_{4X}\dot{\pi}^2 - G_{5\pi}\dot{\pi}^2 + 2HG_{5X}\dot{\pi}^3 \right], \quad (\text{A.1})$$

$$A_2 = 2G_4 - 2G_{5X}\dot{\pi}^2\ddot{\pi} - G_{5\pi}\dot{\pi}^2, \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} A_3 = & F_X\dot{\pi}^2 + 2F_{XX}\dot{\pi}^4 + 12HK_X\dot{\pi}^3 + 6HK_{XX}\dot{\pi}^5 - K_\pi\dot{\pi}^2 - K_{\pi X}\dot{\pi}^4 \\ & - 6H^2G_4 + 42H^2G_{4X}\dot{\pi}^2 + 96H^2G_{4XX}\dot{\pi}^4 + 24H^2G_{4XXX}\dot{\pi}^6 \\ & - 6HG_{4\pi}\dot{\pi} - 30HG_{4\pi X}\dot{\pi}^3 - 12HG_{4\pi XX}\dot{\pi}^5 + 30H^3G_{5X}\dot{\pi}^3 \\ & + 26H^3G_{5XX}\dot{\pi}^5 + 4H^3G_{5XXX}\dot{\pi}^7 - 18H^2G_{5\pi}\dot{\pi}^2 - 27H^2G_{5\pi X}\dot{\pi}^4 \\ & - 6H^2G_{5\pi XX}\dot{\pi}^6, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} A_4 = & 2 \left[K_X\dot{\pi}^3 - 2G_4H + 8HG_{4X}\dot{\pi}^2 + 8HG_{4XX}\dot{\pi}^4 - G_{4\pi}\dot{\pi} - 2G_{4\pi X}\dot{\pi}^3 \right. \\ & \left. + 5H^2G_{5X}\dot{\pi}^3 + 2H^2G_{5XX}\dot{\pi}^5 - 3HG_{5\pi}\dot{\pi}^2 - 2HG_{5\pi X}\dot{\pi}^4 \right], \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$A_5 = -\frac{2}{3}A_1, \quad (\text{A.5})$$

$$A_6 = -3A_4, \quad (\text{A.6})$$

$$A_7 = -A_5, \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} A_8 = & 2 \left[K_X\dot{\pi}^2 - G_{4\pi} - 2G_{4\pi X}\dot{\pi}^2 + 4HG_{4X}\dot{\pi} + 8HG_{4XX}\dot{\pi}^3 - 2HG_{5\pi}\dot{\pi} \right. \\ & \left. - 2HG_{5\pi X}\dot{\pi}^3 + 3H^2G_{5X}\dot{\pi}^2 + 2H^2G_{5XX}\dot{\pi}^4 \right], \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$A_9 = -A_8, \quad (\text{A.9})$$

$$A_{10} = -3A_8, \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned}
A_{11} = & 2 \left[-F_X \dot{\pi} - 2F_{XX} \dot{\pi}^3 + K_\pi \dot{\pi} - 6HK_X \dot{\pi}^4 - 9HK_X \dot{\pi}^2 + K_{\pi X} \dot{\pi}^3 \right. \\
& + 3HG_{4\pi} + 24HG_{4\pi X} \dot{\pi}^2 + 12HG_{4\pi XX} \dot{\pi}^4 - 18H^2G_{4X} \dot{\pi} - 72H^2G_{4XX} \dot{\pi}^3 \\
& - 24H^2G_{4XXX} \dot{\pi}^5 + 9H^2G_{5\pi} \dot{\pi} + 21H^2G_{5\pi X} \dot{\pi}^3 + 6H^2G_{5\pi XX} \dot{\pi}^5 \\
& \left. - 15H^3G_{5X} \dot{\pi}^2 - 20H^3G_{5XX} \dot{\pi}^4 - 4H^3G_{5XXX} \dot{\pi}^6 \right], \tag{A.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{12} = & 2 \left[F_X \dot{\pi} - K_\pi \dot{\pi} + 3HK_X \dot{\pi}^2 - HG_{4\pi} + G_{4\pi\pi} \dot{\pi} - 10HG_{4\pi X} \dot{\pi}^2 + 6H^2G_{4X} \dot{\pi} \right. \\
& + 12H^2G_{4XX} \dot{\pi}^3 - 3H^2G_{5\pi} \dot{\pi} + HG_{5\pi\pi} \dot{\pi}^2 - 4H^2G_{5\pi X} \dot{\pi}^3 + 3H^3G_{5X} \dot{\pi}^2 \\
& \left. + 2H^3G_{5XX} \dot{\pi}^4 \right], \tag{A.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{13} = & 2 \left[4HG_{4X} \dot{\pi} + 4G_{4X} \ddot{\pi} + 8G_{4XX} \dot{\pi}^2 \ddot{\pi} - 2G_{4\pi} + 4G_{4\pi X} \dot{\pi}^2 + 2H^2G_{5X} \dot{\pi}^2 \right. \\
& + 2\dot{H}G_{5X} \dot{\pi}^2 + 4HG_{5X} \dot{\pi} \ddot{\pi} + 4HG_{5XX} \dot{\pi}^3 \ddot{\pi} - 2HG_{5\pi} \dot{\pi} - 2G_{5\pi} \ddot{\pi} + 2HG_{5\pi X} \dot{\pi}^3 \\
& \left. - 2G_{5\pi X} \dot{\pi}^2 \ddot{\pi} - G_{5\pi\pi} \dot{\pi}^2 \right], \tag{A.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{14} = & F_X + 2F_{XX} \dot{\pi}^2 - K_\pi + 6HK_X \dot{\pi} - K_{\pi X} \dot{\pi}^2 + 6HK_{XX} \dot{\pi}^3 + 6H^2G_{4X} \\
& - 18HG_{4\pi X} \dot{\pi} + 48H^2G_{4XX} \dot{\pi}^2 - 12HG_{4\pi XX} \dot{\pi}^3 + 24H^2G_{4XXX} \dot{\pi}^4 + 6H^3G_{5X} \dot{\pi} \\
& - 3H^2G_{5\pi} - 15H^2G_{5\pi X} \dot{\pi}^2 + 14H^3G_{5XX} \dot{\pi}^3 + 4H^3G_{5XXX} \dot{\pi}^5 - 6H^2G_{5\pi XX} \dot{\pi}^4, \tag{A.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{15} = & -F_X - 4HK_X \dot{\pi} - 2K_X \ddot{\pi} + K_\pi - K_{\pi X} \dot{\pi}^2 - 2K_{XX} \dot{\pi}^2 \ddot{\pi} - 6H^2G_{4X} \\
& - 4\dot{H}G_{4X} - 20H^2G_{4XX} \dot{\pi}^2 - 8\dot{H}G_{4XX} \dot{\pi}^2 - 24HG_{4XX} \dot{\pi} \ddot{\pi} + 12HG_{4\pi X} \dot{\pi} \\
& + 6G_{4\pi X} \ddot{\pi} - 16HG_{4XXX} \dot{\pi}^3 \ddot{\pi} - 8HG_{4\pi XX} \dot{\pi}^3 + 4G_{4\pi XX} \dot{\pi}^2 \ddot{\pi} + 2G_{4\pi\pi X} \dot{\pi}^2 \\
& - 4H^3G_{5X} \dot{\pi} - 4H\dot{H}G_{5X} \dot{\pi} - 2H^2G_{5X} \ddot{\pi} + 3H^2G_{5\pi} + 2\dot{H}G_{5\pi} + 5H^2G_{5\pi X} \dot{\pi}^2 \\
& + 2\dot{H}G_{5\pi X} \dot{\pi}^2 + 8HG_{5\pi X} \dot{\pi} \ddot{\pi} - 4H^3G_{5XX} \dot{\pi}^3 - 4H\dot{H}G_{5XX} \dot{\pi}^3 - 10H^2G_{5XX} \dot{\pi}^2 \ddot{\pi} \\
& - 4H^2G_{5XXX} \dot{\pi}^4 \ddot{\pi} - 2H^2G_{5\pi XX} \dot{\pi}^4 + 4HG_{5\pi XX} \dot{\pi}^3 \ddot{\pi} + 2HG_{5\pi\pi X} \dot{\pi}^3, \tag{A.15}
\end{aligned}$$

