

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

*На правах рукописи*

**Маслов Василий Евгеньевич**

**Солитоны и осциллоны  
в скалярных теориях поля**

1.3.3 — теоретическая физика

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
кандидат физико-математических наук,  
Левков Дмитрий Геннадиевич

Москва — 2023

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Хаотические солитоны в неинтегрируемых моделях</b>	<b>14</b>
1.1 Введение. Статические решения в $(1+1)$ -мерной теории поля	14
1.2 Модель синус–Гордона во внешнем периодическом потенциале: свойства и приложения	15
1.3 Поиск многосолитонных решений	18
1.4 Бесконечное множество солитонов	22
1.5 Топологическая энтропия	26
1.6 Фрактальная структура	27
1.7 Метрическая энтропия	32
1.8 Заключение: обобщение результатов	34
<b>2 Эффективная теория поля для осциллонов большого размера</b>	<b>37</b>
2.1 Введение: что такое осциллоны?	37
2.2 Численная иллюстрация	38
2.3 Эффективная теория для классического поля	39
2.4 Осциллоны в эффективной теории	44
2.4.1 Условия существования	44
2.4.2 Долговечность и стабильность	49
2.5 Сравнение предсказаний эффективной теории с численными результатами	52
2.6 Поправки высших порядков	56
2.7 Сравнение с разложением по амплитуде поля и автоматизация	61
2.8 Обсуждение результатов	64
<b>3 Осциллоны в пределе нулевого количества измерений</b>	<b>67</b>
3.1 Введение. Зависимость времени жизни осциллона от размерности пространства.	67
3.2 Точные периодические решения при $d = 0$	68
3.3 Выводы: описание осциллонов в низких размерностях	70

<b>4</b>	<b>«Ренормгрупповой» подход к осциллонам в модели монодромии . . . . .</b>	<b>72</b>
4.1	Введение. Модель монодромии . . . . .	72
4.2	Механический осциллятор с потенциалом монодромии . . . . .	73
4.3	Эффективная теория поля и «бегущая масса» для осциллонов	77
4.4	Сравнение с численными результатами . . . . .	79
4.5	Высшие поправки . . . . .	81
4.6	Обсуждение и сравнение с другими методами . . . . .	83
	<b>Заключение . . . . .</b>	<b>86</b>
<b>A</b>	<b>Методы поиска и исследования хаотических солитонов . . . . .</b>	<b>89</b>
A.1	Поведение статических решений при $x \rightarrow \pm\infty$ . . . . .	89
A.2	Общий вид статических решений уравнения синус–Гордона . . . . .	90
A.3	Линейная стабильность . . . . .	90
A.4	Нахождение фрактала солитонов с заданной точностью . . . . .	92
<b>B</b>	<b>Численные методы получения осциллонов . . . . .</b>	<b>93</b>
<b>B</b>	<b>Свойства осциллонов в эффективной теории . . . . .</b>	<b>96</b>
B.1	Аналитическое решение при $d = 1$ . . . . .	96
B.2	Критерий Вахитова–Колоколова . . . . .	97
B.3	Эффективное действие второго порядка . . . . .	99
B.3.1	Общие положения . . . . .	99
B.3.2	Поправки в модели с плоским потенциалом . . . . .	101
	<b>Литература . . . . .</b>	<b>103</b>

## Введение

### Актуальность и степень разработанности темы исследования

В теории поля хорошо известны солитоны [1, 2] и солитоноподобные решения<sup>1</sup> — классические полевые конфигурации с локализованной плотностью энергии. Их существование обычно обеспечивается наличием сохраняющегося заряда, не позволяющего им распасться. Заряд может иметь топологическую природу [3] либо являться следствием симметрии полевых уравнений; в этих двух случаях говорят о топологических и нетопологических солитонах соответственно.

Простейшие топологические солитоны существуют в одномерных скалярных теориях с вырожденными вакуумами. Примерами являются кинк в модели  $\varphi^4$  с нарушенной симметрией и солитон в модели синус–Гордона [1]. В обоих случаях существование и стабильность солитонов гарантирует топология: они интерполируют между разными вакуумами при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Большой прогресс в изучении солитонов связан с возникновением в середине XX века теории интегрируемых систем. В таких системах число независимых интегралов движения совпадает с числом степеней свободы, что гарантирует существование множества многосолитонных решений. Для их нахождения были разработаны различные методы: преобразование Бэклунда [4], обратная задача рассеяния [5] и метод Хироты [6]. Упомянутая выше одномерная модель синус–Гордона как раз является интегрируемой, поэтому многосолитонные решения в ней существуют и найдены аналитически. Простейшим примером такого нетривиального солитона является бризер — связанное состояние солитона и антисолитона.

В неинтегрируемых моделях многосолитонные решения также существуют, но изучены гораздо хуже. Практически не известны объекты, существование которых не было бы связано с сохраняющимся зарядом — топологическим или глобальным. Уравнения на статические солитоны в этом случае тоже являются неинтегрируемыми. К примеру, в одномерном пространстве они имеют

---

<sup>1</sup>В теории интегрируемых систем на солитоны накладывается дополнительное условие: они должны упруго рассеиваться друг на друге. Мы пользуемся терминологией физических приложений, где это требование опускают и под солитонами понимают все локализованные стационарные решения полевых уравнений.

вид, схожий с уравнениями классической механики, где роль времени играет пространственная координата  $x$ . Известно, однако, что в неинтегрируемых механических системах возникает динамический хаос: сколь угодно близкие начальные условия через достаточной большой промежуток «времени» (т.е. координаты  $x$ ) приводят к совершенно разным траекториям системы. Интересный вопрос — как такой механический хаос отражается на конфигурациях статических солитонов в одномерных полевых системах.

Простейший способ реализовать подобную систему — поместить хорошо известную интегрируемую теорию, например, модель синус–Гордона, во внешний потенциал. Высота потенциала служит параметром, контролирующим неинтегрируемость. Крайне актуальным является вопрос о том, как наличие динамического хаоса влияет на профили и свойства статических солитонов. Но в литературе изучается только динамика движущихся солитонов в этой [7–12] и похожих [13] системах, которая, как и следовало ожидать, является хаотической.

Другие интересные объекты, которые появляются во множестве неинтегрируемых теоретико–полевых моделей — осциллоны. Они были впервые обнаружены численно в 1970-х годах [14, 15]. Осциллоны представляют собой почти периодические, компактные и чрезвычайно долгоживущие сгустки скалярного поля. Не являясь строго периодическими решениями, они излучают скалярные волны и в конечном итоге исчезают, но успевают перед этим совершить как минимум  $10^3$  полных осцилляций [16]. В некоторых теориях эти объекты живут до  $10^{14}$  периодов [17]. Несмотря на то, что осциллоны существуют во многих моделях с притягивающим взаимодействием между частицами, полноценного объяснения тому, почему их времена жизни столь велики, до сих пор нет. В частности, в системах, где они наблюдаются, нет очевидных малых параметров.

В последнее время осциллоны всё чаще используются в космологических сценариях. Они могут образовываться из аксионной [18–20] или сверхлёгкой [21] тёмной материи, появляться при космологических фазовых переходах в ранней Вселенной [22–26], формироваться из конденсата инфлатонного поля на стадии постинфляционного разогрева [27–30]. Также космологические осциллоны способны генерировать гравитационные волны [31–34], участвовать в бариогенезисе [33], являться «затравками» аксионных миникластеров [19] либо коллапсировать в первичные чёрные дыры [35, 36]. Это делает задачу

построения адекватного описания осциллонов ещё более актуальной.

До последнего времени существовало только одно модельно–независимое описание осциллонов: пертурбативное разложение по малой амплитуде поля [37–39]. Как правило, данный подход применим только если осциллоны имеют достаточно большой размер  $R \gg m^{-1}$ , а их частота  $\omega$  близка к массе  $m$  скалярного поля. На языке физики частиц такие конфигурации описывают конденсат слабо взаимодействующих бозонов с малыми импульсами и низкой энергией связи  $m - \omega \ll m$ . В нерелятивистском пределе число таких частиц сохраняется, что и обеспечивает существование осциллонов в моделях с притягивающим взаимодействием.

Однако такой пертурбативный метод не может считаться удовлетворительным сразу по нескольким причинам. Во-первых, он неприменим для описания самых долгоживущих осциллонов большой амплитуды, которые были обнаружены в скалярных моделях с почти квадратичными потенциалами. Примером могут служить модели инфляции [28] с потенциалом монодромии при определённом выборе параметров [17]. Во-вторых, известно, что трёхмерные осциллоны с  $\omega \approx m$  классически нестабильны по отношению к бесконечно малым возмущениям [40]. В этом случае пертурбативное разложение по малой амплитуде, которое работает при  $m - \omega \approx m$ , неправильно описывает стабильные осциллоны при меньших частотах  $\omega$ .

В работах [41, 42] было предложено объяснять долговечность всех осциллонов существованием адиабатического инварианта, который приближённо сохраняется в процессе их эволюции. Такой подход может оказаться верным для осциллонов большого размера  $R \gg m^{-1}$ , т.к. характерные времена  $R^{-1}$  эволюции таких объектов как целого сильно превышают их периоды  $T \sim O(m^{-1})$ . Но основная проблема здесь заключается в том, что определения адиабатического инварианта вне уравнений поля не существует: в литературе значения этой величины вычислялись только на полученном ранее решении [41, 42]. Мы увидим, однако, что требуемый инвариант естественным образом возникает в эффективной теории для широкомасштабных конфигураций поля, таких как осциллоны большого размера. Это означает, что эффективный подход правильно описывает осциллоны и объясняет их долговечность — как в общем случае, так и в особо интересном потенциале монодромии.

**Целью** данной работы является изучение свойств солитонов и осцил-

лонов в неинтегрируемых моделях скалярного поля. Для этого необходимо решить следующие **задачи**:

- Получить статические солитоны в модели синус–Гордона, взаимодействующей с внешним потенциалом, и исследовать их стабильность. Выяснить, как количество статических солитонов фиксированного размера зависит от параметра, характеризующего неинтегрируемость системы. Исследовать влияние динамического хаоса на свойства солитонов, в частности, на распределение солитонных решений в конфигурационном пространстве.
- Построить эффективную теорию поля для описания осциллонов большого размера. Показать, что такой подход естественным образом объясняет долговечность этих объектов. Исследовать зависимость параметров больших осциллонов от частоты колебаний. Сравнить предсказания эффективной теории с результатами численных симуляций.
- Рассмотреть осциллоны при разном числе  $d$  пространственных измерений, в частности, при  $d \rightarrow 0$ . Объяснить увеличение времени их жизни с уменьшением  $d$ .
- Построить точное количественное описание чрезвычайно долгоживущих осциллонов в скалярных моделях с потенциалами, близкими к квадратичным. Применить полученный метод к модели монодромии, сравнить теоретические предсказания с результатами численного моделирования.

### **Методы исследования**

При выполнении диссертационной работы использовались строгие методы современной теоретической и математической физики. Аналитические методы включают в себя элементы теории динамических систем, методы поиска точных и приближённых решений нелинейных уравнений, эффективную теорию поля и метод пересуммирования, аналогичный ренормгрупповому подходу в квантовой теории поля.

Численный поиск статических солитонов в модели с динамическим хаосом осуществлялся методом стрельбы с использованием чисел произвольной точности. Моделирование эволюции осциллонов производилось с помощью симплектического алгоритма четвёртого порядка [43, 44]. При этом для пространственных производных использовалась дискретизация бесконечного

порядка, основанная на (быстром) преобразовании Фурье [45].

### Положения, выносимые на защиту

1. На примере  $(1+1)$ -мерной модели синус–Гордона во внешнем потенциале продемонстрировано, что свойства статических солитонов в моделях с неинтегрируемыми уравнениями поля отличаются от свойств солитонов в интегрируемых теориях. А именно, в неинтегрируемом случае:
  - (а) Количество стабильных солитонов экспоненциально растёт с увеличением их пространственного размера. При этом показатель экспоненты связан с топологической энтропией статических уравнений поля.
  - (б) Солитонные решения образуют фрактал в конфигурационном пространстве теории. Размерность фрактала — нецелая, она немонотонно зависит от параметра неинтегрируемости модели. Преобразование самоподобия фрактала в окрестности солитонного решения связано с экспонентой Ляпунова этого решения. В тоже время, глобальное распределение значений поля во фрактале характеризуется метрической энтропией статических уравнений.
2. Предложено универсальное эффективное описание нелинейных осциллонов большого размера. Для этого построено эффективное действие, описывающее широкомасштабные быстроосциллирующие полевые конфигурации, которое имеет вид асимптотического разложения по степеням пространственных производных полей. В каждом члене этого разложения точно учитывается нелинейность потенциала. Показано, что во всех порядках эффективное действие обладает глобальной  $U(1)$  симметрией. Это гарантирует существование семейства нетопологических солитонов, описывающих осциллоны в полной теории. Благодаря этому выведены строгие критерии существования, стабильности и долговечности осциллонов большого размера.
3. Проведено сравнение эффективного описания осциллонов с результатами численного моделирования в полной теории. Установлено, что эффективное действие более точно описывает нерелятивистские осциллоны, а также осциллоны в низкой пространственной размерности  $d$ .

4. Показано, что в формальном пределе нулевой размерности пространства  $d \rightarrow 0$  осциллоны превращаются в точные периодические решения, и их эффективное описание тоже становится точным. Это объясняет увеличение времени жизни осциллонов при уменьшении размерности пространства.
5. Разработан «ренормгрупповой» метод описания осциллонов в скалярных моделях с почти квадратичными потенциалами. Метод основан на введении «бегущей массы», которая медленно зависит от амплитуды поля. Данный трюк позволяет упростить построение эффективного действия для осциллонов и радикально улучшить точность этого аналитического подхода. Проведено сравнение теории с результатами численных вычислений в трёхмерной модели с потенциалом монодромии. Показано, что в широкой области параметров относительная точность «улучшенной по ренормгруппе» эффективной теории превышает 10%.

### **Научная новизна**

Все выносимые на защиту результаты являются новыми и не имеют аналогов в научной литературе. А именно:

1. Впервые изучено бесконечное семейство стабильных статических солитонов в неинтегрируемой модели синус–Гордона во внешнем потенциале. Также новым является исследование влияния динамического хаоса на свойства статических солитонов.
2. Впервые разработано последовательное модельно-независимое описание осциллонов большого размера, которое полностью учитывает нелинейность взаимодействия. Впервые вычислены первые два члена градиентного разложения для эффективного действия, что позволило прояснить причины существования осциллонов и установить критерии их стабильности и долговечности.
3. Впервые предложен «ренормгрупповой» подход, позволяющий упростить эффективное описание осциллонов и радикально улучшить его точность в моделях с почти квадратичными потенциалами. С помощью явных вычислений в модели монодромии показано, что точность нового метода превосходит другие имеющиеся в литературе описания осциллонов.

## **Теоретическая и практическая значимость**

Обнаружение новых «хаотических» солитонов в моделях с неинтегрируемыми статическими уравнениями открывает путь к исследованию солитонных решений методами динамических систем и теории хаоса. Практическая значимость новых солитонов связана с применением модели синус–Гордона в различных разделах физики. Она может описывать классическую ферромагнитную спиновую цепочку во внешнем магнитном поле [46–48], взаимодействие двух одномерных сверхтекучих жидкостей [49–51] и длинный контакт Джозефсона [7, 8, 52]. Пространственно неоднородный внешний потенциал естественным образом возникает, если параметры соответствующих систем [53] зависят от пространственной координаты. В этом случае в системах могут наблюдаться хаотические солитоны, найденные и исследованные в данной работе.

Построенное в диссертации эффективное описание осциллонов позволило получить общие условия их существования, стабильности и долговечности, которые могут применяться в различных моделях. Доказательство существования точных периодических решений классических уравнений поля в формальном пределе нулевого количества пространственных измерений указывает на большую распространённость осциллонов в низкоразмерных моделях. С практической точки зрения, наиболее важным результатом диссертации является «улучшенное по ренормгруппе» упрощённое эффективное описание осциллонов. Оно может оказаться полезным для исследования роли этих объектов в различных космологических процессах, будь то фазовые переходы [22–26], образование тёмной материи [18–21], бариогенезис [33] или постинфляционный разогрев [27–30].

## **Достоверность и обоснованность результатов**

Достоверность полученных результатов обеспечивается применением математически обоснованных методов теоретической физики. Корректность всех численных вычислений подтверждена множеством тестов, которые описаны в Приложении.

- Численное решение уравнения на профили хаотических солитонов решается с помощью последовательного применения точных аналитических формул. При этом используется библиотека чисел произвольно высокой точности.

- Показано, что построенное эффективное описание воспроизводит пертурбативное разложение в случае осцилляторов малой амплитуды. Все предсказания эффективной теории, а также «ренормгруппового» подхода, подтверждены явным сравнением с численными симуляциями. Точность совпадения результатов улучшалась, когда в рассмотрение включались высшие порядки эффективной теории.

Результаты данной диссертации опубликованы в рецензируемых научных журналах, а также докладывались на множестве семинаров и конференций.

### **Апробация результатов**

Результаты диссертации представлены автором лично на следующих российских и международных конференциях и семинарах:

- 21-я Международная Ломоносовская конференция по физике элементарных частиц, Москва, 24 — 30 августа 2023 года (устный доклад).
- Международная конференция «6th International Conference on Particle Physics and Astrophysics», Москва, 29 ноября — 2 декабря 2022 года (устный доклад).
- Мемориальная конференция памяти академика А.А. Славнова, Москва, 21 — 22 декабря 2022 года (постерный доклад).
- XXV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов–2019», Москва, 8—12 апреля 2019 года (устный доклад).
- Научный семинар в Perimeter Institute, Канада, 4 октября 2022 года (устный доклад).
- Научный семинар Института Теоретической и Математической Физики МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, 5 октября 2022 (устный доклад).
- Семинар теоргруппы Лаборатории Физики Высоких Энергий МФТИ, г. Долгопрудный, 25 октября 2022 года (устный доклад).
- Семинар Отдела теоретической физики Института Ядерных Исследований РАН, Москва, 19 июня 2023 года и 6 декабря 2018 года (устные доклады).

## Список публикаций

Результаты диссертации опубликованы в 3 статьях [54–56] в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах Web of Science и Scopus.

- [1] Levkov D. G., Maslov V. E., and Nugaev E. Ya. Chaotic solitons in driven sine-Gordon model // Chaos Solitons and Fractals. — 2020. — Vol. 139. — P. 110079. (импакт-фактор Web of Science: 7.8) — arXiv: 2004.13052.
- [2] Levkov D. G., Maslov V. E., Nugaev E. Ya., and Panin A. G. An Effective Field Theory for large oscillons // Journal of High Energy Physics. — 2022. — Vol. 12. — P. 079. (импакт-фактор Web of Science: 5.4) — arXiv: 2208.04334.
- [3] Levkov D. G. and Maslov V. E. Analytic description of monodromy oscillons // Physical Review D — 2023. — Vol. 108. — P. 063514. (импакт-фактор Web of Science: 5.0) — arXiv: 2306.06171.

## Личный вклад автора

Все результаты, представленные в данной диссертации, получены лично автором, либо автор внёс определяющий вклад в их получение. Автор принимал прямое участие в написании текста и подготовке рисунков всех статей, которые легли в основу данной диссертации.

## Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и трёх приложений. Объём работы составляет 112 страниц и включает 29 рисунков. Список литературы содержит 106 наименований.

В Главе 1 на примере модели синус–Гордона, взаимодействующей с внешним неоднородным потенциалом, изучаются необычные свойства солитонов в одномерных моделях с неинтегрируемыми статическими уравнениями. В частности, устанавливается зависимость количества стабильных солитонов от их пространственного размера, фрактальное распределение солитонов в конфигурационном пространстве, а также связь этих объектов с метрической и топологической энтропиями — мерами хаоса в статических уравнениях поля.

Глава 2 посвящена последовательному описанию нелинейных осциллонов большого размера. В ней построено классическое эффективное действие для широкомасштабных осциллирующих конфигураций скалярного поля. По-

казано, что эффективное действие обладает глобальной  $U(1)$  инвариантностью. В связи с этим осциллоны в эффективной теории можно описать как нетопологические солитоны и получить критерии их существования, долговечности и стабильности. Последним результатом Главы является сравнение предсказаний эффективной теории с результатами численных симуляций и с пертурбативным разложением по амплитуде поля.

В Главе 3 рассматриваются осциллоны в формальном пределе нулевого числа пространственных измерений  $d$ . Показано, что при  $d = 0$  осциллон превращается в точное периодическое решение уравнений поля, и его эффективное описание также становится точным. Это объясняет рост времени жизни осциллонов при уменьшении  $d$ .

Наконец, в Главе 4 рассматриваются осциллоны в моделях с потенциалами, близкими к квадратичному. Разрабатывается «ренормгрупповой» метод учёта нелинейности потенциала в сильных полях за счёт введения «бегущей массы» поля. На основе этого подхода модифицируется эффективная теория поля. Полученные результаты сравниваются с численным моделированием полных уравнений поля.