$$A_{16} = 0, \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}
A_{17} = & F_\pi - 2F_{\pi X} \dot{\pi}^2 + K_{\pi\pi} \dot{\pi}^2 - 6HK_{\pi X} \dot{\pi}^3 + 6G_{4\pi} H^2 + 6G_{4\pi\pi} H \dot{\pi} - 24G_{4\pi X} H^2 \dot{\pi}^2 \\
& + 12G_{4\pi\pi X} H \dot{\pi}^3 - 24G_{4\pi XX} H^2 \dot{\pi}^4 + 9G_{5\pi\pi} H^2 \dot{\pi}^2 - 10G_{5\pi X} H^3 \dot{\pi}^3 + 6G_{5\pi\pi X} H^2 \dot{\pi}^4 \\
& - 4G_{5\pi XX} H^3 \dot{\pi}^5, \tag{A.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{18} = & -6F_X\dot{\pi} + 6K_\pi\dot{\pi} - 36HK_X\dot{\pi}^2 - 12K_X\dot{\pi}\ddot{\pi} \\
& - 6K_{\pi X}\dot{\pi}^3 - 12K_{XX}\dot{\pi}^3\ddot{\pi} + 24G_{4\pi}H - 24G_{4X}H\ddot{\pi} \\
& - 108G_{4X}H^2\dot{\pi} - 24G_{4X}\dot{H}\dot{\pi} + 72G_{4\pi X}H\dot{\pi}^2 - 216G_{4XX}H^2\dot{\pi}^3 \\
& - 48G_{4XX}\dot{H}\dot{\pi}^3 + 36G_{4\pi X}\dot{\pi}\ddot{\pi} - 192G_{4XX}H\dot{\pi}^2\ddot{\pi} + 24G_{4\pi XX}\dot{\pi}^3\ddot{\pi} \\
& - 96G_{4XXX}H\dot{\pi}^4\ddot{\pi} - 48G_{4\pi XX}H\dot{\pi}^4 + 12G_{4\pi\pi X}\dot{\pi}^3 + 54G_{5\pi}H^2\dot{\pi} \\
& + 12G_{5\pi}\dot{H}\dot{\pi} + 12G_{5\pi}H\ddot{\pi} - 36G_{5X}H^2\dot{\pi}\ddot{\pi} - 72G_{5X}H^3\dot{\pi}^2 \\
& - 36G_{5X}H\dot{H}\dot{\pi}^2 + 6G_{5\pi\pi}H\dot{\pi}^2 + 42G_{5\pi X}H^2\dot{\pi}^3 + 12G_{5\pi X}\dot{H}\dot{\pi}^3 \\
& + 60G_{5\pi X}H\dot{\pi}^2\ddot{\pi} - 84G_{5XX}H^2\dot{\pi}^3\ddot{\pi} - 48G_{5XX}H^3\dot{\pi}^4 - 24G_{5XX}H\dot{H}\dot{\pi}^4 \\
& + 12G_{5\pi\pi X}H\dot{\pi}^4 - 12G_{5\pi XX}H^2\dot{\pi}^5 + 24G_{5\pi XX}H\dot{\pi}^4\ddot{\pi} - 24G_{5XXX}H^2\dot{\pi}^5\ddot{\pi}, \quad (A.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{19} = & 3F_\pi - 18F_XH\dot{\pi} - 6F_X\ddot{\pi} - 6F_{\pi X}\dot{\pi}^2 - 12F_{XX}\dot{\pi}^2\ddot{\pi} \\
& + 18HK_\pi\dot{\pi} + 6K_\pi\ddot{\pi} - 54H^2K_X\dot{\pi}^2 - 36HK_X\dot{\pi}\ddot{\pi} - 18\dot{H}K_X\dot{\pi}^2 \\
& - 36HK_{XX}\dot{\pi}^3\ddot{\pi} + 3K_{\pi\pi}\dot{\pi}^2 - 18HK_{\pi X}\dot{\pi}^3 + 6K_{\pi X}\dot{\pi}^2\ddot{\pi} + 36G_{4\pi}H^2 + 18G_{4\pi}\dot{H} \\
& - 108G_{4X}H^3\dot{\pi} - 72G_{4X}H\dot{H}\dot{\pi} - 36G_{4X}H^2\ddot{\pi} + 108G_{4\pi X}H^2\dot{\pi}^2 + 36G_{4\pi X}\dot{H}\dot{\pi}^2 \\
& + 108G_{4\pi X}H\dot{\pi}\ddot{\pi} - 288G_{4XX}H^2\dot{\pi}^2\ddot{\pi} - 216G_{4XX}H^3\dot{\pi}^3 - 144G_{4XX}H\dot{H}\dot{\pi}^3 \\
& - 72G_{4\pi XX}H^2\dot{\pi}^4 + 36G_{4\pi\pi X}H\dot{\pi}^3 + 72G_{4\pi XX}H\dot{\pi}^3\ddot{\pi} - 144G_{4XXX}H^2\dot{\pi}^4\ddot{\pi} \\
& + 54G_{5\pi}H^3\dot{\pi} + 36G_{5\pi}H\dot{H}\dot{\pi} + 18G_{5\pi}H^2\ddot{\pi} - 36G_{5X}H^3\dot{\pi}\ddot{\pi} - 54G_{5X}H^4\dot{\pi}^2 \\
& - 54G_{5X}H^2\dot{H}\dot{\pi}^2 + 9G_{5\pi\pi}H^2\dot{\pi}^2 + 42G_{5\pi X}H^3\dot{\pi}^3 + 36G_{5\pi X}H\dot{H}\dot{\pi}^3 + 90G_{5\pi X}H^2\dot{\pi}^2\ddot{\pi} \\
& - 84G_{5XX}H^3\dot{\pi}^3\ddot{\pi} - 36G_{5XX}H^4\dot{\pi}^4 - 36G_{5XX}H^2\dot{H}\dot{\pi}^4 + 18G_{5\pi\pi X}H^2\dot{\pi}^4 \\
& - 12G_{5\pi XX}H^3\dot{\pi}^5 + 36G_{5\pi XX}H^2\dot{\pi}^4\ddot{\pi} - 24G_{5XXX}H^3\dot{\pi}^5\ddot{\pi}, \quad (A.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{20} = & \frac{1}{2}F_{\pi\pi} - 3F_{\pi X}H\dot{\pi} - F_{\pi X}\ddot{\pi} - F_{\pi\pi X}\dot{\pi}^2 - 2F_{\pi XX}\dot{\pi}^2\ddot{\pi} \\
& - 9H^2K_{\pi X}\dot{\pi}^2 - 3\dot{H}K_{\pi X}\dot{\pi}^2 - 6HK_{\pi X}\dot{\pi}\ddot{\pi} + 3HK_{\pi\pi}\dot{\pi} + K_{\pi\pi}\ddot{\pi} \\
& + \frac{1}{2}K_{\pi\pi\pi}\dot{\pi}^2 - 3HK_{\pi\pi X}\dot{\pi}^3 + K_{\pi\pi X}\dot{\pi}^2\ddot{\pi} - 6HK_{\pi XX}\dot{\pi}^3\ddot{\pi} \\
& + 6G_{4\pi\pi}H^2 + 3G_{4\pi\pi}\dot{H} - 18G_{4\pi X}H^3\dot{\pi} - 12G_{4\pi X}H\dot{H}\dot{\pi} - 6G_{4\pi X}H^2\ddot{\pi} \\
& + 18G_{4\pi\pi X}H^2\dot{\pi}^2 + 6G_{4\pi\pi X}\dot{H}\dot{\pi}^2 - 36G_{4\pi XX}H^3\dot{\pi}^3 - 48G_{4\pi XX}H^2\dot{\pi}^2\ddot{\pi} \\
& - 24G_{4\pi XX}H\dot{H}\dot{\pi}^3 - 12G_{4\pi\pi XX}H^2\dot{\pi}^4 + 18G_{4\pi\pi X}H\dot{\pi}\ddot{\pi} + 12G_{4\pi\pi XX}H\dot{\pi}^3\ddot{\pi} \\
& - 24G_{4\pi XXX}H^2\dot{\pi}^4\ddot{\pi} + 6G_{4\pi\pi\pi X}H\dot{\pi}^3 + 9G_{5\pi\pi}H^3\dot{\pi} + 6G_{5\pi\pi}H\dot{H}\dot{\pi} + 3G_{5\pi\pi}H^2\ddot{\pi} \\
& - 6G_{5\pi X}H^3\dot{\pi}\ddot{\pi} - 9G_{5\pi X}H^4\dot{\pi}^2 - 9G_{5\pi X}H^2\dot{H}\dot{\pi}^2 + \frac{3}{2}G_{5\pi\pi\pi}H^2\dot{\pi}^2 + 7G_{5\pi\pi X}H^3\dot{\pi}^3 \\
& + 6G_{5\pi\pi X}H\dot{H}\dot{\pi}^3 - 6G_{5\pi XX}H^4\dot{\pi}^4 - 6G_{5\pi XX}H^2\dot{H}\dot{\pi}^4 + 15G_{5\pi\pi X}H^2\dot{\pi}^2\ddot{\pi} \\
& - 14G_{5\pi XXX}H^3\dot{\pi}^3\ddot{\pi} + 6G_{5\pi\pi XX}H^2\dot{\pi}^4\ddot{\pi} - 2G_{5\pi\pi XX}H^3\dot{\pi}^5 + 3G_{5\pi\pi\pi X}H^2\dot{\pi}^4 \\
& - 4G_{5\pi XXX}H^3\dot{\pi}^5\ddot{\pi}, \tag{A.20}
\end{aligned}$$

$$A_{21} = -\frac{2}{a^3}\frac{d}{dt} [A_{12}a^3], \tag{A.21}$$

$$A_{22} = A_8, \tag{A.22}$$

$$A_{23} = -A_{12} - \frac{1}{a^3}\frac{d}{dt} [A_9a^3], \tag{A.23}$$

$$A_{24} = -A_4, \tag{A.24}$$

$$A_{25} = -\frac{1}{a^3}\frac{d}{dt} [A_4a^3], \tag{A.25}$$

$$A_{26} = \frac{2}{3}A_1, \tag{A.26}$$

$$A_{27} = \frac{2}{3}\frac{1}{a^3}\frac{d}{dt} [A_1a^3]. \tag{A.27}$$

В Выражения для коэффициентов A_i и B_{ij} в квадратичном действии для возмущений над анизотропным фоном

Выражения для коэффициентов A_i в терминах функций лагранжиана представлены в главе 2. Здесь и далее маленькие латинские индексы пробегает значения

a, b, c , и подразумевается, что $i \neq j \neq k$:

$$A_1 = -6G_4 + 12G_{4X}(\dot{\pi})^2, \quad (\text{B.1})$$

$$A_2 = 2G_4, \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} A_3 = & F_X(\dot{\pi})^2 + 2F_{XX}(\dot{\pi})^4 + 4(H_a + H_b + H_c)K_X(\dot{\pi})^3 - K_\pi(\dot{\pi})^2 \\ & - K_{X\pi}(\dot{\pi})^4 + 2(H_a + H_b + H_c)K_{XX}(\dot{\pi})^5 - 2(H_aH_b + H_aH_c + H_bH_c)G_4 \\ & + 14(H_aH_b + H_aH_c + H_bH_c)G_{4X}(\dot{\pi})^2 + 32(H_aH_b + H_aH_c + H_bH_c)G_{4XX}(\dot{\pi})^4 \\ & - 10(H_a + H_b + H_c)G_{4X\pi}(\dot{\pi})^3 - 2(H_a + H_b + H_c)G_{4\pi}\dot{\pi} \\ & + 8(H_aH_b + H_aH_c + H_bH_c)G_{4XXX}(\dot{\pi})^6 - 4(H_a + H_b + H_c)G_{4XX\pi}(\dot{\pi})^5, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} A_4^i = & 2K_X(\dot{\pi})^3 - 2(H_j + H_k)G_4 + 8(H_j + H_k)G_{4X}(\dot{\pi})^2 \\ & - 4G_{4X\pi}(\dot{\pi})^3 - 2G_{4\pi}\dot{\pi} + 8(H_j + H_k)G_{4XX}(\dot{\pi})^4, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$A_5 = -\frac{1}{3}A_1 \quad (\text{B.5})$$

$$A_6^i = -A_4^i \quad (\text{B.6})$$

$$A_7 = \frac{1}{3}A_1 \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} A_8^i = & 2K_X(\dot{\pi})^2 - 2G_{4\pi} + 4(H_j + H_k)G_{4X}\dot{\pi} + 8(H_j + H_k)G_{4XX}(\dot{\pi})^3 \\ & - 4G_{4X\pi}(\dot{\pi})^2, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$A_9^i = A_{10}^i = -A_8^i \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} A_{11} = & -2F_X\dot{\pi} - 4F_{XX}(\dot{\pi})^3 + 2K_{X\pi}(\dot{\pi})^3 + 2K_\pi\dot{\pi} - 4(H_a + H_b + H_c)K_{XX}(\dot{\pi})^4 \\ & - 6(H_a + H_b + H_c)K_X(\dot{\pi})^2 - 12(H_bH_c + H_aH_c + H_aH_b)G_{4X}\dot{\pi} \\ & - 48(H_bH_c + H_aH_c + H_aH_b)G_{4XX}(\dot{\pi})^3 + 16(H_a + H_b + H_c)G_{4X\pi}(\dot{\pi})^2 \\ & + 2(H_a + H_b + H_c)G_{4\pi} - 16(H_aH_b + H_aH_c + H_bH_c)G_{4XXX}(\dot{\pi})^5 \\ & + 8(H_a + H_b + H_c)G_{4XX\pi}(\dot{\pi})^4, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned}
A_{12} = & 2F_X\dot{\pi} + 2(H_a + H_b + H_c)K_X(\dot{\pi})^2 - 2K_\pi\dot{\pi} \\
& + 4(H_bH_c + H_aH_c + H_aH_b)G_{4X}\dot{\pi} + 2G_{4\pi\pi}\dot{\pi} - 2G_{4\pi}H_a \\
& + 8(H_aH_b + H_aH_c + H_bH_c)G_{4XX}(\dot{\pi})^3 - 8(H_a + H_b + H_c)G_{4X\pi}(\dot{\pi})^2,
\end{aligned} \tag{B.11}$$

$$A_{13}^{ij} = -2G_{4\pi} + 4G_{4X}\ddot{\pi} + 4G_{4X}H_k\dot{\pi} + 4G_{4X\pi}(\dot{\pi})^2 + 8G_{4XX}\ddot{\pi}(\dot{\pi})^2 \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}
A_{14} = & 2F_{XX}(\dot{\pi})^2 + F_X - K_\pi - K_{X\pi}(\dot{\pi})^2 + 2(H_a + H_b + H_c)K_{XX}(\dot{\pi})^3 \\
& + 2(H_a + H_b + H_c)K_X\dot{\pi} - 6(H_a + H_b + H_c)G_{4X\pi}\dot{\pi} \\
& + 16(H_aH_b + H_aH_c + H_bH_c)G_{4XX}(\dot{\pi})^2 + 2(H_aH_b + H_aH_c + H_bH_c)G_{4X}, \\
& - 4(H_a + H_b + H_c)G_{4XX\pi}(\dot{\pi})^3 + 8(H_aH_b + H_aH_c + H_bH_c)G_{4XXX}(\dot{\pi})^4,
\end{aligned} \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}
A_{15}^i = & -F_X + K_\pi - K_{X\pi}(\dot{\pi})^2 - 2K_{XX}\ddot{\pi}(\dot{\pi})^2 - 2K_X\ddot{\pi} \\
& - 2(H_j + H_k)K_X\dot{\pi} + 6G_{4X\pi}\ddot{\pi} + 6(H_j + H_k)G_{4X\pi}\dot{\pi} \\
& + 4G_{4XX\pi}\ddot{\pi}(\dot{\pi})^2 - 4(H_j + H_k)G_{4XX\pi}(\dot{\pi})^3 - 8(H_j + H_k)G_{4XXX}\ddot{\pi}(\dot{\pi})^3 \\
& - 12(H_j + H_k)G_{4XX}\dot{\pi}\ddot{\pi} - 4\left(H_j^2 + \dot{H}_j + H_k^2 + \dot{H}_k + 3H_jH_k\right)G_{4XX}(\dot{\pi})^2 \\
& + 2G_{4X\pi\pi}(\dot{\pi})^2 - 2\left(\dot{H}_j + H_j^2 + \dot{H}_k + H_k^2 + H_jH_k\right)G_{4X},
\end{aligned} \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned}
A_{17} = & F_\pi - 2F_{X\pi}(\dot{\pi})^2 - 8(H_bH_c + H_aH_c + H_aH_b)G_{4X\pi}(\dot{\pi})^2 \\
& + 2(H_a + H_b + H_c)G_{4\pi\pi}\dot{\pi} - 8(H_aH_b + H_aH_c + H_bH_c)G_{4XX\pi}(\dot{\pi})^4 \\
& + 4(H_a + H_b + H_c)G_{4X\pi\pi}(\dot{\pi})^3 + K_{\pi\pi}(\dot{\pi})^2 - 2(H_a + H_b + H_c)K_{X\pi}(\dot{\pi})^3 \\
& + 2(H_aH_c + H_bH_c + H_aH_b)G_{4\pi},
\end{aligned} \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}
A_{18}^i = & -2F_X\dot{\pi} - 2K_{X\pi}(\dot{\pi})^3 + 2K_\pi\dot{\pi} - 4K_{XX}\ddot{\pi}(\dot{\pi})^3 - 4K_X\dot{\pi}\ddot{\pi} \\
& - 4(H_a + H_b + H_c)K_X(\dot{\pi})^2 - 4\left(\dot{H}_j + \dot{H}_k + (H_j + H_k)^2 + \right. \\
& \left. 2H_bH_c + 2H_aH_b + 2H_aH_c\right)G_{4X}\dot{\pi} + 4G_{4X\pi\pi}(\dot{\pi})^3 + 8G_{4XX\pi}\ddot{\pi}(\dot{\pi})^3 \\
& + 12G_{4X\pi}\dot{\pi}\ddot{\pi} + 8(H_a + H_b + H_c)G_{4X\pi}(\dot{\pi})^2 + 2(H_j + H_k + 2H_i)G_{4\pi} \\
& - 8\left((H_j + H_k)^2 + \dot{H}_j + \dot{H}_k + 2H_iH_j + 2H_iH_k + H_jH_k\right)G_{4XX}(\dot{\pi})^3 \\
& - 8(H_j + H_k)G_{4XX\pi}(\dot{\pi})^4 - 16(H_j + H_k)G_{4XXX}\ddot{\pi}(\dot{\pi})^4 \\
& - 32(H_j + H_k)G_{4XX}\ddot{\pi}(\dot{\pi})^2 - 4(H_j + H_k)G_{4X}\ddot{\pi},
\end{aligned} \tag{B.16}$$

$$A_{19} = 0 - \text{ на уравнениях движения,} \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned}
A_{20} = & \frac{1}{2} F_{\pi\pi} - F_{X\pi\pi} (\dot{\pi})^2 - 2 F_{XX\pi} \ddot{\pi} (\dot{\pi})^2 - F_{X\pi} \ddot{\pi} \\
& - (H_a + H_b + H_c) F_{X\pi} \dot{\pi} + K_{\pi\pi} \ddot{\pi} + (H_a + H_b + H_c) K_{\pi\pi} \dot{\pi} \\
& + K_{X\pi\pi} \ddot{\pi} (\dot{\pi})^2 - (H_a + H_b + H_c) K_{X\pi\pi} (\dot{\pi})^3 \\
& - 2 (H_a + H_b + H_c) K_{XX\pi} \ddot{\pi} (\dot{\pi})^3 - \left((H_a + H_b + H_c)^2 + \dot{H}_a + \dot{H}_b + \dot{H}_c \right) K_{X\pi} (\dot{\pi})^2 \\
& - 2 (H_a + H_b + H_c) K_{X\pi} \dot{\pi} \ddot{\pi} + \frac{1}{2} K_{\pi\pi\pi} (\dot{\pi})^2 - 2 \left(\frac{d}{dt} [H_a H_b + H_a H_c + H_b H_c] \right. \\
& + H_a^2 (H_b + H_c) + H_b^2 (H_a + H_c) + H_c^2 (H_a + H_b) + 3 H_a H_b H_c \Big) G_{4X\pi} \dot{\pi} \\
& + 6 (H_a + H_b + H_c) G_{4X\pi\pi} \dot{\pi} \ddot{\pi} + 2 \left((H_a + H_b + H_c)^2 + \dot{H}_a + \dot{H}_b + \dot{H}_c \right) G_{4X\pi\pi} (\dot{\pi})^2 \\
& + 4 (H_a + H_b + H_c) G_{4XX\pi\pi} \ddot{\pi} (\dot{\pi})^3 - 4 (H_a H_b + H_a H_c + H_b H_c) G_{4XX\pi\pi} (\dot{\pi})^4 \\
& - 8 (H_a H_b + H_a H_c + H_b H_c) G_{4XXX\pi} \ddot{\pi} (\dot{\pi})^4 - 4 \left(\frac{d}{dt} [H_a H_b + H_a H_c + H_b H_c] \right. \\
& + H_a^2 (H_b + H_c) + H_b^2 (H_a + H_c) + H_c^2 (H_a + H_b) + 3 H_a H_b H_c \Big) G_{4XX\pi} (\dot{\pi})^3 \\
& + 2 (H_a + H_b + H_c) G_{4X\pi\pi\pi} (\dot{\pi})^3 - 2 (H_a H_b + H_a H_c + H_b H_c) G_{4X\pi} \ddot{\pi} \\
& + \left(\dot{H}_c + H_c^2 + \dot{H}_b + H_b^2 + H_b H_c + \dot{H}_a + H_a^2 + 2 H_a H_c + H_a H_b \right) G_{4\pi\pi}, \quad (\text{B.18})
\end{aligned}$$

$$B^{ab} = \frac{1}{3} (H_b - H_a) A_1, \quad (\text{B.19})$$

$$B^{bc} = \frac{1}{3} (H_c - H_b) A_1, \quad (\text{B.20})$$

$$B^{ac} = \frac{1}{3} (H_c - H_a) A_1. \quad (\text{B.21})$$

Далее приведены коэффициенты из действий (81) и (84):

$$A = \frac{2}{3} A_1 (\bar{H}_a \bar{H}_b + \bar{H}_a \bar{H}_c + \bar{H}_b \bar{H}_c) - \frac{9}{2} \frac{A_4^2}{A_3}. \quad (\text{B.22})$$

Также введем обозначение:

$$A_4 = \frac{1}{3} \sum_{l=a,b,c} A_4^l \bar{H}_l, \quad A_8 = \frac{1}{3} \sum_{l=a,b,c} A_8^l \bar{H}_l, \quad A_{18} = \sum_{l=a,b,c} A_{18}^l \bar{H}_l. \quad (\text{B.23})$$

$$\Theta_i = \frac{1}{3} A_1 (\bar{H}_j + \bar{H}_k), \quad (\text{B.24})$$

$$\Lambda_i = \frac{1}{3A_3} (9A_4A_8^i + A_1A_{11} (\bar{H}_j + \bar{H}_k)), \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{aligned} \Xi_i = & \frac{1}{2} \left[-2A_{13}^{ij} \bar{H}_j - 2A_{13}^{ik} \bar{H}_k - 4\eta A_2^{jk} \bar{H}_j \bar{H}_k - \eta \frac{d}{dt} \left[\frac{A_1 A_4 (\bar{H}_i + \bar{H}_k)}{A_3} \right] - \right. \\ & \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \left[\frac{A_1 A_{11} (\bar{H}_i + \bar{H}_k)}{A_3} \right] + \frac{1}{3A_3} (-3A_8^i + 2A_1\eta (\bar{H}_j + \bar{H}_k)) \sum_{l=a,b,c} A_4^l \dot{\bar{H}}_l + \\ & \left. + \frac{1}{3} \frac{A_1}{A_3} (A_{11} + 3\eta A_4) (\bar{H}_j + \bar{H}_k) H (\bar{H}_i - \bar{H}_j - \bar{H}_k) + \frac{1}{3A_3} A_1 A_{17} (\bar{H}_j + \bar{H}_k) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned} \Pi_i = & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{A_1 A_4 (\bar{H}_j + \bar{H}_k)}{A_3} \right] - \frac{1}{3} \frac{A_1}{A_3} (\bar{H}_j + \bar{H}_k) \sum_{l=a,b,c} A_4^l \dot{\bar{H}}_l + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{A_1 A_4 H}{A_3} (\bar{H}_j + \bar{H}_k) (\bar{H}_j + \bar{H}_k - \bar{H}_i) + 2A_2^{jk} \bar{H}_j \bar{H}_k \right], \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

$$\Sigma_i = \frac{1}{3} A_1 \eta (\bar{H}_j + \bar{H}_k) - A_8^i, \quad (\text{B.28})$$

$$\begin{aligned} M = & -\frac{1}{2} \frac{1}{abc} \frac{d}{dt} \left[abc \left(-\frac{1}{2} \frac{A_{11} A_{17}}{A_3} + \eta \dot{\eta} A + \eta \left(-A_{18} + 2 \sum_{l=a,b,c} A_8^l \dot{\bar{H}}_l - 3\dot{A}_8 - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{3}{2} \frac{A_{17} A_4}{A_3} - 9A_8 H + \frac{1}{2} \frac{A_{11}}{A_3} \sum_{l=a,b,c} A_4^l \dot{\bar{H}}_l \right) \right] - \frac{1}{4} \frac{A_{17}^2}{A_3} + A_{20} + \frac{1}{2} A (\dot{\eta})^2 + \\ & + (\dot{\eta}) \left(-A_{18} + 2 \sum_{l=a,b,c} A_8^l \dot{\bar{H}}_l - 3\dot{A}_8 - \frac{3}{2} \frac{A_{17} A_4}{A_3} - 9A_8 H + \frac{1}{2} \frac{A_{11}}{A_3} \sum_{l=a,b,c} A_4^l \dot{\bar{H}}_l \right) + \\ & + \eta \left(-\frac{1}{2} \frac{A_{17}}{A_3} \sum_{l=a,b,c} A_4^l \dot{\bar{H}}_l + \frac{1}{2} \frac{1}{abc} \frac{d}{dt} \left[\frac{abc A_{11}}{A_3} \sum_{l=a,b,c} A_4^l \dot{\bar{H}}_l \right] \right) + \\ & + \eta^2 \left(\frac{1}{2} A_1 D_2 + \frac{1}{2} D_1 (\dot{A}_1) - \frac{1}{4} \frac{1}{A_3} \left(\sum_{l=a,b,c} A_4^l \dot{\bar{H}}_l \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{3}{4} \frac{1}{abc} \frac{d}{dt} \left[\frac{abc A_4}{A_3} \sum_{l=a,b,c} A_4^l \dot{\bar{H}}_l \right] \right), \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

$$m = \left(A_1 D_2 + D_1 \dot{A}_1 \right) - \frac{1}{A_3} \left(\sum_{l=a,b,c} A_4^l \dot{\bar{H}}_l \right)^2 + \frac{1}{abc} \frac{d}{dt} \left[\frac{abc A_4}{A_3} \sum_{l=a,b,c} A_4^l \dot{\bar{H}}_l \right]. \quad (\text{B.30})$$

$$D_1 = \frac{2}{3} (H_a - H_b) \bar{H}_a \bar{H}_b + \frac{2}{3} (H_c - H_b) \bar{H}_b \bar{H}_c + \frac{2}{3} (H_a - H_c) \bar{H}_a \bar{H}_c \\ + \frac{1}{3} \sum_{\substack{i,j=a,b,c \\ i \neq j}} \frac{d}{dt} [\bar{H}_i \bar{H}_j], \quad (\text{B.31})$$

$$D_2 = \frac{1}{abc} \frac{d}{dt} [abc D_1]. \quad (\text{B.32})$$

С Свертки пятимерных величин

В данном приложении приведены выражения для всех необходимых сверток пятимерных производных и кривизн в терминах четырехмерных величин.