В Приложении А описаны методы поиска и исследования «хаотических» солитонов в неинтегрируемой модели Главы 1. Приложение Б содержит подробное описание и детальные проверки метода численного решения полного полевого уравнения для исследования осциллонов. Несколько важных свойств осциллонов в эффективной теории выведены в Приложении В.

# Глава 1

## Хаотические солитоны в неинтегрируемых моделях

### 1.1 Введение. Статические решения в (1+1)–мерной теории поля

Существует интересная математическая аналогия между статическими солитонами в (1+1)–мерной теории поля и траекториями точечных частиц в многомерной механике. А именно, профили солитонов удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial \varphi_i}, \quad (1.1)$$

где  $\varphi_i(x)$  — поля рассматриваемой модели, а  $V(\varphi, x)$  — их скалярный потенциал. Уравнения (1.1) совпадают с законом Ньютона, описывающим эволюцию во «времени»  $x$  воображаемой частицы с координатами  $\varphi_i(x)$  во внешнем потенциале  $V_{mech}(x) \equiv -V$ . Таким образом, изучая механические траектории, можно исследовать солитоны. При  $x \rightarrow \pm\infty$  поле солитона стремится к вакуумам — минимумам потенциала  $V$ . Поэтому соответствующие механические траектории  $\varphi_i(x)$  лежат на сепаратрисе: они стартуют с максимума  $V_{mech}(\varphi)$  при  $x \rightarrow -\infty$  и забираются на тот же либо на другой максимум в бесконечном «будущем», при  $x \rightarrow +\infty$ .

Рассмотренная аналогия указывает на то, что свойства одномерных статических солитонов могут существенно отличаться в моделях со многими полями или в моделях с пространственно–неоднородными потенциалами  $V(\varphi, x)$  от простейшего случая скалярной теории одного поля. Действительно, механическое движение, как правило, хаотично в системах с несколькими степенями свободы, а также в неконсервативных одномерных системах. Гладкая сепаратриса в этом случае разрушается [57], и максимумы потенциала оказываются соединены бесконечным числом траекторий. Поскольку каждая траектория соответствует солитону, то в многополевых моделях должно существовать бесконечное число солитонов. Эта Глава посвящена изучению таких

«хаотических» солитонов и их распределению в конфигурационном пространстве. В частности, мы покажем, что с точки зрения теории поля многие из них стабильны<sup>2</sup>, т.е. не разрушаются в процессе эволюции после добавления небольшого линейного возмущения. Стабильные статические солитоны представляют для нас основной интерес.

## 1.2 Модель синус–Гордона во внешнем периодическом потенциале: свойства и приложения

Рассмотрим теорию статического одномерного скалярного поля с гамильтонианом

$$H[\varphi] = \int dx \left( \frac{1}{2} (\partial_x \varphi)^2 + V(\varphi, x) \right). \quad (1.2)$$

В качестве потенциала  $V(\varphi, x)$  возьмём пространственно–неоднородный потенциал модели синус–Гордона

$$V(\varphi, x) = U(x) (1 - \cos \varphi), \quad (1.3)$$

где  $U(x) \geq 0$  — периодическая функция, а штрих обозначает производную по  $x$ . Мы будем решать статическое уравнение поля

$$\varphi'' = \partial V / \partial \varphi \quad (1.4)$$

с потенциалом (1.3).

Прежде чем рассматривать решения в такой модели, обсудим, где она встречается. Во-первых, (1+1)–мерное релятивистское скалярное поле удовлетворяет уравнению  $\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi = -\partial V / \partial \varphi$ , которое сводится к (1.3), (1.4) в статическом случае  $\varphi = \varphi(x)$  при соответствующем выборе потенциала  $V$ , см. [1, 2].

Вторым примером является Бозе–конденсат в потенциальной яме [49–51], представляющий собой две параллельных долины вдоль оси  $x$ , см. Рис. 1.1а. Взаимодействие конденсатов в долинах происходит за счёт туннелирования через потенциальный барьер. Можно показать, что разность фаз  $\psi(x) = \arg \psi_1(x) - \arg \psi_2(x)$  волновых функций конденсата удовлетворяет

---

<sup>2</sup>В отличие от траекторий  $\varphi_i(x)$  воображаемых частиц, которые нестабильны как функции  $x$  в хаотическом режиме.

уравнению (1.3), (1.4), где  $U$  характеризует взаимодействие между конденсатами. Периодическая зависимость барьера между долинами от координаты приводит к возникновению пространственной модуляции  $U = U(x)$  в уравнении.

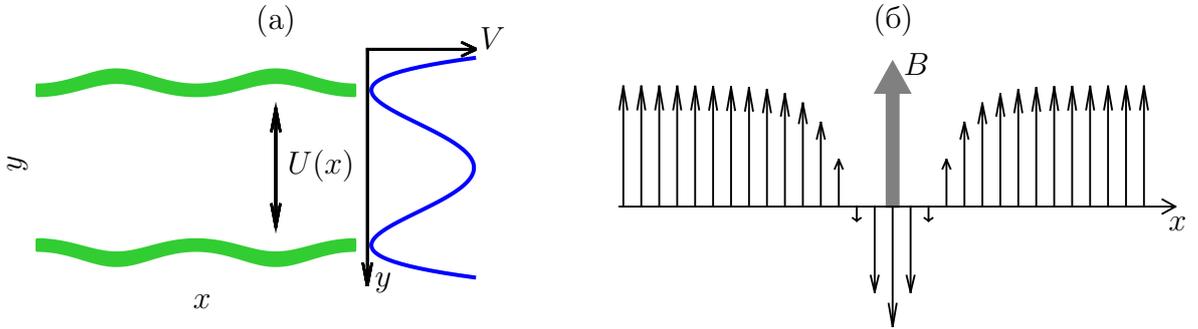


Рис. 1.1: (а) Бозе-конденсат (толстые сплошные линии) в двойной яме с периодически меняющимся параметром связи  $U(x)$ . (б) Ферромагнитная спиновая цепочка в пространственно неоднородном магнитном поле  $B$ .

Третий пример, где возникает уравнение (1.3), (1.4) — классическая ферромагнитная спиновая цепочка [47, 58], выстроенная вдоль оси  $x$  и взаимодействующая с внешним магнитным полем  $B$ , как показано на Рис. 1.1б. Поведение такой цепочки на больших расстояниях можно описать [46, 48] уравнением (1.3), (1.4), где  $\varphi(x)$  играет роль угла поворота спинов в плоскости  $y-z$ . В этом случае  $U \propto B/(J_s \Delta^2)$ , где  $\Delta$  — межспиновое расстояние, а  $J_s$  характеризует взаимодействие между соседними спинами. Вводя пространственную неоднородность магнитного поля  $B = B(x)$ , опять получаем уравнение (1.3), (1.4).

Отметим, что существуют и другие применения статического уравнения синус–Гордона (см., например, [52, 53]), где пространственная модуляция потенциала может быть связана с зависимостью параметров от пространственной координаты.

Простейшими решениями уравнения (1.3), (1.4) являются вакуумы  $\varphi_n = 2\pi n$ , где  $n$  — целое. Они соответствуют минимумам энергии (1.2) и максимумам механического потенциала  $V_{mech} \equiv -V$ . Отметим, что указанные вакуумы являются пространственно однородными, несмотря на то, что  $U(x)$ , вообще говоря, зависит от координаты.

Если бы  $U(x)$  была константой, то аналогичное механическое движение было бы одномерным, консервативным, и потому интегрируемым. В этом

случае есть только два типа статических солитонов:  $\phi_K(x)$  и  $\phi_A(x)$ , которые интерполируют между соседними максимумами механического потенциала  $V_{mech} \equiv -V$ , см. Рис. 1.2а. Мы будем называть эти решения «кинком» и «антикинком» соответственно. Их профили образуют гладкую сепаратрису (Рис. 1.2б) в фазовом пространстве  $(\varphi, \varphi')$  механической системы.

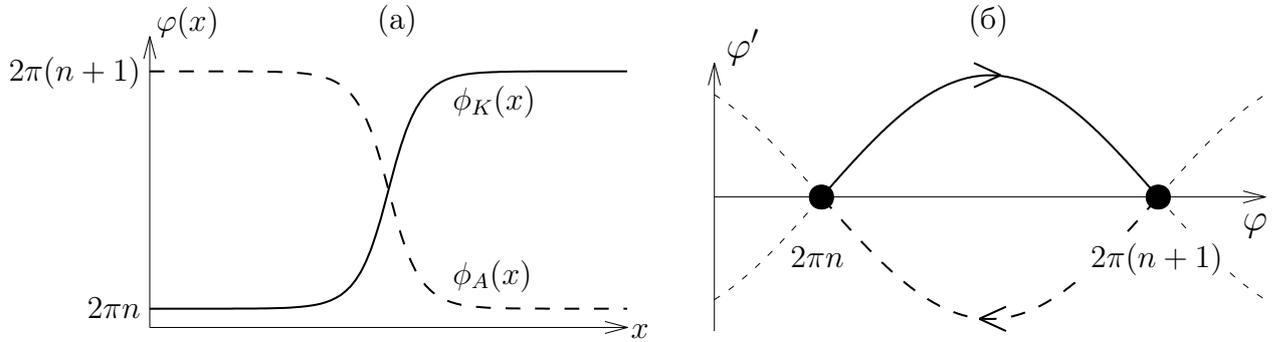


Рис. 1.2: (а) Профили кинка и антикинка при  $U = \text{const}$ . (б) Соответствующие траектории в механическом «фазовом пространстве»  $(\varphi, \varphi')$ . Стрелки соответствуют росту «времени»  $x$ .

В дальнейшем мы будем рассматривать случай пространственно неоднородной  $U(x)$ . В этом случае модель становится неинтегрируемой, а сепаратриса разрушается. В численных вычислениях мы будем использовать простейшую зависимость потенциала

$$U(x) = 1 + \varepsilon \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - mD), \quad (1.5)$$

где используются безразмерные единицы с единичной массой поля, пространственный период<sup>3</sup> равен  $D = 12$ , а параметр  $\varepsilon$  характеризует хаотичность соответствующей механической модели. Хотя выбор (1.5) может показаться странным с точки зрения некоторых приложений, мы ожидаем, что полученные качественные результаты останутся в силе для любой периодической  $U(x)$ .

Чтобы проиллюстрировать хаос в системе (1.3), (1.4), (1.5), построим сечение Пуанкаре [59] для аналогичной механической системы при разных значениях параметра  $\varepsilon$ . Для этого рассмотрим произвольное решение, стартовое с вакуума  $\varphi \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ . Численно получая решение, будем

<sup>3</sup>Отметим, что  $D$  превышает ширину кинка в невозмущённой модели синус-Гордона.