$$\hat{R} = R - \frac{2}{\phi} \square \phi - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \phi^2, \quad (\text{C.1})$$

$$\hat{\square} \pi = \square \pi + \frac{1}{\phi} \phi^{;\alpha} \pi_{;\alpha}, \quad (\text{C.2})$$

$$\pi_{;MN} \pi^{;MN} = \pi_{;\mu\nu} \pi^{;\mu\nu} + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\gamma} \pi^{;\beta} \pi_{;\gamma} \phi^2 + \frac{1}{\phi^2} (\phi^{;\alpha} \pi_{;\alpha})^2, \quad (\text{C.3})$$

$$\pi_{;MN} \pi^{;MP} \pi_{;P}^{\quad N} = \pi_{;\mu\nu} \pi^{;\mu\kappa} \pi_{;\kappa}^{\quad \nu} + \frac{3\phi^2}{4} F^{\alpha\beta} F^{\gamma\delta} \pi_{;\alpha} \pi_{;\gamma} \pi_{;\beta\delta} \\ + \frac{3\phi}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\delta} \pi_{;\beta} \pi^{;\delta} \phi_{;\gamma} \pi^{;\gamma} + \frac{1}{\phi^3} (\phi^{;\alpha} \pi_{;\alpha})^3, \quad (\text{C.4})$$

$$\hat{G}^{MN} \pi_{;MN} = G^{\alpha\beta} \pi_{;\alpha\beta} + \frac{1}{\phi} \square \phi \square \pi - \frac{1}{\phi} \phi^{;\alpha\beta} \pi_{;\alpha\beta} + \frac{\phi^2}{8} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \square \pi - \frac{\phi^2}{2} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\gamma} \pi_{;\beta}^{\quad \gamma} \\ - \frac{3\phi}{2} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\delta} \phi_{;\beta} \pi^{;\delta} - \frac{\phi^2}{2} F^{\alpha\beta} \nabla^\gamma F_{\alpha\gamma} \pi_{;\beta} + \frac{3\phi}{8} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \pi^{;\gamma} \phi_{;\gamma} - \frac{1}{2\phi} R \phi^{;\alpha} \pi_{;\alpha}, \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned}
\pi^{;AB}\pi_{;BC}\pi^{;CD}\pi_{;AD} &= \pi^{;\alpha\beta}\pi_{;\beta\gamma}\pi^{;\gamma\delta}\pi_{;\delta\alpha} + \phi^2 F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta}\pi_{;\alpha}{}^\epsilon\pi_{;\gamma\epsilon}\pi_{;\beta}\pi_{;\delta} \\
&+ \frac{\phi^4}{8} (F^{\alpha\beta}F_{\alpha\delta}\pi_{;\beta}\pi^{;\delta})^2 + \phi F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta}\pi_{;\alpha\gamma}\pi_{;\beta}\pi_{;\delta}\phi^{;\epsilon}\pi_{;\epsilon} \\
&+ F^{\alpha\beta}F_{\alpha\gamma}\pi_{;\beta}\pi^{;\gamma} (\phi_{;\delta}\pi^{;\delta})^2 + \frac{1}{\phi^4} (\phi_{;\alpha}\pi^{;\alpha})^4, \tag{C.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{MN}\hat{R}^{MN} &= R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{2}{\phi}R^{\alpha\beta}\phi_{;\alpha\beta} - F^{\alpha\beta}F_{\alpha}{}^{\gamma}R_{\beta\gamma}\phi^2 + \frac{1}{\phi^2}\phi^{;\alpha\beta}\phi_{;\alpha\beta} \\
&+ \phi F^{\alpha\beta}F_{\alpha}{}^{\gamma}\phi_{;\beta\gamma} + \frac{\phi^4}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha}{}^{\gamma}F_{\beta}{}^{\delta}F_{\gamma\delta} + \frac{9}{2}F^{\alpha\beta}F_{\alpha}{}^{\gamma}\phi_{;\beta}\phi_{;\gamma} + 3\phi F^{\alpha\beta}\nabla^{\gamma}F_{\alpha\gamma}\phi_{;\beta} \\
&- \frac{\phi^2}{2}\nabla^{\alpha}F_{\alpha}{}^{\beta}\nabla^{\gamma}F_{\beta\gamma} + \frac{1}{\phi^2}(\square\phi)^2 - \frac{\phi}{2}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\square\phi + \frac{\phi^4}{16}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}F^{\gamma\delta}F_{\gamma\delta}, \tag{C.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{R}^{ABCD}\hat{R}_{ABCD} &= R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} - 3\phi^2 F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta}R_{\alpha\gamma\beta\delta} \\
&+ \frac{3}{8}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}F^{\gamma\delta}F_{\gamma\delta}\phi^4 + \frac{5}{8}F^{\alpha\beta}F_{\alpha}{}^{\gamma}F_{\beta}{}^{\delta}F_{\gamma\delta}\phi^4 + \frac{5}{4}\nabla^{\gamma}F^{\alpha\beta}\nabla_{\gamma}F_{\alpha\beta}\phi^2 \\
&+ 4\phi F^{\alpha\beta}\phi_{;\gamma}(\nabla^{\gamma}F_{\alpha\beta} - \nabla_{\alpha}F_{\beta}{}^{\gamma}) + 6(F^{\alpha\beta}\phi_{;\gamma})^2 + 6F^{\alpha\beta}F_{\alpha}{}^{\gamma}\phi_{;\beta}\phi_{;\gamma} \\
&- \frac{\phi^2}{2}\nabla^{\gamma}F^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}F_{\gamma\beta} + \frac{4}{\phi^2}\phi^{;\alpha\beta}\phi_{;\alpha\beta} - 2\phi F^{\alpha\beta}F_{\alpha}{}^{\gamma}\phi_{;\beta\gamma}. \tag{C.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{R}^{AB}\pi_{;AB} &= -\frac{1}{\phi}\phi^{;\alpha\beta}\pi_{;\alpha\beta} - \frac{1}{\phi^2}(\square\phi)\phi^{;\alpha}\pi_{;\alpha} + R^{\alpha\beta}\pi_{;\alpha\beta} - \frac{\phi^2}{2}F^{\alpha\beta}F_{\alpha}{}^{\gamma}\pi_{;\beta\gamma} \\
&- \frac{\phi^2}{2}F^{\alpha\beta}\nabla^{\gamma}F_{\alpha\gamma}\pi_{;\beta} - \frac{3\phi}{2}F^{\alpha\beta}F_{\alpha}{}^{\gamma}\phi_{;\beta}\pi_{;\gamma} + \frac{\phi}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\phi^{;\gamma}\pi_{;\gamma}, \tag{C.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{R}^{AB}\pi_{;A}{}^C\pi_{;BC} &= R^{\alpha\beta}\pi_{;\alpha}{}^{\gamma}\pi_{;\beta\gamma} - \frac{1}{\phi}\phi^{;\alpha\beta}\pi_{;\alpha}{}^{\gamma}\pi_{;\beta\gamma} - \frac{1}{\phi^3}(\phi^{;\alpha}\pi_{;\alpha})^2(\square\phi) \\
&F^{\alpha\beta}F_{\alpha}{}^{\gamma}\left(-\frac{\phi^2}{2}\pi_{;\beta}{}^{\delta}\pi_{;\gamma\delta} - \frac{\phi^4}{8}F_{\beta}{}^{\delta}F_{\gamma}{}^{\kappa}\pi_{;\delta}\pi_{;\kappa} - \frac{3}{2}\phi_{;\beta}\phi^{;\delta}\pi_{;\gamma}\pi_{;\delta} - \frac{\phi}{4}(\square\phi)\pi_{;\beta}\pi_{;\gamma}\right) \\
&+ F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta}\left(\frac{\phi^2}{4}R_{\alpha\gamma}\pi_{;\beta}\pi_{;\delta} - \frac{\phi}{4}\phi_{;\alpha\gamma}\pi_{;\beta}\pi_{;\delta} - \frac{3\phi}{2}\pi_{;\alpha\gamma}\phi_{;\beta}\pi_{;\delta} + \frac{\phi^4}{16}F_{\alpha\beta}F_{\gamma}{}^{\kappa}\pi_{;\delta}\pi_{;\kappa}\right) \\
&+ \frac{\phi^2}{2}F^{\alpha\beta}\nabla^{\gamma}F_{\gamma}{}^{\delta}\pi_{;\alpha\delta}\pi_{;\beta} - \frac{1}{2}F^{\alpha\beta}\nabla^{\gamma}F_{\alpha\gamma}\phi^{;\delta}\pi_{;\beta}\pi_{;\delta}\phi + \frac{1}{4}(F^{\alpha\beta}\phi^{;\gamma}\pi_{;\gamma})^2, \tag{C.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{R}^{ABCD}\pi_{;AC}\pi_{;BD} &= R^{\alpha\beta\gamma\delta}\pi_{;\alpha\gamma}\pi_{;\beta\delta} - \frac{2}{\phi^2}\phi^{;\alpha\beta}\pi_{;\alpha\beta}\phi^{;\gamma}\pi_{;\gamma} + F^{\alpha\beta}\left(-\frac{3\phi^2}{4}F^{\gamma\delta}\pi_{;\alpha\gamma}\pi_{;\beta\delta}\right. \\
&\quad \left.-\phi^2\nabla^\gamma F_\alpha{}^\delta\pi_{;\beta\pi;\gamma\delta} - 3\phi F_\alpha{}^\gamma\phi^{;\delta}\pi_{;\beta\pi;\gamma\delta} + \frac{\phi}{2}F_\alpha{}^\gamma\phi^{;\delta}\pi_{;\delta\pi;\beta\gamma} - \frac{\phi^4}{8}F_\alpha{}^\gamma F_\beta{}^\delta F_\gamma{}^\kappa\pi_{;\delta\pi;\kappa}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta}\phi_{;\alpha\gamma}\pi_{;\beta\pi;\delta}\phi.
\end{aligned} \tag{C.11}$$

D Фоновые уравнения движения теории обобщенных галилеонов после размерной редукции

$$\begin{aligned}
\delta g^{00}: \quad F &= 2F_X\dot{\pi}^2 - K_\pi\dot{\pi}^2 + 2K_X\dot{\pi}^3(H_\phi + 3H) - 6G_4H(H_\phi + H) \\
&\quad + 24G_{4X}\dot{\pi}^2H(H + H_\phi) + 24G_{4XX}H\dot{\pi}^4(H_\phi + H) - 2G_{4\pi}\dot{\pi}(H_\phi + 3H) \\
&\quad - 4G_{4X\pi}\dot{\pi}^3(H_\phi + 3H) + 10G_{5X}H^2\dot{\pi}^3(3H_\phi + H) \\
&\quad + 4G_{5XX}H^2\dot{\pi}^5(3H_\phi + H) - 9G_{5\pi}H\dot{\pi}^2(H + H_\phi) - 6G_{5X\pi}H\dot{\pi}^4(H_\phi + H) \\
&\quad - 18G_6H_\phi H^3 + 108G_{6X}\dot{\pi}^2H_\phi H^3 - 18G_{6\pi}H^2\dot{\pi}(3H_\phi + H) \\
&\quad - 72G_{6X\pi}H^2\dot{\pi}^3(3H_\phi + H) + 216G_{6XX}\dot{\pi}^4H_\phi H^3 + 48G_{6XXX}H_\phi H^3\dot{\pi}^6 \\
&\quad - 24G_{6XX\pi}H^2\dot{\pi}^5(3H_\phi + H),
\end{aligned} \tag{D.1}$$

$$\begin{aligned}
\delta g^{ii} : \quad 0 = & F - 2K_X \ddot{\pi} \dot{\pi}^2 - K_\pi \dot{\pi}^2 + 2G_4 \left(2\dot{H} + 3H^2 + 2HH_\phi + \dot{H}_\phi + H_\phi^2 \right) \\
& - 4G_{4X} \dot{\pi}^2 \left(3H^2 + 2HH_\phi + 2\dot{H} + \dot{H}_\phi + H_\phi^2 \right) - 4G_{4X} \dot{\pi} \ddot{\pi} (2H + H_\phi) \\
& + 2G_{4\pi} (\ddot{\pi} + \dot{\pi} (H_\phi + 2H)) + 2G_{4\pi\pi} \dot{\pi}^2 + 4G_{4\pi X} \ddot{\pi} \dot{\pi}^2 - 4G_{4\pi X} \dot{\pi}^3 (H_\phi + 2H) \\
& - 8G_{4XX} \ddot{\pi} \dot{\pi}^3 (H_\phi + 2H) + G_{5\pi} \left(\dot{\pi}^2 \left(3H^2 + \dot{H}_\phi + H_\phi^2 + 2\dot{H} + 2HH_\phi \right) \right. \\
& \left. + 2\dot{\pi} \ddot{\pi} (H_\phi + 2H) \right) \\
& - G_{5X} \left(4\dot{\pi}^3 \left(H\dot{H} + H^3 + 2H_\phi H^2 + H_\phi \dot{H} + H\dot{H}_\phi + HH_\phi^2 \right) \right. \\
& \left. + 6\ddot{\pi} H \dot{\pi}^2 (2H_\phi + H) \right) + 2G_{5\pi X} \left(\ddot{\pi} \dot{\pi}^3 (H_\phi + 2H) - H \dot{\pi}^4 (H + 2H_\phi) \right) \\
& - 4G_{5XX} H \ddot{\pi} \dot{\pi}^4 (H + 2H_\phi) + G_{5\pi\pi} \dot{\pi}^3 (H_\phi + 2H) + 6G_{6\pi} H \ddot{\pi} (2H_\phi + H) \\
& + 6G_6 H \left(\dot{H}_\phi H + HH_\phi^2 + 2H_\phi \dot{H} + 2H_\phi H^2 \right) + 12G_{6\pi X} H \dot{\pi}^4 (2H_\phi + H) \\
& + 6G_{6\pi} \dot{\pi} \left(2H\dot{H}_\phi + 2HH_\phi^2 + 2H\dot{H} + 2H^3 + 5H_\phi H^2 + 2H_\phi \dot{H} \right) \\
& + 6G_{6\pi\pi} H \dot{\pi}^2 (2H_\phi + H) - 12G_{6X} \left(3\dot{\pi} \ddot{\pi} H_\phi H^2 + 2H \dot{\pi}^2 \left(2H_\phi \dot{H} + 2H_\phi H^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \dot{H}_\phi H + HH_\phi^2 \right) \right) + 24G_{6\pi X} \left(2H \ddot{\pi} \dot{\pi}^2 (2H_\phi + H) + \dot{\pi}^3 \left(H_\phi \dot{H} + H_\phi H^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + H\dot{H}_\phi + HH_\phi^2 + H\dot{H} + H^3 \right) \right) - 24G_{6XX} \dot{\pi}^3 H \left(6\ddot{\pi} H_\phi H + \dot{\pi} \left(2H_\phi \dot{H} \right. \right. \\
& \left. \left. + 2H_\phi H^2 + \dot{H}_\phi H + HH_\phi^2 \right) \right) + 24G_{6\pi XX} H \dot{\pi}^4 \left(\ddot{\pi} (2H_\phi + H) - \dot{\pi}^5 H_\phi H^2 \right) \\
& - 48\ddot{\pi} \dot{\pi} G_{6XXX} H_\phi H^2, \tag{D.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\phi: \quad 0 = & G_4 \left(-2HH_\phi + \dot{H} - \dot{H}_\phi - H_\phi^2 + 3H^2 \right) + G_{4\pi} \dot{\pi} (H - H_\phi) \\
& + 4G_{4XX} \ddot{\pi} \dot{\pi}^3 (H_\phi - H) + 2G_{4X} \dot{\pi}^2 \left(-3H^2 + 2HH_\phi - \dot{H} + \dot{H}_\phi + H_\phi^2 \right) \\
& - 2G_{4X} \dot{\pi} \ddot{\pi} (H - H_\phi) + 2G_{4\pi X} \dot{\pi}^3 (H_\phi - H) + G_{5\pi} \left(\frac{1}{2} \dot{\pi}^2 (3H^2 - 2HH_\phi \right. \\
& \left. - \dot{H}_\phi - H_\phi^2 + \dot{H}) + \dot{\pi} \ddot{\pi} (H - H_\phi) \right) - 4G_{5XX} H \ddot{\pi} \dot{\pi}^4 (H - H_\phi) \\
& + 2G_{5X} \dot{\pi}^2 \left(3H \ddot{\pi} (H_\phi - H) + \dot{\pi} \left(2H_\phi H^2 - 3H^3 - 2H\dot{H} + H_\phi \dot{H} \right. \right. \\
& \left. \left. + H\dot{H}_\phi + HH_\phi^2 \right) \right) + G_{5\pi X} \dot{\pi}^3 (H_\phi - H) (2H\dot{\pi} - \ddot{\pi}) - \frac{1}{2} G_{5\pi\pi} \dot{\pi}^3 (H_\phi - H) \\
& - 3G_6 H \left(2H_\phi H^2 + \dot{H}_\phi H + HH_\phi^2 + 2H_\phi \dot{H} - 3\dot{H}H - 3H^3 \right) \\
& + 6G_{6X} \dot{\pi} H \left(3H \ddot{\pi} (H_\phi - H) + 2\dot{\pi} \left(2H_\phi H^2 + 2H_\phi \dot{H} + \dot{H}_\phi H + HH_\phi^2 \right. \right. \\
& \left. \left. - 3\dot{H}H - 3H^3 \right) \right) - 12G_{6\pi X} \dot{\pi}^2 \left(4H \ddot{\pi} (H_\phi - H) + \dot{\pi} \left(H_\phi H^2 - 2H^3 + H_\phi \dot{H} \right. \right. \\
& \left. \left. + H\dot{H}_\phi + HH_\phi^2 - 2H\dot{H} \right) \right) - 3G_{6\pi} \dot{\pi} \left(\left(5H_\phi H^2 - 7H^3 + 2H\dot{H}_\phi + 2HH_\phi^2 \right. \right. \\
& \left. \left. - 4H\dot{H} + 2H_\phi \dot{H} \right) + 2H \ddot{\pi} (H_\phi - H) \right) - 6G_{6\pi\pi} H \dot{\pi}^2 (H_\phi - H) \\
& + 12G_{6XX} H \dot{\pi}^3 \left(\dot{\pi} \left(2H_\phi H^2 + 2H_\phi \dot{H} + \dot{H}_\phi H + HH_\phi^2 - 3\dot{H}H - 36H^3 \right) \right. \\
& \left. + 6H \ddot{\pi} (H_\phi - H) \right) + 12G_{6\pi XX} H \dot{\pi}^4 (H_\phi - H) (H\dot{\pi} - 2\ddot{\pi}) \\
& - 12G_{6\pi\pi X} H \dot{\pi}^4 (H_\phi - H) + 24G_{6XXX} H^2 \ddot{\pi} \dot{\pi}^5 (H_\phi - H), \tag{D.3}
\end{aligned}$$

где $H = \dot{a}/a$ и $H_\phi = \dot{\phi}/\phi$, при этом точка, как обычно, обозначает производную по космологическому времени t .

Е Коэффициенты квадратичного действия теории обобщенных галилеонов после размерной редукции

В тензорном секторе используются обозначения $\mathcal{G}_\tau = \frac{A_5}{2}$, $\mathcal{F}_\tau = A_2$, а в векторном секторе

$$\mathcal{G}_V = B_1, \quad \mathcal{F}_V = C_{11} \quad \mathcal{K} = 12A_1. \tag{E.1}$$

Эти коэффициенты и коэффициенты, возникающие в квадратичном действии для скалярного сектора, имеют следующий вид

$$A_1 = -6G_4 + 12G_{4X}(\dot{\pi})^2 - 3G_{5\pi}(\dot{\pi})^2 + 6G_{5X}(\dot{\pi})^3(H + H_\phi) + 72G_{6XX}HH_\phi(\dot{\pi})^4 + 72G_{6X}HH_\phi(\dot{\pi})^2 - 36G_{6X\pi}(\dot{\pi})^3(H_\phi + H) - 18G_6HH_\phi - 18G_{6\pi}\dot{\pi}(H + H_\phi), \quad (\text{E.2})$$

$$A_2 = 2G_4 - G_{5\pi}(\dot{\pi})^2 - 2G_{5X}\ddot{\pi}(\dot{\pi})^2 - 12G_{6X}H_\phi^2(\dot{\pi})^2 + 12G_{6X\pi}\ddot{\pi}(\dot{\pi})^2 - 12G_{6X\pi}H_\phi(\dot{\pi})^3 - 24G_{6XX}H_\phi\ddot{\pi}(\dot{\pi})^3 - 12G_{6X}H_\phi\dot{\pi}\ddot{\pi} - 12G_{6X}\dot{H}_\phi(\dot{\pi})^2 + 6G_6\dot{H}_\phi + 6G_6H_\phi^2 + 6G_{6\pi\pi}(\dot{\pi})^2 + 6G_{6\pi}H_\phi\dot{\pi} + 6G_{6\pi}\ddot{\pi}, \quad (\text{E.3})$$

$$A_3 = F_X(\dot{\pi})^2 + 2F_{XX}(\dot{\pi})^4 + 4K_X(\dot{\pi})^3(H_\phi + 3H) - K_\pi(\dot{\pi})^2 - K_{X\pi}(\dot{\pi})^4 + 2K_{XX}(\dot{\pi})^5(H_\phi + 3H) - 6G_4H(H_\phi + H) + 42G_{4X}H(\dot{\pi})^2(H_\phi + H) - 2G_{4\pi}\dot{\pi}(H_\phi + 3H) + 96G_{4XX}H(\dot{\pi})^4(H_\phi + H) - 10G_{4X\pi}(\dot{\pi})^3(H_\phi + 3H) + 24G_{4XXX}H(\dot{\pi})^6(H_\phi + H) - 4G_{4XX\pi}(\dot{\pi})^5(H_\phi + 3H) - 27G_{5X\pi}H(\dot{\pi})^4(H_\phi + H) - 18G_{5\pi}(\dot{\pi})^2(H_\phi + H) + 30G_{5X}H^2(\dot{\pi})^3(3H_\phi + H) + 26G_{5XX}H^2(\dot{\pi})^5(3H_\phi + H) + 4G_{5XXX}H^2(\dot{\pi})^7(3H_\phi + H) - 6G_{5XX\pi}H(\dot{\pi})^6(H_\phi + H) - 36G_6H_\phi H^3 + 306G_{6X}H_\phi H^3(\dot{\pi})^2 - 36G_{6\pi}\dot{\pi}H^2(3H_\phi + H) - 234G_{6X\pi}H^2(\dot{\pi})^3(3H_\phi + H) + 972G_{6XX}H_\phi H^3(\dot{\pi})^4 + 456G_{6XXX}H_\phi H^3(\dot{\pi})^6 - 168G_{6XX\pi}H^2(\dot{\pi})^5(3H_\phi + H) + 48G_{6XXXX}H_\phi H^3(\dot{\pi})^8 - 24G_{6XXX\pi}H^2(\dot{\pi})^7(3H_\phi + H) \quad (\text{E.4})$$

$$A_4 = 2K_X(\dot{\pi})^3 - 2G_4(2H + H_\phi) + 8G_{4X}(\dot{\pi})^2(2H + H_\phi) - 4G_{4X\pi}(\dot{\pi})^3 - 2G_{4\pi}\dot{\pi} + 8G_{4XX}(\dot{\pi})^4(H_\phi + 2H) + 10G_{5X}H(\dot{\pi})^3(H + 2H_\phi) - 3G_{5\pi}(\dot{\pi})^2(2H + H_\phi) - 2G_{5X\pi}(\dot{\pi})^4(2H + H_\phi) + 4G_{5XX}H(\dot{\pi})^5(H + 2H_\phi) + 216G_{6XX}H_\phi H^2(\dot{\pi})^4 + 48G_{6XXX}H_\phi H^2(\dot{\pi})^6 - 24G_{6XX\pi}H(\dot{\pi})^5(H + 2H_\phi) + 108G_{6X}H_\phi H^2(\dot{\pi})^2 - 72G_{6X\pi}H(\dot{\pi})^3(H + 2H_\phi) - 18G_6H_\phi H^2 - 18G_{6\pi}H\dot{\pi}(H + 2H_\phi), \quad (\text{E.5})$$

$$A_5 = -\frac{2}{3}A_1, \quad (\text{E.6})$$

$$A_6 = -3A_4, \quad (\text{E.7})$$

$$A_7 = \frac{2}{3}A_1, \quad (\text{E.8})$$

$$\begin{aligned} A_8 = & 2K_X(\dot{\pi})^2 - 2G_{4\pi} + 4G_{4X}\dot{\pi}(2H + H_\phi) + 8G_{4XX}(\dot{\pi})^3(H_\phi + 2H) \\ & - 4G_{4X\pi}(\dot{\pi})^2 + 6G_{5X}H(\dot{\pi})^2(H + 2H_\phi) - 2G_{5\pi}\dot{\pi}(2H + H_\phi) \\ & - 2G_{5X\pi}(\dot{\pi})^3(H_\phi + 2H) + 4G_{5XX}H(\dot{\pi})^4(H + 2H_\phi) + 48G_{6XXX}H_\phi H^2(\dot{\pi})^5 \\ & - 24G_{6XX\pi}H(\dot{\pi})^4(H + 2H_\phi) + 36G_{6X}H_\phi\dot{\pi}H^2 + 144G_{6XX}H_\phi H^2(\dot{\pi})^3 \\ & - 48G_{6X\pi}H(\dot{\pi})^2(H + 2H_\phi) - 6G_{6\pi}H(H + 2H_\phi), \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