отмечать на фазовой плоскости значения  $\varphi$  и  $\varphi'$  в точках  $x = mD + 0$ , т.е. после завершения каждого периода внешнего потенциала. Результат представлен на Рис. 1.3. При  $\varepsilon = 10^{-4}$  (Рис. 1.3а) решение остаётся вблизи гладкой

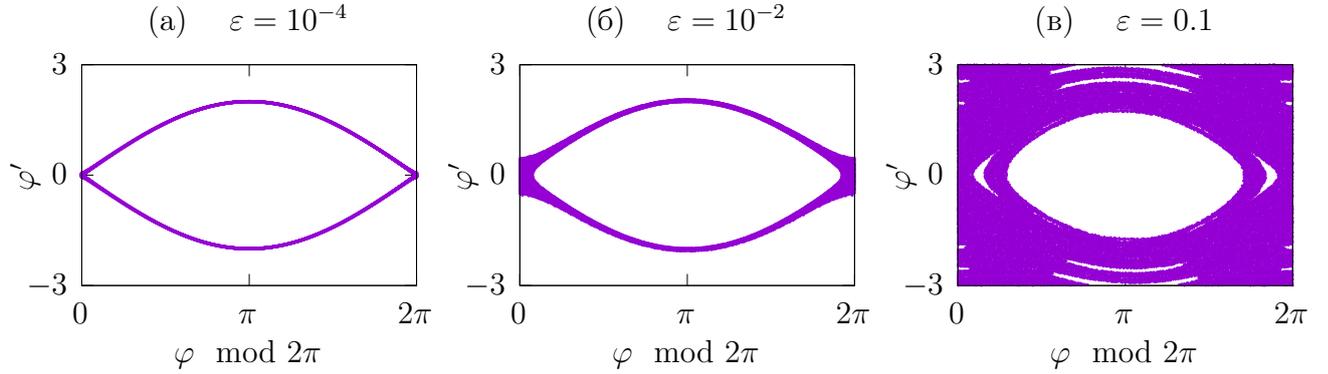


Рис. 1.3: Сечения Пуанкаре для различных  $\varepsilon$ . Значения  $\varphi$  приведены с точностью до прибавления  $2\pi n$ :  $0 \leq (\varphi \bmod 2\pi) \leq 2\pi$ .

кривой — сепаратрисы на Рис. 1.2б. Такое поведение согласуется с теорией Колмогорова-Арнольда-Мозера (КАМ) о почти периодическом движении в слабо неинтегрируемых системах [60–62]. Однако при  $\varepsilon > 10^{-3}$  (Рис. 1.3б) значения  $(\varphi, \varphi')$  уже формируют заметную «хаотическую» область вблизи разрушенной сепаратрисы. При ещё больших  $\varepsilon$  на Рис. 1.3в решение  $\varphi(x)$  мечется по «фазовому пространству», покрывая значительную его часть. В дальнейшем мы изучим, как этот хаос влияет на солитонные решения в теории поля.

### 1.3 Поиск многосолитонных решений

В данном разделе мы опишем численный метод нахождения статических солитонов и изучения их стабильности относительно малых возмущений в модели (1.3).

Поскольку все вакуумы теории эквивалентны, мы будем рассматривать только решения, стартующие с  $\varphi = 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ . Вблизи вакуума уравнение (1.3), (1.4) превращается в линейное уравнение Шрёдингера в периодическом потенциале  $U(x)$  [63]. Общее решение этого уравнения содержит экспоненциально растущую и убывающую части,

$$\varphi \approx Ae^{\lambda_v x} f_A(x) + Be^{-\lambda_v x} f_B(x), \quad (1.6)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные константы, а  $\lambda_v = 1 + O(\varepsilon) > 0$  — экспонента Ляпунова вакуумного решения. Функции  $f_{A,B}(x)$  являются периодическими, мы

их нормируем с помощью условия  $f_{A,B}(0) = 1$ . Мы приводим явные выражения для  $\lambda_v$  и  $f_{A,B}$  в Приложении А.1. Очевидно, что  $B = 0$  для всех решений, стартующих из вакуума при  $x \rightarrow -\infty$ :

$$\varphi(x) \rightarrow A e^{\lambda_v x} f_A(x) \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty. \quad (1.7)$$

Такие решения мы будем характеризовать значениями параметра<sup>4</sup>  $A$ , который будет выполнять роль «параметра стрельбы» при поиске солитонов.

Аналогично, при  $x \rightarrow +\infty$  профиль солитона приходит к некоторому вакууму  $\varphi_n$ , и его отклонение от этого вакуума  $\varphi - \varphi_n$  имеет вид (1.6) с коэффициентами  $A' \equiv 0$  и произвольным  $B'$ . Беря производную уравнения (1.6), получим граничное условие справа:

$$\varphi'(x) = \left( -\lambda_v + \frac{f'_B(x)}{f_B(x)} \right) (\varphi - \varphi_n) \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty. \quad (1.8)$$

В дальнейшем мы решаем уравнение (1.3), (1.4) с граничными условиями (1.7), (1.8).

Мы ищем солитоны численно с помощью метода стрельбы. Накладывая граничное условие (1.7) при  $x = 0$ , мы решаем уравнение (1.3), (1.4) для каждого<sup>5</sup>  $A$ . Далее мы подбираем значение  $A$ , чтобы удовлетворить граничному условию (1.8) при большом  $x = L$ . В результате мы получаем все солитоны, локализованные внутри интервала<sup>6</sup>  $0 < x < L$ .

В силу динамического хаоса наши решения экспоненциально чувствительны к начальным данным. Поэтому необходим эффективный и необычайно точный численный способ решения уравнения (1.3), (1.4). Наша реализация такого метода использует упрощённую форму потенциала  $U(x)$  в уравнении (1.5). А именно, в областях между  $\delta$ -функциями  $mD < x < (m+1)D$  потенциал  $U$  постоянен, поэтому уравнение (1.3), (1.4) может быть явно решено в терминах эллиптических функций, см. Приложение А.2. В точках  $x = mD$  уравнение поля даёт условия сшивки:

$$\varphi(mD + 0) = \varphi(mD - 0), \quad \varphi'(mD + 0) - \varphi'(mD - 0) = \varepsilon \sin \varphi(mD). \quad (1.9)$$

<sup>4</sup>На практике удобнее использовать  $\ln A$  при  $A > 0$ ; солитоны с отрицательным  $A$  получают заменой  $\varphi \rightarrow -\varphi$ .

<sup>5</sup>Мы изменяем параметр  $A$  достаточно маленькими шагами и проверяем, что ни одно из солитонных решений не потеряно, меняя размер шагов.

<sup>6</sup>Выражения (1.7) и (1.8) тем точнее, чем ближе  $\varphi(0)$  и  $\varphi(L)$  к вакуумным значениям. Для повышения точности, мы проводим вычисления на большом интервале  $-D < x < L + D$  и отбираем решения, остающиеся вблизи вакуума при  $x < 0$  и  $x > L$ .

Наш алгоритм действует последовательно. Стартуя со значений  $\varphi$  и  $\varphi'$  в точке  $x = mD + 0$ , он находит значения в точке  $x = (m + 1)D - 0$ , используя явное решение из Приложения А.2. Далее он осуществляет сшивку (1.9) и переходит к следующему периоду потенциала.

Здесь важно отметить, что мы выполняем все вычисления, используя числа произвольной точности с 40 – 200 знаков после запятой. Это позволяет избежать ошибок, связанных с машинным округлением, и правильно получить конфигурации сколь угодно сложных солитонов в режиме динамического хаоса. Чтобы изучить их статистические свойства, мы получаем тысячи солитонов всевозможной формы и длины.

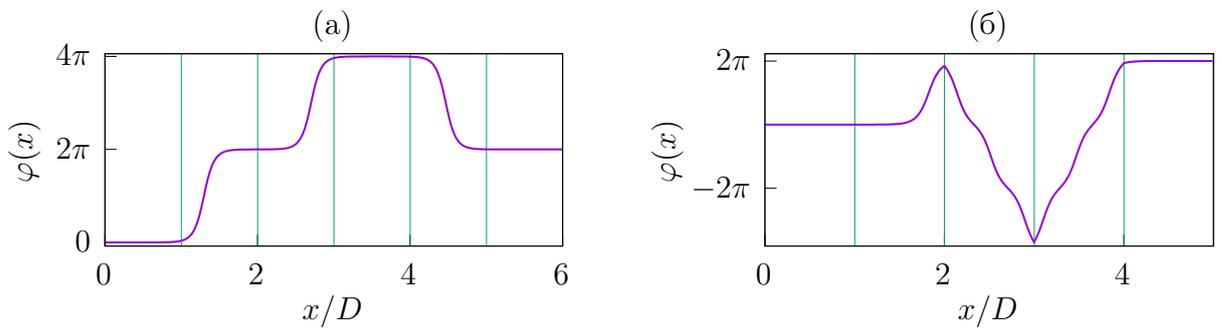


Рис. 1.4: Примеры статических солитонов (а) в КАМ-режиме при  $\varepsilon = 10^{-4}$ ; (б) в полностью хаотическом режиме при  $\varepsilon = 3$ . Вертикальные линии отмечают положения  $\delta$ -функций в уравнении (1.5).

Примеры найденных солитонных решений изображены на Рис. 1.4. Мы видим, что при  $\varepsilon = 10^{-4}$ , когда применима КАМ-теория, профили солитонов следуют вдоль разрушенной сепаратрисы на пути от одного вакуума до другого. Такие солитоны могут быть получены сшивкой профилей кинков и антикинков, как видно из Рис. 1.4а. В случае  $\varepsilon \gtrsim 0.1$ , когда механические траектории на Рис. 1.3в начинают покрывать большую часть фазового пространства, формы солитонов становятся более разнообразными, см. Рис. 1.4б.

В первую очередь нас интересуют *стабильные* статические солитоны. Они отвечают локальным минимумам энергии (1.2). Вариация последней при добавлении малого возмущения  $\theta(x)$  к решению  $\varphi(x)$  равна

$$H[\varphi + \theta] = H[\varphi] + \frac{1}{2} \int dx \theta(x) \hat{L}_\varphi(x) \theta(x), \quad (1.10)$$

где  $\hat{L}_\varphi(x) = -\partial_x^2 + \cos \varphi(x) U(x)$ . Таким образом, солитон  $\varphi(x)$  стабилен если оператор  $\hat{L}_\varphi$  положительно определён в пространстве возмущений  $\theta(x)$ , стре-

мящихся к 0 при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Мы численно определяем стабильность найденных солитонов, используя осцилляционную теорему. А именно, рассмотрим возмущение

$$\theta_0(x) = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial A} \quad (1.11)$$

над решением  $\varphi(x)$  уравнения (1.3), (1.4) с начальными данными (1.7). По построению,  $\theta_0(x)$  удовлетворяет уравнению  $\hat{L}_\varphi\theta_0 = 0$  и стремится к нулю при  $x \rightarrow -\infty$ . Тогда, согласно осцилляционной теореме, число нулей  $\theta_0(x)$  равно числу отрицательных собственных значений оператора  $\hat{L}_\varphi$ . В численном коде мы вычисляем возмущение  $\theta_0(x)$  для каждого солитона и определяем количество его корней. Солитон стабилен, если функция  $\theta_0(x)$  всюду положительна. В Приложении А.3 мы покажем, как это вычисление можно удобно совместить с поиском солитонов методом стрельбы. Отдельно отметим, что сравнивая явно найденные функции  $\theta_0(x)$  для каждого из найденных солитонов с результатами анализа её корней в процедуре стрельбы, можно дополнительно удостовериться, что ни одно из солитонных решений не было потеряно.