$$A_9 = -A_8, \quad (\text{E.10})$$

$$A_{10} = -3A_8, \quad (\text{E.11})$$

$$\begin{aligned} A_{11} = & -2F_X\dot{\pi} - 4F_{XX}(\dot{\pi})^3 + 2K_{X\pi}(\dot{\pi})^3 + 2K_\pi\dot{\pi} - 4K_{XX}(\dot{\pi})^4(H_\phi + 3H) \\ & - 6K_X(\dot{\pi})^2(H_\phi + 3H) - 36G_{4X}H\dot{\pi}(H + H_\phi) - 144G_{4XX}H(\dot{\pi})^3(H + H_\phi) \\ & + 16G_{4X\pi}(\dot{\pi})^2(H_\phi + 3H) + 2G_{4\pi}(H_\phi + 3H) - 48G_{4XXX}H(\dot{\pi})^5(H + H_\phi) \\ & + 8G_{4XX\pi}(\dot{\pi})^4(H_\phi + 3H) - 40G_{5XX}H^2(\dot{\pi})^4(H + 3H_\phi) \\ & - 30G_{5X}H^2(\dot{\pi})^2(H + 3H_\phi) + 42G_{5X\pi}H(\dot{\pi})^3(H + H_\phi) + 18G_{5\pi}\dot{\pi}H(H + H_\phi) \\ & + 12G_{5XX\pi}H(\dot{\pi})^5(H + H_\phi) - 8G_{5XXX}H^2(\dot{\pi})^6(H + 3H_\phi) \\ & + 18G_{6\pi}H^2(H + 3H_\phi) - 180G_{6X}H_\phi\dot{\pi}H^3 + 252G_{6X\pi}H^2(\dot{\pi})^2(H + 3H_\phi), \\ & - 1080G_{6XX}H_\phi H^3(\dot{\pi})^3 + 264G_{6XX\pi}H^2(\dot{\pi})^4(H + 3H_\phi) - 96G_{6XXX}H_\phi H^3(\dot{\pi})^7 \\ & - 720G_{6XXX}H_\phi H^3(\dot{\pi})^5 + 48G_{6XXX\pi}H^2(\dot{\pi})^6(H + 3H_\phi) \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

$$\begin{aligned} A_{12} = & 2F_X\dot{\pi} + 2K_X(\dot{\pi})^2(H_\phi + 3H) - 2K_\pi\dot{\pi} + 12G_{4X}H\dot{\pi}(H + H_\phi) \\ & + 2G_{4\pi\pi}\dot{\pi} - 4G_{4X\pi}(\dot{\pi})^2(5H + 2H_\phi) - 2G_{4\pi}H + 24G_{4XX}H(\dot{\pi})^3(H + H_\phi) \\ & + 6G_{5X}H^2(\dot{\pi})^2(H + 3H_\phi) - 6G_{5\pi}\dot{\pi}H(H + H_\phi) + (2H + H_\phi)G_{5\pi\pi}(\dot{\pi})^2 \\ & - 2G_{5X\pi}H(\dot{\pi})^3(4H + 5H_\phi) + 4G_{5XX}H^2(\dot{\pi})^4(H + 3H_\phi) + 48G_{6XXX}H_\phi H^3(\dot{\pi})^5 \\ & + 144G_{6XX}H_\phi H^3(\dot{\pi})^3 - 24G_{6XX\pi}H^2(\dot{\pi})^4(H + 4H_\phi) + 36G_{6X}H_\phi\dot{\pi}H^3 \\ & + 12G_{6X\pi\pi}H(\dot{\pi})^3(H + 2H_\phi) - 24G_{6X\pi}H^2(\dot{\pi})^2(2H + 7H_\phi) \\ & + 6G_{6\pi\pi}H\dot{\pi}(H + 2H_\phi) - 6G_{6\pi}H^2(H + 2H_\phi), \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

$$\begin{aligned}
A_{13} = & -4G_{4\pi} + 8G_{4X}\dot{\pi}(H + H_\phi) + 8G_{4X}\ddot{\pi} + 8G_{4X\pi}(\dot{\pi})^2 + 16G_{4XX}\ddot{\pi}(\dot{\pi})^2 \\
& - 4G_{5\pi}(\dot{\pi}(H + H_\phi) + \ddot{\pi}) - 2G_{5\pi\pi}(\dot{\pi})^2 + 8G_{5X}\dot{\pi}(\ddot{\pi}(H + H_\phi) + HH_\phi\dot{\pi}) \\
& + 4G_{5X}(\dot{\pi})^2(\dot{H} + H^2) + 4G_{5X\pi}(\dot{\pi})^2(\dot{\pi}(H + H_\phi) - \ddot{\pi}) + 8G_{5XX}\ddot{\pi}(\dot{\pi})^3(H + H_\phi) \\
& + 4G_{5X}(\dot{\pi})^2(\dot{H}_\phi + H_\phi^2) - 48G_{6XX\pi}(\dot{\pi})^3(\ddot{\pi}(H_\phi + H) - HH_\phi\dot{\pi}) \\
& + 96G_{6XXX}HH_\phi\ddot{\pi}(\dot{\pi})^4 + 48G_{6XX}(\dot{\pi})^3(H_\phi\dot{H} + H_\phi H^2 + H\dot{H}_\phi + HH_\phi^2) \\
& + 24G_{6X}(HH_\phi\ddot{\pi} + H\dot{H}_\phi\dot{\pi} + H\dot{\pi}H_\phi^2 + H_\phi\dot{H}\dot{\pi} + H_\phi\dot{\pi}H^2) \\
& - 24G_{6X\pi}(3(H_\phi + H)\dot{\pi}\ddot{\pi} + (\dot{\pi})^2(2HH_\phi + \dot{H}_\phi + H_\phi^2 + \dot{H} + H^2)) \\
& - 12G_{6\pi}(\dot{H}_\phi + H_\phi^2 + \dot{H} + H^2 + HH_\phi) - 24G_{6X\pi\pi}(\dot{\pi})^3(H_\phi + H), \tag{E.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{14} = & F_X + 2F_{XX}(\dot{\pi})^2 - K_{X\pi}(\dot{\pi})^2 - K_\pi + 2K_X\dot{\pi}(H_\phi + 3H) \\
& + 2K_{XX}(\dot{\pi})^3(H_\phi + 3H) - 4G_{4XX\pi}(\dot{\pi})^3(H_\phi + 3H) - 6G_{4X\pi}\dot{\pi}(H_\phi + 3H) \\
& + 24G_{4XXX}H(\dot{\pi})^4(H + H_\phi) + 6G_{4X}H(H + H_\phi) + 48G_{4XX}H(\dot{\pi})^2(H + H_\phi) \\
& - 3G_{5\pi}H(H_\phi + H) + 6G_{5X}H^2\dot{\pi}(3H_\phi + H) - 15G_{5X\pi}H(\dot{\pi})^2(H_\phi + H) \\
& + 14G_{5XX}(\dot{\pi})^3H^2(3H_\phi + H) + 4G_{5XXX}(\dot{\pi})^5H^2(3H_\phi + H) \\
& - 6G_{5XX\pi}H(\dot{\pi})^4(H + H_\phi) + 18G_{6X}H_\phi H^3 - 54G_{6X\pi}\dot{\pi}H^2(3H_\phi + H) \\
& + 252G_{6XX}H_\phi H^3(\dot{\pi})^2 + 264G_{6XXX}H_\phi H^3(\dot{\pi})^4 - 96G_{6XX\pi}(\dot{\pi})^3H^2(3H_\phi + H) \\
& - 24G_{6XXX\pi}(\dot{\pi})^5H^2(3H_\phi + H) + 48G_{6XXXX}H_\phi H^3(\dot{\pi})^6, \tag{E.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{15} = & -F_X + K_\pi - K_{X\pi}(\dot{\pi})^2 - 2K_{XX}\ddot{\pi}(\dot{\pi})^2 - 2K_X\ddot{\pi} \\
& - 2(H_\phi + 2H)K_X\dot{\pi} \\
& - 2G_{4X}\left(2\dot{H} + 3H^2 + 2HH_\phi + \dot{H}_\phi + H_\phi^2\right) + 6G_{4X\pi}(\ddot{\pi} + \dot{\pi}(H_\phi + 2H)) \\
& - 4G_{4XX}\left(3(2H + H_\phi)\dot{\pi}\ddot{\pi} + (\dot{\pi})^2(5H^2 + 2\dot{H} + \dot{H}_\phi + H_\phi^2 + 6HH_\phi)\right) \\
& + 4G_{4XX\pi}(\dot{\pi})^2(\ddot{\pi} - (H_\phi + 2H)\dot{\pi}) - 8G_{4XXX}\ddot{\pi}(\dot{\pi})^3(H_\phi + 2H) \\
& + 2G_{4X\pi\pi}(\dot{\pi})^2 - 2G_{5X}\left(\dot{\pi}\left(2H\dot{H} + 2H_\phi\dot{H} + 2H^3 + 5H_\phi H^2 + 2H\dot{H}_\phi + 2HH_\phi^2\right)\right. \\
& \left.+ H\ddot{\pi}(2H_\phi + H)\right) + G_{5\pi}\left(2\dot{H} + 3H^2 + 2HH_\phi + \dot{H}_\phi + H_\phi^2\right) \\
& + G_{5X\pi}\left((\dot{\pi})^2(2\dot{H} + 5H^2 + 6HH_\phi + \dot{H}_\phi + H_\phi^2) + (4H_\phi + 8H)\dot{\pi}\ddot{\pi}\right) \\
& - G_{5XX}\left(10H(\dot{\pi})^2\ddot{\pi}(2H_\phi + H) + 4(\dot{\pi})^3(12H_\phi H^2 + (H_\phi + H)\dot{H}\right. \\
& \left.+ H^3 + H\dot{H}_\phi + HH_\phi^2)\right) + G_{5X\pi\pi}(\dot{\pi})^3(H_\phi + 2H) + 2G_{5XX\pi}\left((H_\phi + 2H)\ddot{\pi}(\dot{\pi})^3\right. \\
& \left.- 2HH_\phi(\dot{\pi})^4 - H^2(\dot{\pi})^4\right) - 4G_{5XXX}H\ddot{\pi}(\dot{\pi})^4(2H_\phi + H) \\
& - 6G_{6X}H\left(\dot{H}_\phi H + HH_\phi^2 + 2H_\phi\dot{H} + 2H_\phi H^2\right) \\
& + 18G_{6X\pi}\left(H\ddot{\pi}(2H_\phi + H)\right. \\
& \quad \left.+ \dot{\pi}\left(2(H + H_\phi)\dot{H} + 2H^3 + 2HH_\phi^2 + 5H_\phi H^2 + 2H\dot{H}_\phi\right)\right) \\
& - 12G_{6XX}H\left((\dot{\pi})^2(8H_\phi\dot{H} + 8H_\phi H^2 + 4HH_\phi^2 + 4\dot{H}_\phi H) + 9H_\phi\dot{\pi}\ddot{\pi}H\right) \\
& + 24G_{6XX\pi}\left(3H\ddot{\pi}(\dot{\pi})^2(2H_\phi + H) + (\dot{\pi})^3(HH_\phi^2 + 2H_\phi H^2 + (H_\phi + H)\dot{H} + H^3\right. \\
& \left.+ H\dot{H}_\phi)\right) + 24G_{6XXX\pi}H(\dot{\pi})^4(2H_\phi\ddot{\pi} + \ddot{\pi}H - H_\phi H\dot{\pi}) - 48G_{6XXXX}H_\phi\ddot{\pi}H^2(\dot{\pi})^5 \\
& - 24G_{6XXX}H(\dot{\pi})^3\left(8H_\phi\ddot{\pi}H + 2H_\phi\dot{H}\dot{\pi} + 2H_\phi H^2\dot{\pi} + \dot{H}_\phi H\dot{\pi} + HH_\phi^2\dot{\pi}\right) \\
& + 12G_{6XX\pi\pi}H(\dot{\pi})^4(2H_\phi + H) + 6G_{6X\pi\pi}H(\dot{\pi})^2(2H_\phi + H), \tag{E.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{17} = & F_\pi - 2F_{X\pi}(\dot{\pi})^2 + 6G_{4\pi}H^2 + 2(H_\phi + 3H)G_{4\pi\pi}\dot{\pi} + 4(3H + H_\phi)G_{4X\pi\pi}(\dot{\pi})^3 \\
& + 6G_{5X\pi\pi}HH_\phi(\dot{\pi})^4 + 6G_{5X\pi\pi}H^2(\dot{\pi})^4 + 18G_{6\pi\pi}\dot{\pi}H^3 + 54G_{6\pi\pi}H_\phi\dot{\pi}H^2 + K_{\pi\pi}(\dot{\pi})^2 \\
& - 2(H_\phi + 3H)K_{X\pi}(\dot{\pi})^3 + 6G_{4\pi}HH_\phi + 9G_{5\pi\pi}HH_\phi(\dot{\pi})^2 + 9G_{5\pi\pi}H^2(\dot{\pi})^2 \\
& - 24G_{4X\pi}H(\dot{\pi})^2(H + H_\phi) - 24G_{4XX\pi}H(\dot{\pi})^4(H_\phi + H) \\
& - 10G_{5X\pi}H^2(\dot{\pi})^3(3H_\phi + H) - 4G_{5XX\pi}(\dot{\pi})^5H^2(3H_\phi + H) - 216G_{6XX\pi}H_\phi H^3(\dot{\pi})^4 \\
& - 108G_{6X\pi}H_\phi H^3(\dot{\pi})^2 + 72G_{6X\pi\pi}H^2(\dot{\pi})^3(3H_\phi + H) + 18G_{6\pi}H_\phi H^3 \quad (\text{E.17})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{18} = & -6F_X\dot{\pi} - 6K_{X\pi}(\dot{\pi})^3 + 6K_\pi\dot{\pi} - 12K_X\dot{\pi}\left(\ddot{\pi} + \dot{\pi}(3H + H_\phi)\right) - 12K_{XX}\ddot{\pi}(\dot{\pi})^3 \\
& + 6G_{4\pi}(4H + H_\phi) - 12G_{4X}\left(\left(\dot{H}_\phi + H_\phi^2 + 2\dot{H} + 9H^2 + 8HH_\phi\right)\dot{\pi} + (2H + H_\phi)\ddot{\pi}\right) \\
& + 12G_{4X\pi}\left((6H + 2H_\phi)(\dot{\pi})^2 + 3\dot{\pi}\ddot{\pi}\right) \\
& - 24G_{4XX}\left(9H^2(\dot{\pi})^3 + 8HH_\phi(\dot{\pi})^3 + 4(H_\phi + 2H)\ddot{\pi}(\dot{\pi})^2 + 2\dot{H}(\dot{\pi})^3\right. \\
& \left.+ \dot{H}_\phi(\dot{\pi})^3 + H_\phi^2(\dot{\pi})^3\right) + 12G_{4X\pi\pi}(\dot{\pi})^3 + 24G_{4XX\pi}\left(\ddot{\pi}(\dot{\pi})^3 - (H_\phi + 2H)(\dot{\pi})^4\right) \\
& - 48G_{4XXX}\ddot{\pi}(\dot{\pi})^4(H_\phi + 2H) + 6G_{5\pi}\left(\dot{\pi}\left(9H^2 + 2\dot{H} + \dot{H}_\phi + H_\phi^2 + 8HH_\phi\right)\right. \\
& \left.+ (H_\phi + 2H)\ddot{\pi}\right) + 3G_{5\pi\pi}(H_\phi + 2H)(\dot{\pi})^2 + 6G_{5X\pi\pi}(\dot{\pi})^4(H_\phi + 2H) \\
& - 36G_{5X}\left((\dot{\pi})^2\left((H + H_\phi)\dot{H} + 2H^3 + 5H_\phi H^2 + HH_\phi^2 + H\dot{H}_\phi\right)\right. \\
& \left.+ \dot{\pi}\ddot{H}(H + 2H_\phi)\right) + 12G_{5XX\pi}(H_\phi + 2H)(\dot{\pi})^4\left(\ddot{\pi} - \dot{\pi}H(H + 2H_\phi)\right) \\
& + 6G_{5X\pi}\left((\dot{\pi})^3\left(7H^2 + 2\dot{H} + \dot{H}_\phi + H_\phi^2 + 4HH_\phi\right) + 5(H_\phi + 2H)\ddot{\pi}(\dot{\pi})^2\right) \\
& - 12G_{5XX}(\dot{\pi})^3\left(7\ddot{\pi}H(H + 2H_\phi) + \dot{\pi}\left(10H_\phi H^2 + 2(H + H_\phi)\dot{H} + 4H^3\right.\right. \\
& \left.\left.+ 2H\dot{H}_\phi + 2HH_\phi^2\right)\right) - 24G_{5XXX}(\dot{\pi})^5\ddot{\pi}H(H + 2H_\phi) \\
& + 18G_{6\pi}\left(2H\dot{H}_\phi + 2HH_\phi^2 + 2(H + H_\phi)\dot{H} + 2H^3 + 9H_\phi H^2\right) \\
& - 108G_{6X}\left(H_\phi\ddot{\pi}H^2 + \dot{H}_\phi\dot{\pi}H^2 + \dot{\pi}H^2H_\phi^2 + 2HH_\phi\dot{H}\dot{\pi} + 4H_\phi\dot{\pi}H^3\right) \\
& + 36G_{6X\pi}\dot{\pi}\left(9H\ddot{\pi}(2H_\phi + H) + \dot{\pi}\left(8HH_\phi^2 + 39H_\phi H^2 + 8H\dot{H}_\phi\right.\right. \\
& \left.\left.+ 8(H_\phi + H)\dot{H} + 16H^3\right)\right) \\
& - 216G_{6XX}H(\dot{\pi})^2\left(7H_\phi\ddot{\pi}H^2 + \dot{\pi}\left(8H_\phi H^3 + 2H^2H_\phi^2 + 2\dot{H}_\phi H^2 + 4HH_\phi\dot{H}\right)\right) \\
& + 72G_{6XX\pi}\left(16HH_\phi\ddot{\pi}(\dot{\pi})^3 + 8\ddot{\pi}H^2(\dot{\pi})^3 + 5H_\phi H^2(\dot{\pi})^4 + 2HH_\phi^2(\dot{\pi})^4 + 2H\dot{H}_\phi(\dot{\pi})^4\right. \\
& \left.+ 2(H_\phi + H)\dot{H}(\dot{\pi})^4 + 4H^3(\dot{\pi})^4\right) \\
& + 108G_{6X\pi\pi}H(\dot{\pi})^3(2H_\phi + H) - 144G_{6XXX}(\dot{\pi})^4\left(11H_\phi\ddot{\pi}H + \dot{\pi}\left(2H_\phi\dot{H}\right.\right. \\
& \left.\left.+ 4H_\phi H^2 + \dot{H}_\phi H + HH_\phi^2\right)\right) + 144G_{6XX\pi}(\dot{\pi})^5H\left(\ddot{\pi}(2H_\phi + H) - H_\phi H\dot{\pi}\right) \\
& - 288G_{6XXX}H_\phi\ddot{\pi}H^2(\dot{\pi})^6 + 72G_{6XX\pi\pi}(\dot{\pi})^5H(2H_\phi + H), \tag{E.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{20} = & \frac{1}{2}F_{\pi\pi} - K_{X\pi} \left((\dot{\pi})^2 \left(9H^2 + 3\dot{H} + \dot{H}_\phi + H_\phi^2 + 6HH_\phi \right) + 2\dot{\pi}\ddot{\pi} (H_\phi + 3H) \right) \\
& - F_{X\pi\pi}(\dot{\pi})^2 + \frac{1}{2}K_{\pi\pi\pi}(\dot{\pi})^2 - 2F_{XX\pi}\ddot{\pi}(\dot{\pi})^2 - F_{X\pi}(\ddot{\pi} + \dot{\pi}(H_\phi + 3H)) \\
& + K_{\pi\pi}(\ddot{\pi} + \dot{\pi}(H_\phi + 3H)) + K_{X\pi\pi} \left(\ddot{\pi}(\dot{\pi})^2 - (\dot{\pi})^3(H_\phi + 3H) \right) \\
& - 2K_{XX\pi}\ddot{\pi}(\dot{\pi})^3(H_\phi + 3H) + 2G_{4X\pi\pi\pi}(\dot{\pi})^3(H_\phi + 3H) \\
& - 6G_{4X\pi} \left(\dot{\pi} \left(\dot{H}(2H + H_\phi) + 3H^3 + H\dot{H}_\phi + HH_\phi^2 + 4H_\phi H^2 \right) + \ddot{\pi}H(H + H_\phi) \right) \\
& + 2G_{4X\pi\pi} \left(3\dot{\pi}\ddot{\pi}(H_\phi + 3H) + (\dot{\pi})^2 \left(6HH_\phi + 9H^2 + 6\dot{H} + \dot{H}_\phi + H_\phi^2 \right) \right) \\
& + 4G_{4XX\pi\pi} \left(\ddot{\pi}(\dot{\pi})^3(H_\phi + 3H) - 3(\dot{\pi})^4H(H_\phi + H) \right) - 24G_{4XXX\pi}H\ddot{\pi}(\dot{\pi})^4(H_\phi + H) \\
& - 12G_{4XX\pi} \left(4\ddot{\pi}(\dot{\pi})^2H(H + H_\phi) + (\dot{\pi})^3 \left(4H_\phi H^2 + \dot{H}(H_\phi + 2H) + 3H^3 + H\dot{H}_\phi \right. \right. \\
& \left. \left. + HH_\phi^2 \right) \right) + G_{4\pi\pi} \left(\dot{H}_\phi + H_\phi^2 + 3\dot{H} + 6H^2 + 3HH_\phi \right) \\
& + 3G_{5\pi\pi} \left(\dot{\pi} \left(HH_\phi^2 + \dot{H}(2H + H_\phi) + 3H^3 + H\dot{H}_\phi + 4H_\phi H^2 \right) + \ddot{\pi}H(H_\phi + H) \right) \\
& + G_{5X\pi\pi} \left((\dot{\pi})^3 \left(3HH_\phi^2 + \dot{H}(6H + 3H_\phi) + 7H^3 + 6H_\phi H^2 + 3H\dot{H}_\phi \right) \right. \\
& \left. + 15\ddot{\pi}(\dot{\pi})^2H(H_\phi + H) \right) - G_{5XX\pi} \left(14\ddot{\pi}(\dot{\pi})^3H^2(3H_\phi + H) + 2(\dot{\pi})^4H(10H_\phi H^2 \right. \\
& \left. + 6H_\phi\dot{H} + 3\dot{H}H + 3H^3 + 3\dot{H}_\phi H + 3HH_\phi^2) \right) - 3G_{5X\pi} \left((\dot{\pi})^2H \left(3HH_\phi^2 + 3\dot{H}H \right. \right. \\
& \left. \left. + 3H^3 + 10H_\phi H^2 + 3\dot{H}_\phi H + 6H_\phi\dot{H} \right) + 2\dot{\pi}\ddot{\pi}H^2(3H_\phi + H) \right) \\
& + \frac{3}{2}G_{5\pi\pi\pi}(\dot{\pi})^2H(H_\phi + H) + 2G_{5XX\pi\pi} \left(3\ddot{\pi}(\dot{\pi})^4H(H_\phi + H) - (\dot{\pi})^5H^2(3H_\phi + H) \right) \\
& - 4G_{5XXX\pi}\ddot{\pi}(\dot{\pi})^5H^2(3H_\phi + H) + 3G_{5X\pi\pi\pi}(\dot{\pi})^4H(H_\phi + H) \\
& + G_{6XX\pi\pi} \left(96\ddot{\pi}(\dot{\pi})^3H^2(3H_\phi + H) + 12(\dot{\pi})^4H \left(3HH_\phi^2 + 5H_\phi H^2 + 6H_\phi\dot{H} \right. \right. \\
& \left. \left. + 3\dot{H}H + 3H^3 + 3\dot{H}_\phi H \right) \right) + 24G_{6XXX\pi\pi} \left(\ddot{\pi}(\dot{\pi})^5H^2(3H_\phi + H) - H_\phi H^3(\dot{\pi})^6 \right) \\
& - 24G_{6XXX\pi} \left(11H_\phi\ddot{\pi}H^3(\dot{\pi})^4 + (\dot{\pi})^5H^2 \left(3H_\phi\dot{H} + 3H_\phi H^2 + \dot{H}_\phi H + HH_\phi^2 \right) \right) \\
& + 12G_{6XX\pi\pi\pi}(\dot{\pi})^5H^2(3H_\phi + H) - 36G_{6XX\pi} \left(7H_\phi\ddot{\pi}H^3(\dot{\pi})^2 \right. \\
& \left. + (\dot{\pi})^3 \left(2H^3H_\phi^2 + 6H_\phi\dot{H}H^2 + 6H_\phi H^4 + 2\dot{H}_\phi H^3 \right) \right) + G_{6X\pi\pi} \left(54\dot{\pi}\ddot{\pi}H^2(3H_\phi + H) \right. \\
& \left. + 18(\dot{\pi})^2 \left(4\dot{H}_\phi H^2 + 4H^2H_\phi^2 + 144HH_\phi\dot{H} + 13H_\phi H^3 + 4\dot{H}H^2 + 4H^4 \right) \right) \\
& + 18G_{6X\pi\pi\pi}(\dot{\pi})^3H^2(3H_\phi + H) - 18G_{6X\pi}H^2 \left(\dot{\pi} \left(3H_\phi\dot{H} + 3H_\phi H^2 + HH_\phi^2 + \dot{H}_\phi H \right) \right. \\
& \left. + H_\phi H\ddot{\pi} \right) + 9G_{6\pi\pi}H \left(\dot{H}_\phi H + HH_\phi^2 + \dot{H}H + 2H_\phi\dot{H} + H^3 + 3H_\phi H^2 \right) \\
& - 48G_{6XXX\pi}H_\phi\ddot{\pi}H^3(\dot{\pi})^6, \tag{E.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1 = & \frac{1}{2}G_4 - G_{4X}(\dot{\pi})^2 + \frac{1}{4}G_{5\pi}(\dot{\pi})^2 - G_{5X}H(\dot{\pi})^3 - 6G_{6XX}H^2(\dot{\pi})^4 + 6G_{6X\pi}H(\dot{\pi})^3 \\
& - 6G_{6X}H^2(\dot{\pi})^2 + \frac{3}{2}G_6H^2 + 3G_{6\pi}H\dot{\pi},
\end{aligned} \tag{E.20}$$