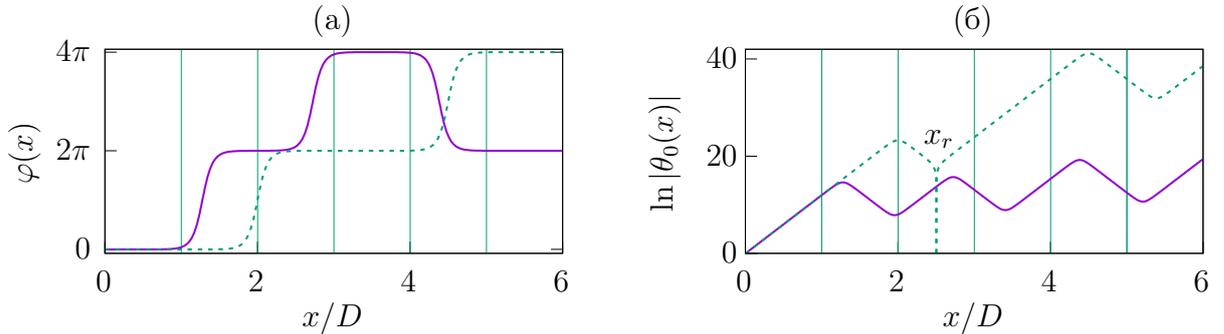


Рис. 1.5: (а) Стабильный солитон (сплошная линия) и нестабильный солитон (пунктирная линия) при  $\varepsilon = 4.5 \times 10^{-5}$ . (б) Возмущения  $\theta_0(x)$  этих солитонов в логарифмическом масштабе. Острый выступ вниз в графике возмущения над нестабильным солитоном при  $x_r \sim 2.5D$  является корнем  $\theta_0(x)$ .

На Рис. 1.5 показан пример стабильного солитона (сплошная линия), нестабильного солитона (пунктирная линия) и соответствующих им возмущений  $\theta_0(x)$ . Далее мы сосредоточимся на стабильных солитонах и докажем, что их число бесконечно.

## 1.4 Бесконечное множество солитонов

В невозмущённой модели синус–Гордона, то есть при  $\varepsilon = 0$  и  $U(x) = 1$ , существует только два статических солитона: кинк

$$\phi_K(x) = 4 \arctan e^x \quad (1.12)$$

и антикинк  $\phi_A(x) = -\phi_K(x)$ . Наиболее общее солитонное решение включает в себя их пространственный сдвиг и выбор левого вакуума:

$$\varphi = \pm \phi_K(x - x_K) + 2\pi n.$$

Невозможно соединить кинки и антикинки в статическую цепочку солитонов, поскольку они взаимодействуют с энергией

$$E_{int}(s_1, s_2, R) \approx 32s_1s_2e^{-R}, \quad (1.13)$$

где  $s_\alpha = +1$  для кинка и  $-1$  для антикинка, а  $R \gg 1$  — расстояние между солитонами [3]. Согласно (1.13), далеко отстоящие кинк и антикинк притягиваются, образуя осциллирующий бризер, в то время как два кинка или два антикинка отталкиваются и разъезжаются на бесконечность. В общем случае крайний левый и крайний правый (анти)кинки в солитонной цепочке не могут оставаться в покое, поскольку каждый из них в основном взаимодействует только с ближайшим соседом.

В главном порядке небольшой ( $\varepsilon \ll 1$ ) внешний потенциал не меняет профили кинков и антикинок, но влияет на действующие между ними слабые силы. Для начала рассмотрим один кинк, его масса равна  $M_k = \int dx [(\partial_x \varphi_k)^2/2 + 1 - \cos \varphi_k] = 8$ . Подставляя  $\varphi_k(x) = \phi_K(x - x_k)$  в уравнение (1.2), мы получаем периодический вклад внешнего потенциала

$$E_\delta(x_k) \equiv H[\varphi_k] - M_k = 2\varepsilon \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\cosh^2(mD - x_k)}, \quad (1.14)$$

который толкает кинк в положения равновесия  $x_k = D(m + 1/2)$ . При  $D \gg 1$  все члены в сумме (1.14) экспоненциально подавлены, кроме двух наибольших вкладов от ближайших к кинку  $\delta$ -функций. В частности, потенциальная энергия кинка с центром в  $0 < x_k < D$  приблизительно равна

$$E_\delta(x_k) \approx 2\varepsilon \left( \frac{1}{\cosh^2(x_k)} + \frac{1}{\cosh^2(D - x_k)} \right), \quad (1.15)$$

а равновесие достигается при  $x_k = D/2$ .

Теперь усложним конфигурацию, добавив ещё один кинк или антикинк на интервале  $lD < x'_k < (l+1)D$ . Полная энергия взаимодействия получившейся солитонной пары равна<sup>7</sup>  $E_2(x_k, x'_k) = E_\delta(x_k) + E_\delta(x'_k) \pm 32e^{-(x'_k - x_k)}$ . Ясно, что если  $l$  достаточно велико, то взаимодействие между (анти)кинками экспоненциально мало, и они остаются вблизи своих изначальных положений равновесия  $x_k = D/2$  и  $x'_k = (l+1/2)D$ . При малых  $l$  взаимодействие между солитонами становится большим и выталкивает их из потенциальных ям, дестабилизируя пару. Прямая минимизация  $E_2(x_k, x'_k)$  показывает, что пары кинк–кинк и кинк–антикинк существуют при

$$l > \frac{1}{D} \ln \frac{\varepsilon}{54} - 1 \quad \text{и} \quad l > \frac{1}{D} \ln \frac{\varepsilon}{2} + 1 \quad (1.16)$$

соответственно. Вспомним, что в изначальной модели синус–Гордона статических солитонных пар не существует, так что это свойство связано с неинтегрируемостью уравнений при  $\varepsilon > 0$ .

Докажем, что количество стабильных солитонов экспоненциально растёт с их длиной при малых  $\varepsilon$ . Для этого рассмотрим конфигурацию из  $N$  (анти)кинков

$$\varphi = \sum_{\alpha=1}^N s_\alpha \varphi_k(x - x_\alpha), \quad (1.17)$$

находящихся внутри интервалов  $j_\alpha D < x_\alpha < (j_\alpha + 1)D$ , где знак  $s_\alpha = \pm 1$  отличает кинк от антикинка. Предположим, что расстояние между соседними (анти)кинками достаточно велико, так что выполняется соотношение

$$j_{\alpha+1} - j_\alpha > p, \quad \text{где} \quad p = -\frac{1}{D} \ln \frac{\varepsilon}{32} + 1. \quad (1.18)$$

В этом случае энергия взаимодействия между соседними (анти)кинками  $|E_{int}| \leq 32e^{-(p-1)D}$  как минимум вдвое меньше высоты потенциальных ям, образованных  $\delta$ -функциями. Это означает, что суммарная энергия солитонной цепи имеет локальный минимум по отношению к положению каждого из (анти)кинков, то есть существует стабильное равновесное состояние. Таким образом, солитоны можно произвольно добавлять к имеющейся цепочке на расстояниях, превышающих  $pD$ .

---

<sup>7</sup>Мы рассматриваем случай  $l > 1$ , когда энергия взаимодействия солитона с ближайшими  $\delta$ -функциями почти не меняется из-за появления другого солитона.

Теперь оценим число  $N_p(l)$  описанных выше «разреженных» солитонных цепочек длины  $lD$  или меньше, где  $l$  – целое. На большем интервале  $(l+p)D$  можно добавить к имеющейся цепочке кинк, антикинк, или не добавлять ничего. Таким образом  $N_p(l+p) \geq 3N_p(l)$ . Беря в качестве начального условия  $N(1) = 3$ , мы находим<sup>8</sup>  $N_p(l) \geq 3^{(l+p-1)/p}$ . Таким образом, количество солитонов растёт по крайней мере экспоненциально с их длиной  $lD$ .

С другой стороны, общее количество всех стабильных солитонов ограничено сверху числом  $3^l$  всех мыслимых положений равновесия, где каждый из (анти)кинков занимает отдельный период внутри интервала  $lD$ . Таким образом, число стабильных солитонов растёт экспоненциально

$$N_{sol} \propto e^{h_S(\varepsilon)l} \quad \text{при} \quad l \rightarrow +\infty, \quad (1.19)$$

а показатель экспоненты  $h_S$  ограничен неравенством

$$\frac{\ln 3}{p} \leq h_S \leq \ln 3, \quad (1.20)$$

где  $p$  было введено в уравнении (1.18).

Чтобы проверить соотношение (1.19), мы численно находим количество стабильных солитонов  $N_{sol}(l)$  внутри интервала длины  $lD$ , см. Рис. 1.6а. Их число действительно растёт экспоненциально, хотя скорость роста  $h_S(\varepsilon)$ , изображённая точками с погрешностями на Рис. 1.6б, сильно выше найденной нами нижней границы (1.20). Отметим, что ступенчатые особенности роста  $h_S(\varepsilon)$  (две из них показаны стрелками на Рис. 1.6б) связаны с появлением новых типов солитонов при больших  $\varepsilon$ . В частности, левая стрелка соответствует пороговому значению  $\varepsilon = 2e^{-D}$ , при котором появляется пара кинк–антикинк с  $l = 2$ .

Следующий шаг — рассмотреть ещё большие  $\varepsilon$ , соответствующие преимущественно хаотической динамике аналогичной механической системы, см. Рис. 1.3б. В этом случае использованный выше подход неприменим, т.к. взаимодействие солитона с внешним потенциалом меняется из-за присутствия

---

<sup>8</sup>Число разреженных солитонных цепочек длиной  $(l+p)D$  на самом деле больше, чем  $3N_p(l)$ . Действительно, можно начать с цепочки длиной меньше, чем  $lD$ , и добавлять (анти)кинк внутрь различных  $D$ -интервалов. Если учесть этот эффект, мы получим более аккуратное рекуррентное соотношение:  $N_p(l) - N_p(l-1) = 2N_p(l-p)$  с экспоненциально растущим решением  $N_p(l)$ . Такой подход, однако, тоже рассматривает «разреженные» солитонные цепочки и недооценивает скорость экспоненциального роста количества солитонов.

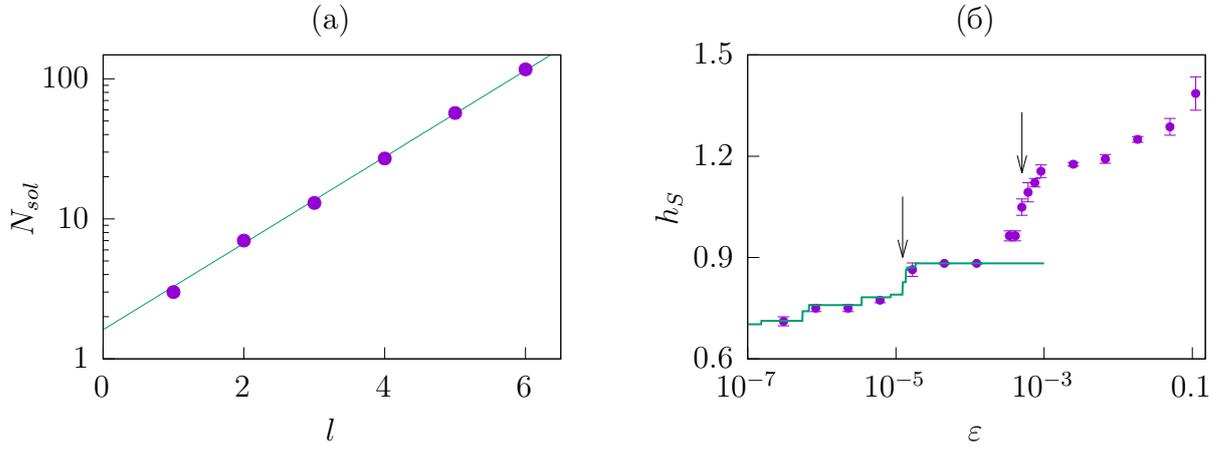


Рис. 1.6: (а) Количество стабильных солитонов  $N_{sol}(l)$  в интервале конечного размера  $lD$  в зависимости от длины интервала; параметр хаотичности равен  $\varepsilon = 3 \times 10^{-7}$ . Численные данные (точки) фитируются уравнением (1.19) (прямая). (б) Экспоненциальная скорость роста количества стабильных солитонов  $h_S(\varepsilon)$  как функция параметра хаотичности  $\varepsilon$ . Точки с погрешностями получены подсчётом количества численно найденных солитонов. Сплошная линия найдена минимизацией энергии (1.21).

другого солитона в соседнем периоде. Поэтому мы используем общее выражение для энергии солитонной цепочки (1.17)

$$E_N(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\alpha=1}^{N-1} E_{int}(s_\alpha, s_{\alpha+1}, x_{\alpha+1} - x_\alpha) + \varepsilon \sum_m (\cos(\varphi(mD)) - 1). \quad (1.21)$$

Численно минимизируя (1.21) с помощью метода сопряжённых градиентов, мы определяем, существует ли стабильная солитонная цепочка для заданного набора  $\{s_\alpha, j_\alpha\}$ , где  $j_\alpha D < x_\alpha < (j_{\alpha+1} D)$ . Скорость экспоненциального роста, полученная с помощью численной минимизации полной энергии, показана сплошной линией на Рис. 1.6б. Она совпадает с результатами точных вычислений при малых  $\varepsilon$ , но начинает от них отличаться при  $\varepsilon \sim 10^{-3}$  (см. правая стрелка на Рис. 1.6). Дело в том, что при указанном значении  $\varepsilon$  появляются солитоны нового типа, в которых два (анти)кинка содержатся внутри одного периода  $U(x)$ . Пример такого солитона показан на Рис. 1.4б. Подобные решения не учитываются анзацем (1.21), поэтому минимизация функционала приводит к недооценке количества решений. Следует отметить, что появление таких новых солитонов приблизительно совпадает с переходом к хаосу в соответствующей механической системе, ср. Рис. 1.3б,в.

## 1.5 Топологическая энтропия

Важной величиной, характеризующей сложность динамической системы, является её топологическая энтропия [64]. В данном разделе мы определим топологическую энтропию статических уравнений поля<sup>9</sup>, а затем ограничим с её помощью скорость роста количества солитонов  $h_S(\varepsilon)$ .

Рассмотрим все решения, стартующие с  $\varphi \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ . Разобьем множество значений поля на участки

$$-\pi + 2\pi n \leq \varphi \leq \pi + 2\pi n.$$

Будем характеризовать каждое полевоое решение  $\varphi(x)$  на отрезке длины  $lD$  последовательностью участков  $(n_1, \dots, n_l)$ , внутри которых оно находится по окончании каждого периода  $U(x)$ , т.е. при  $x = mD + 0$ . Можно показать [64], что для хаотических систем число различных последовательностей  $N_{seq}(l)$  растёт экспоненциально с длиной интервала  $lD$ . Поэтому назовём величину

$$h_T = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{seq}(l)}{l} \quad (1.22)$$

топологической энтропией аналогичной механической системы.

Значение  $h_T$  служит индикатором хаоса: данное выше определение даёт  $h_T = 0$  при  $\varepsilon = 0$ . Действительно, в этом случае статические решения, стремящиеся к вакууму при  $x \rightarrow -\infty$  включают в себя только сам вакуум и одиночные (анти)кинки на различных позициях, что приводит к  $2l + 1$  последовательностям длины  $l$ .

Однако при малых, но ненулевых  $\varepsilon$ , величина  $h_T$  положительна и ограничена снизу экспоненциальной скоростью роста  $h_S$  числа стабильных солитонов:

$$h_S(\varepsilon) \leq h_T(\varepsilon). \quad (1.23)$$

В самом деле, каждому стабильному солитону, локализованному на интервале  $lD$ , соответствует уникальная последовательность посещённых им вакуумов  $(n_1, \dots, n_l)$  в конце каждого периода функции  $U(x)$ . Например, солитон на Рис. 1.4а порождает последовательность  $(0, 1, 2, 2, 1)$ . Таким образом,  $N_{sol}(l) \leq N_{seq}(l)$ , откуда в силу определений (1.19) и (1.22) следует (1.23).

<sup>9</sup>Изначально топологическая энтропия была введена для систем с компактным фазовым пространством. Мы обобщаем это определение, рассматривая только определённый набор траекторий и конкретное разбиение фазового пространства.

## 1.6 Фрактальная структура

Хорошо известно, что разные классы механических траекторий разделены фрактальными множествами в фазовом пространстве хаотических систем [65–68]. В данном разделе мы покажем, что солитоны<sup>10</sup> тоже образуют фрактал в пространстве статических полевых конфигураций  $\varphi(x)$ . Для этого сфокусируемся на множестве значений  $(\varphi(0), \varphi'(+0))$ , которые принимают поля солитонов в точке  $x = +0$ . Более того, рассмотрим малую окрестность вакуума:  $|\varphi(0)|, |\varphi'(+0)| \ll 1$ . В этом случае при  $x \approx +0$  применимо представление (1.6), где первый и второй члены экспоненциально спадают при отрицательных и положительных  $x$ , соответственно. Тогда соответствующее нелинейное решение может быть тоже представлено в виде суммы  $\varphi(x) \approx \varphi_L(x) + \varphi_R(x)$  «левой» и «правой» частей, зануляющихся при  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow -\infty$ . В дальнейшем мы будем изучать только «правые» солитоны, учитывая, что «левые» получаются из них отражением  $x \rightarrow -x$ . Если  $\{\varphi_\alpha(x)\}$  — множество значений поля стабильных «правых» солитонов, то тогда всё множество значений солитонных  $(\varphi(0), \varphi'(+0))$  состоит из точек

$$\varphi_{\alpha\beta}(0) = \varphi_\alpha(0) + \varphi_\beta(0), \quad \varphi'_{\alpha\beta}(+0) = \varphi'_\alpha(+0) - \varphi'_\beta(-0). \quad (1.24)$$

Данное множество имеет вид фрактала и изображено при  $\varepsilon = 3 \times 10^7$  на Рис. 1.7а. Подробности численного нахождения множества «правых» солитонов  $(\varphi_\alpha(0), \varphi'_\alpha(+0))$  приведены в Приложении А.4.

Фрактал на Рис. 1.7 обладает приближённым самоподобием. Действительно, если взять крошечный регион вблизи одного из солитонов  $S$  и во много раз его увеличить, то получим (почти) такой же фрактал, см. Рис. 1.7б. Данное самоподобие имеет объяснение. Пусть «правый» солитон  $\varphi_S$  (или его «правая» компонента в более общем подходе) имеет параметр пристрелки  $A = A_S$  в уравнении (1.7) и длину  $lD$ . Решение с параметром  $A$ , близким к  $A_S$ , имеет вид

$$\varphi_A(x) = \varphi_S(x) + (A - A_S) \theta_0^{(S)}(x),$$

<sup>10</sup>Отметим, что солитон, прибывающий в вакуум  $\varphi_n = 2\pi n$  при  $x \rightarrow +\infty$ , находится на границе между решениями с  $\varphi < \varphi_n$  и  $\varphi > \varphi_n$  при больших  $x$ .