$$\begin{aligned}
B_2 = & -G_4(3H_\phi + H) + 2G_{4X}\left((\dot{\pi})^2(3H_\phi + H) + \dot{\pi}\ddot{\pi}\right) \\
& + G_{5X\pi}(\dot{\pi})^3(2H\dot{\pi} - \ddot{\pi}) - \frac{1}{2}G_{5\pi}\left(2\dot{\pi}\ddot{\pi} + (\dot{\pi})^2(H + 3H_\phi)\right) \\
& + 2G_{5X}\left(3H\ddot{\pi}(\dot{\pi})^2 + (\dot{\pi})^3(3HH_\phi + \dot{H} + H^2)\right) \\
& + 12G_{6XX}(\dot{\pi})^3H\left(6\ddot{\pi}H + \dot{\pi}(2\dot{H} + H^2 + 3H_\phi H)\right) \\
& + 12G_{6XX\pi}H(\dot{\pi})^4(H\dot{\pi} - 2\ddot{\pi}) + 6G_{6X}\dot{\pi}H\left(3\ddot{\pi}H + 2\dot{\pi}(2\dot{H} + H^2 + 3H_\phi H)\right) \\
& - 12G_{6X\pi}(\dot{\pi})^2\left(4H\ddot{\pi} + \dot{\pi}(3HH_\phi + \dot{H})\right) - 3G_6H\left(2\dot{H} + H^2 + 3H_\phi H\right) \\
& - 3G_{6\pi}\left(\dot{\pi}(3H^2 + 2\dot{H} + 6HH_\phi) + 2H\ddot{\pi}\right) - G_{4\pi}\dot{\pi} + 2G_{4X\pi}(\dot{\pi})^3 \\
& - \frac{1}{2}G_{5\pi\pi}(\dot{\pi})^3 + 4G_{4XX}\ddot{\pi}(\dot{\pi})^3 + 4G_{5XX}H\ddot{\pi}(\dot{\pi})^4 \\
& + 24G_{6XXX}\ddot{\pi}H^2(\dot{\pi})^5 - 12G_{6X\pi\pi}H(\dot{\pi})^4 - 6G_{6\pi\pi}H(\dot{\pi})^2,
\end{aligned} \tag{E.21}$$

$$C_1 = -12B_1, \tag{E.22}$$

$$C_2 = (H_\phi - H)C_1,$$

$$\begin{aligned}
C_4 = & -2K_X(\dot{\pi})^2 + 4G_{4X\pi}(\dot{\pi})^2 + 2G_{4\pi} - 24G_{4XX}H(\dot{\pi})^3 \\
& - 12G_{4X}H\dot{\pi} + 6G_{5X\pi}H(\dot{\pi})^3 + 6G_{5\pi}H\dot{\pi} - 18G_{5X}H^2(\dot{\pi})^2 - 12G_{5XX}H^2(\dot{\pi})^4 \\
& - 144G_{6XX}H^3(\dot{\pi})^3 + 72G_{6XX\pi}H^2(\dot{\pi})^4 - 48G_{6XXX}H^3(\dot{\pi})^5 \\
& - 36G_{6X}\dot{\pi}H^3 + 144G_{6X\pi}H^2(\dot{\pi})^2 + 18G_{6\pi}H^2,
\end{aligned} \tag{E.23}$$

$$\begin{aligned}
C_5 = & -2F_X\dot{\pi} + 2K_\pi\dot{\pi} - 4K_{XX}\ddot{\pi}(\dot{\pi})^3 - 2K_{X\pi}(\dot{\pi})^3 + 4G_{4X\pi\pi}(\dot{\pi})^3 \\
& - 48G_{4XXX}H\ddot{\pi}(\dot{\pi})^4 + 2G_{4\pi}(2H_\phi + 3H) \\
& - 4K_X\left((\dot{\pi})^2(H_\phi + 3H) + \dot{\pi}\ddot{\pi}\right) - 12G_{4X}\left(\dot{\pi}(4H^2 + 2HH_\phi + \dot{H}) + H\ddot{\pi}\right) \\
& + 4G_{4X\pi}\left(2(\dot{\pi})^2(H_\phi + 3H) + 3\dot{\pi}\ddot{\pi}\right) + 8G_{4XX\pi}(\dot{\pi})^3(\ddot{\pi} - 3H\dot{\pi}) \\
& - 24G_{4XX}\left((\dot{\pi})^3(2HH_\phi + 4H^2 + \dot{H}) + 4H\ddot{\pi}(\dot{\pi})^2\right) \\
& + 6G_{5X\pi}(\dot{\pi})^2\left(\dot{\pi}(2H^2 + 2HH_\phi + \dot{H}) + 5H\ddot{\pi}\right) + 6G_{5\pi}\left(\dot{\pi}(4H^2 + 2HH_\phi + \dot{H}) + H\ddot{\pi}\right) \\
& - 4G_{5XX}H(\dot{\pi})^3\left(2\dot{\pi}(5H^2 + 3H_\phi H + 3\dot{H}) + 21\ddot{\pi}H\right) \\
& - 12G_{5X}\dot{\pi}H\left(\dot{\pi}(5H^2 + 3H_\phi H + 3\dot{H}) + 3\ddot{\pi}H\right) + 12G_{5XX\pi}H(\dot{\pi})^4(\ddot{\pi} - H\dot{\pi}) \\
& + 24G_{6XX\pi}H(\dot{\pi})^3\left(\dot{\pi}(5H^2 + 6H_\phi H + 6\dot{H}) + 24\ddot{\pi}H\right) \\
& - 72G_{6XX}H^2(\dot{\pi})^2\left(2\dot{\pi}(2H_\phi H + 3\dot{H} + 3H^2) + 7\ddot{\pi}H\right) \\
& - 48G_{6XXX}H^2(\dot{\pi})^4\left(11\ddot{\pi}H + \dot{\pi}(2H_\phi H + 3\dot{H} + 3H^2)\right) \\
& + 48G_{6XX\pi}H^2(\dot{\pi})^5(3\ddot{\pi} - H\dot{\pi}) + 36G_{6X\pi}\dot{\pi}H\left(\dot{\pi}(13H^2 + 8H_\phi H + 8\dot{H}) + 9\ddot{\pi}H\right) \\
& - 36G_{6X}H^2\left(\dot{\pi}(2H_\phi H + 3\dot{H} + 3H^2) + \ddot{\pi}H\right) + 18G_{6\pi}H(2H_\phi H + 2\dot{H} + 3H^2) \\
& + 3G_{5\pi\pi}H(\dot{\pi})^2 + 6G_{5X\pi\pi}H(\dot{\pi})^4 - 24G_{5XXX}\ddot{\pi}H^2(\dot{\pi})^5 + 72G_{6XX\pi\pi}H^2(\dot{\pi})^5 \\
& - 96G_{6XXX}\ddot{\pi}H^3(\dot{\pi})^6 + 108G_{6X\pi\pi}(\dot{\pi})^3H^2, \tag{E.24}
\end{aligned}$$

$$C_7 = -\frac{1}{3}C_1, \tag{E.25}$$

$$C_8 = \frac{1}{3}C_1(H - H_\phi), \tag{E.26}$$

$$\begin{aligned}
C_9 = & -2K_X(\dot{\pi})^3 + 6G_4H - 24G_{4X}H(\dot{\pi})^2 + 4G_{4X\pi}(\dot{\pi})^3 \\
& + 2G_{4\pi}\dot{\pi} - 24G_{4XX}H(\dot{\pi})^4 - 30G_{5X}H^2(\dot{\pi})^3 + 9G_{5\pi}H(\dot{\pi})^2 \\
& + 6G_{5X\pi}H(\dot{\pi})^4 - 12G_{5XX}H^2(\dot{\pi})^5 - 216G_{6XX}H^3(\dot{\pi})^4 - 48G_{6XXX}H^3(\dot{\pi})^6 \\
& + 72G_{6XX\pi}H^2(\dot{\pi})^5 - 108G_{6X}H^3(\dot{\pi})^2 \\
& + 216G_{6X\pi}H^2(\dot{\pi})^3 + 18G_6H^3 + 54G_{6\pi}\dot{\pi}H^2, \tag{E.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{10} = & -2G_{4\pi} + 4G_{4X} \left(2H\dot{\pi} + \ddot{\pi} \right) + 4G_{4X\pi} (\dot{\pi})^2 \\
& + 8G_{4XX} \ddot{\pi} (\dot{\pi})^2 - G_{5\pi\pi} (\dot{\pi})^2 + 8G_{5XX} H \ddot{\pi} (\dot{\pi})^3 \\
& - 2G_{5\pi} \left(2H\dot{\pi} + \ddot{\pi} \right) + G_{5X} \left((\dot{\pi})^2 (8H^2 + 4\dot{H}) + 8H\dot{\pi}\ddot{\pi} \right) \\
& + 2G_{5X\pi} (\dot{\pi})^2 \left(2H\dot{\pi} - \ddot{\pi} \right) \\
& + 48G_{6XX} H (\dot{\pi})^2 \left(2\ddot{\pi}H + \dot{\pi}(\dot{H} + H^2) \right) - 24G_{6X\pi\pi} H (\dot{\pi})^3 \\
& + 24G_{6XX\pi} H (\dot{\pi})^3 \left(H\dot{\pi} - 2\ddot{\pi} \right) \\
& + 12G_{6X} H \left(\ddot{\pi}H + 2\dot{\pi}(\dot{H} + H^2) \right) - 24G_{6X\pi} \dot{\pi} \left(\dot{\pi}(\dot{H} + 2H^2) + 3H\ddot{\pi} \right) \\
& - 6G_{6\pi} \left(2\dot{H} + 3H^2 \right) + 48G_{6XXX} \ddot{\pi} H^2 (\dot{\pi})^4, \tag{E.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{11} = & -4G_4 + 24G_{6X} \left(H\dot{\pi}\ddot{\pi} + (\dot{\pi})^2 \left(H^2 + \dot{H} \right) \right) + 24G_{6X\pi} (\dot{\pi})^2 (-\ddot{\pi} + H(\dot{\pi})) \\
& - 12G_6 \left(\dot{H} + H^2 \right) - 12G_{6\pi} (H\dot{\pi} + \ddot{\pi}) + (\dot{\pi})^2 (2G_{5\pi} - 12G_{6\pi\pi}) \\
& + 4G_{5X} \ddot{\pi} (\dot{\pi})^2 + 48G_{6XX} H \ddot{\pi} (\dot{\pi})^3, \tag{E.29}
\end{aligned}$$

$$C_{12} = \frac{1}{3}C_1. \tag{E.30}$$