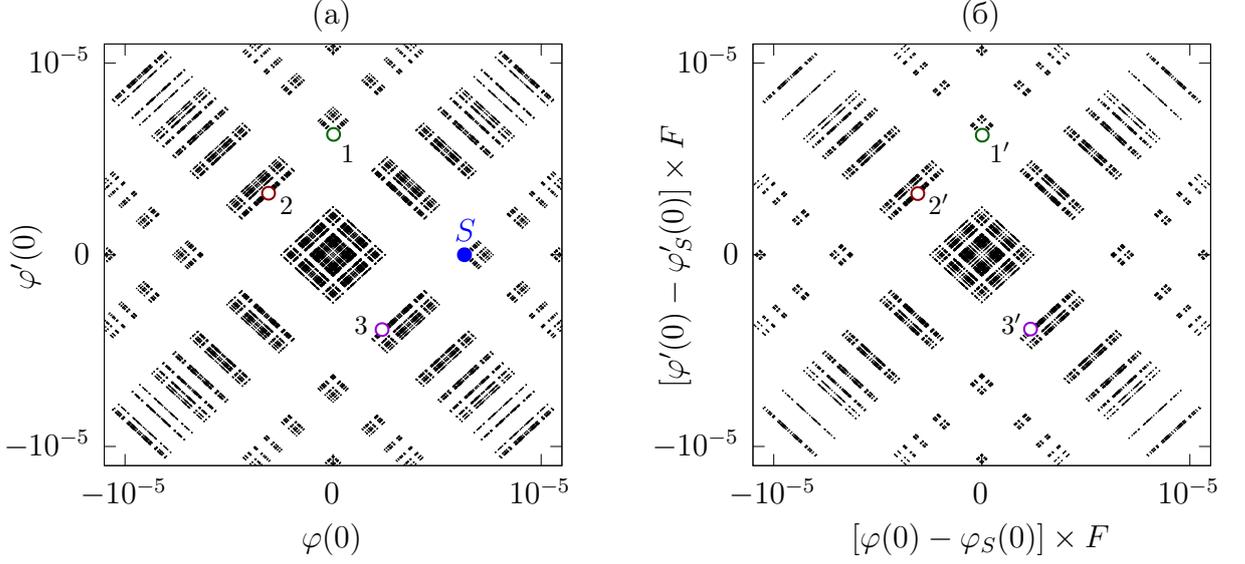


Рис. 1.7: (а) Значения полей  $\varphi(0)$ ,  $\varphi'(0)$  стабильных солитонов при  $x = +0$  в модели с  $\varepsilon = 3 \times 10^{-7}$ . Показана только область  $|\varphi|, |\varphi'| < 10^{-5}$ . (б) Значения полей в окрестности точки  $S$  на Рис. 1.7а, увеличенные в  $F = e^{\lambda_S(8D)}$  раз, где  $\lambda_S(8D) \approx 36.7$  связана с показателем Ляпунова солитона  $S$ .

где  $\theta_0^{(S)}$  — возмущение (1.11) над солитоном  $\varphi_S(x)$ . Возьмём<sup>11</sup>

$$A - A_S = \left[ \theta_0^{(S)}(l'D) \right]^{-1}$$

для некоторого  $l' > l$ . В этом случае решение  $\varphi_A(x)$  остаётся вблизи  $\varphi_S(x)$  при  $0 < x < l'D$ , приходит к тому же самому вакууму  $\varphi_n$ , однако затем покидает его при  $x > l'D$ . На этой стадии решение имеет вид

$$\varphi_A(x) \approx (A - A_S) \theta_0^{(S)}(l'D) f_A(x) e^{x-l'D} + \varphi_n \quad \text{при } x \gtrsim l'D,$$

где мы использовали асимптотику  $\theta_0^{(S)}(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Таким образом, при  $x = l'D$  оказывается выполнено *левое* граничное условие (1.7). Теперь роль нового параметра стрельбы  $A$ , порождающего продолжение солитонной цепочки направо, играет величина  $(A - A_S) \theta_0^{(S)}(l'D)$ . Отметим, что функция  $\lambda_S(x) \equiv \ln \left| \theta_0^{(S)}(x) \right|$  описывает экспоненциальный рост возмущения  $\theta_0$  и поэтому связана с показателем Ляпунова для решения  $\varphi_S(x)$ .

Описанный выше механизм проиллюстрирован на Рис. 1.7б и Рис. 1.8. Действительно, выберем соответствующие солитонам точки 1—3 на Рис. 1.7а и аналогичные точки 1'—3' на Рис. 1.7б и изобразим их профили на Рис. 1.8.

<sup>11</sup>Мы берём достаточно большое  $l'$ , чтобы  $|\theta_0(x)|$  росла экспоненциально над вакуумом в правой части интервала интервале  $0 \leq x \leq l'D$  и достигала максимума на нём при  $x = l'D$ .

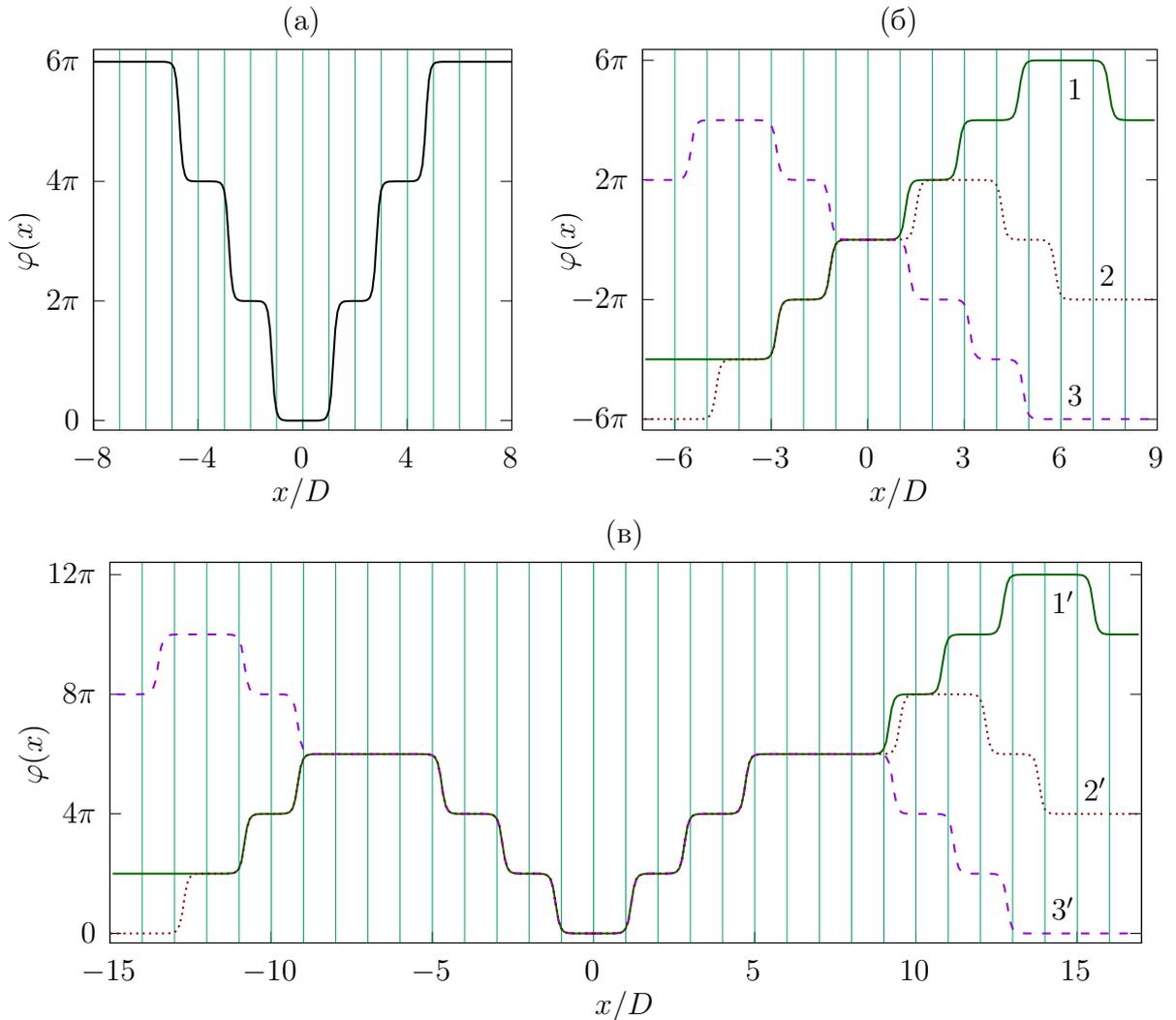


Рис. 1.8: (а) Солитон, соответствующий точке S на Рис. 1.7а. (б) Солитоны 1—3, соответствующие кружочкам на Рис. 1.7а. (в) Родственные им солитоны 1'—3', с начальными данными на Рис. 1.7б.

Видно, что для положительных (или отрицательных)  $x$  солитоны 1'—3' вначале идут вдоль решения  $S$ , но затем при  $x \approx \pm 8D$  отходят от него и следуют профилю 1, 2 или 3. Маленькие вариации начальных данных  $\varphi(0)$  и  $\varphi'(0)$  приводят к изменениям новых «начальных данных» при  $x = 8D$ ; причём эти изменения увеличены в  $e^{\lambda_S(8D)}$  раз относительно изначальных возмущений. Это свойство тоже является прямым следствием хаотичности динамической системы, т.е. неустойчивости механических траекторий относительно малых возмущений.

Вычислим теперь размерность [69, 70] фрактала, образованного значениями поля солитонов. Для начала рассмотрим всё множество «правых» солитонов, стабильных и неустойчивых. В области хаотического движения это

множество всюду плотно, так что его фрактальная размерность равна 1. Действительно, рассмотрим два сколь угодно близких решения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , задаваемых параметрами стрельбы  $A_1$  и  $A_2$ . В силу динамического хаоса они экспоненциально расходятся:  $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| > 2\pi$  при достаточно больших  $x$ . Тогда, по непрерывности, существует траектория, которая прибывает в точности в вакуум между  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$ . Такая траектория является солитоном, что доказывает утверждение.

Параметры  $A$  стабильных «правых» солитонов, однако, образуют множество наподобие Канторова множества, с фрактальной размерностью меньше 1. Действительно, рассмотрим солитон  $\varphi_S(x)$  с  $A = A_S$  и возмущение (1.11) над ним. Возмущение мы опять будем обозначать как  $\theta_0^{(S)}(x)$ . Мы уже показали, что произвольно малая окрестность  $|A - A_S| \ll 1$  содержит всё множество «правых» солитонов и, в частности, нестабильные солитоны. При этом решения, достаточно близкие к нестабильным солитонам, тоже нестабильны: если они остаются вблизи такого солитона около точки  $\theta_0^{(S)} = 0$ , то их собственные возмущения  $\theta_0(x)$  тоже имеют корни рядом с этой точкой. Таким образом, значения полей стабильных солитонов не образуют всюду плотное множество, поскольку их окрестности  $|A - A_S| \ll 1$  содержат бесконечно много пустот, соответствующих нестабильным решениям.

Для вычисления фрактальной размерности удобно перейти к параметру

$$a = \frac{\ln A}{\lambda_v D}, \quad (1.25)$$

где  $\lambda_v$  — показатель Ляпунова для вакуума, вместо  $A > 0$ . Поскольку  $A(a)$  является гладкой функцией, такой переход не меняет фрактальную размерность. Преобразование  $A \rightarrow Ae^{\lambda_v D}$  тривиально сдвигает решение по  $x$  на один период внешнего потенциала и меняет  $a \rightarrow a + 1$ . Таким образом, фрактал периодичен по  $a$ , и в дальнейшем мы будем рассматривать только интервал  $a \in [0, 1)$ . Разбивая последний на маленькие сегменты размера  $\delta$ , мы считаем количество  $N_{box}(\delta)$  тех, внутри которых содержатся параметры  $\{a_S\}$  стабильных солитонов. Детали этой процедуры приведены в Приложении А.4. Фрактальная размерность  $d_R$  в этом случае определяется из асимптотики

$$\ln N_{box}(\delta) \rightarrow -d_R \ln \delta \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0. \quad (1.26)$$

Пример функции  $N_{box}(\delta)$  показан на Рис. 1.9а.

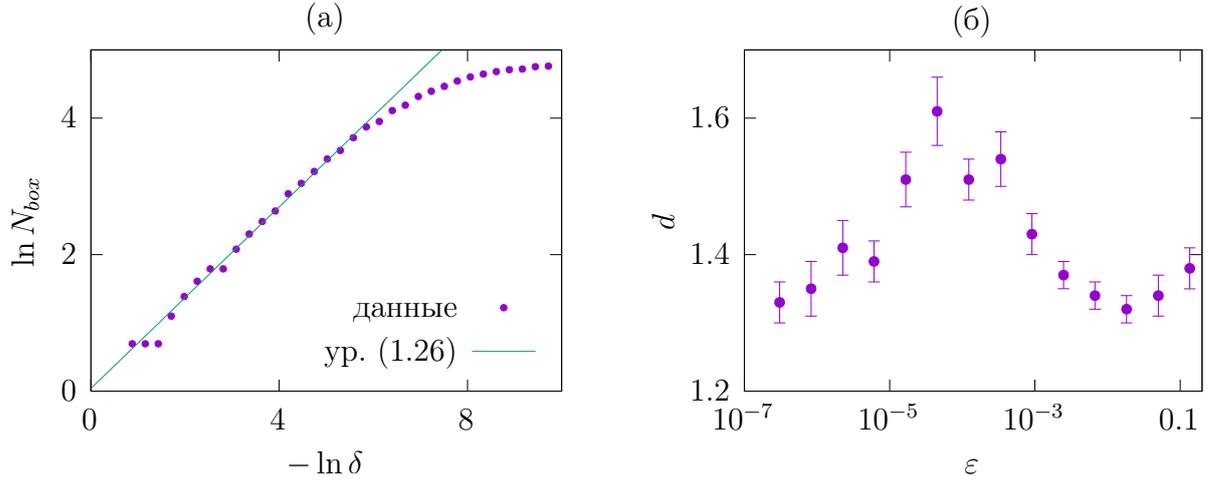


Рис. 1.9: (а) Количество сегментов со стабильными солитонами в зависимости от размера сегмента при  $\epsilon = 3 \times 10^{-7}$ . Уравнение (1.26) (прямая линия) определяет фрактальную размерность  $d_R = 0.665 \pm 0.020$ . (б) Размерность фрактала на Рис. 1.7 при различных  $\epsilon$ .

Отметим, что найденная фрактальная размерность может быть аналитически ограничена снизу. Рассмотрим множество «правых» солитонов длины  $lD$  или меньше. Возмущения  $\theta_0(x)$  на их фоне растут вдоль  $x$  медленнее, чем возмущения над вакуумом,  $|\theta_0(x)| \leq e^{\lambda_v x} |f_A(x)|$ , поскольку  $\cos \varphi(x)$  в уравнении  $\hat{L}_\varphi \theta_0 = 0$  максимален при  $\varphi = 2\pi n$ . Вследствие этого, параметры  $A$  двух различных солитонов не могут быть ближе, чем

$$\delta A_l = [\max \theta_0(x)]^{-1} \geq e^{-\lambda_v lD}, \quad (1.27)$$

где максимум берётся по интервалу  $0 \leq x \leq lD$ . Если условие (1.27) не выполнено, то солитоны будут совпадать на всём интервале. Отсюда получаем характерное расстояние между параметрами  $a$  солитонов

$$\delta a_l \gtrsim e^{-\lambda_v lD} \quad (1.28)$$

для  $A \lesssim O(1)$ . Разбивая интервал по  $a$  на отрезки размера (1.28), в каждом из которых может быть не более одного стабильного солитона, получим ограничение для фрактальной размерности

$$d_R \geq \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{sol}(l)}{-\ln \delta a_l} \geq \frac{h_S}{\lambda_v D}, \quad (1.29)$$

где в последнем неравенстве мы использовали уравнение (1.19). Отметим, что это неравенство является достаточно слабым: при  $\epsilon = 3 \times 10^{-7}$  оно даёт

$d_R \gtrsim 0.06$ , что на порядок меньше, чем настоящая фрактальная размерность. Тем не менее, неравенство (1.29) доказывает, что наш фрактал имеет ненулевую, и следовательно,<sup>12</sup> дробную размерность.

Поскольку полный фрактал на Рис. 1.7 является прямой суммой «левого» и «правого» фракталов, то его размерность равна  $d(\varepsilon) = 2d_R(\varepsilon)$ ; она изображена на Рис. 1.9б. Отметим, что она меняется немонотонно с  $\varepsilon$  из-за двух конкурирующих друг с другом эффектов. Во-первых, при больших  $\varepsilon$  появляются новые солитоны, добавляя точек к фракталу и тем самым увеличивая  $d$ . С другой стороны, показатели Ляпунова уже существующих солитонов растут с  $\varepsilon$ , делая их значения поля ближе друг к другу на плоскости  $(\varphi, \varphi')$ . Это приводит к понижению  $d$  при больших  $\varepsilon$ .

## 1.7 Метрическая энтропия

Важной характеристикой, показывающей, является ли динамическая система хаотической или нет, является метрическая энтропия Колмогорова-Синая. Она характеризует запутанность траекторий в фазовом пространстве, или, говоря другими словами, скорость роста информации в процессе эволюции [71]. В этом разделе мы установим связь между метрической энтропией статических уравнений поля и распределением статических солитонов во фрактале на Рис. 1.7. Отметим, что метрическая энтропия была изначально введена для систем с компактным фазовым пространством. Поскольку наша аналогичная механическая система этим свойством не обладает [72], мы сначала изменим это определение следующим образом.

Опять ограничимся «правыми» статическими решениями, стартующими с  $\varphi \approx 0$  при  $x = 0$ . Для начала будем их рассматривать на отрезке длины  $L = lD$ . Также рассмотрим конечный интервал  $|A| \leq A_0$  значений параметра стрельбы. Разобьём фазовое пространство на полосы:

$$2\pi\nu \leq \varphi + \left( \lambda_\nu - \frac{f'_B(+0)}{f_B(0)} \right)^{-1} \varphi' < 2\pi(\nu + 1), \quad (1.30)$$

ср. с уравнением (1.8). Для каждого решения  $\varphi(x)$  длины  $lD$  построим последовательность  $\omega = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l)$  областей, посещённых решением в начале

---

<sup>12</sup>Напомним, что фрактал значений поля «правых» солитонов имеет размерность, меньшую 1, поскольку в окрестности каждого стабильного солитона находятся плотные пустоты из нестабильных решений.

каждого периода  $x = mD + 0$ . Это разбивает интервал  $-A_0 \leq A \leq A_0$  параметров решений на участки  $T_\omega$ , отвечающие определённым последовательностям  $\omega$ . Отметим, что солитоны лежат на границах участков в силу уравнения (1.8). Определим метрическую энтропию  $K$  как

$$K_l = - \sum_{\omega} \frac{\Delta A(T_\omega)}{2A_0} \ln \left( \frac{\Delta A(T_\omega)}{2A_0} \right), \quad \text{и} \quad K = \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{K_l}{l}, \quad (1.31)$$

где  $\Delta A(T_\omega)$  — полная длина участка  $T_\omega$ . Единственное отличие от оригинальной конструкции Колмогорова и Синая здесь состоит в том, что мы рассмотрели выбранный набор траекторий и конкретное разбиение (1.30).

Отметим, что при  $\varepsilon = 0$  существует только два нетривиальных «правых» решения — кинк и антикинк — которые при каждом  $x$  принадлежат к областям  $\nu = 0$  и  $-1$ , соответственно. Мы получаем только 2 различных последовательности. Поэтому  $K = 0$ , как и должно быть для интегрируемой системы.

Введём величину, аналогичную метрической энтропии, рассматривая стабильные «правые» солитоны длины  $L < lD$ . Действительно, параметры пристрелки солитонов тоже разбивают отрезок  $-A_0 \leq A \leq A_0$  на множество интервалов  $R_\alpha$ . Поэтому определим

$$E_l = - \sum_{\alpha} \frac{\Delta A(R_\alpha)}{2A_0} \ln \left( \frac{\Delta A(R_\alpha)}{2A_0} \right) \quad \text{и} \quad E = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{E_l}{l}, \quad (1.32)$$

ср. с уравнением (1.31). Видно, что  $E$  характеризует (не)однородность распределения параметров пристрелки солитонов (а, следовательно, и точек во фрактале на Рис. 1.7). Если у всех солитонов один и тот же параметр  $A$ , то  $E = 0$ . Если же они распределены равномерно, то  $E_l = \ln N_{sol}(l)$  и  $E = h_S$ , см. уравнение (1.19).

Поскольку границы участков  $R_\alpha$  — солитоны — лежат на границах участков  $T_\omega$ , то разбиение  $\{R_\alpha\}$  является укрупнением  $\{T_\omega\}$ , полученным путём слияния некоторых участков в один. Однако если два участка длиной  $\Delta A_1$  и  $\Delta A_2$  объединены в один, то

$$-(\Delta A_1 + \Delta A_2) \ln \left( \frac{\Delta A_1 + \Delta A_2}{2A_0} \right) \leq -\Delta A_1 \ln \left( \frac{\Delta A_1}{2A_0} \right) - \Delta A_2 \ln \left( \frac{\Delta A_2}{2A_0} \right).$$

Это доказывает, что

$$E_l \leq K_l, \quad \text{так что} \quad E \leq K. \quad (1.33)$$

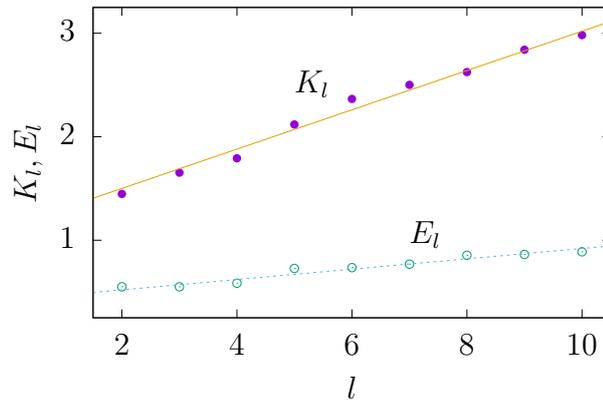


Рис. 1.10: Значения  $E_l$  и  $K_l$  вычисленные при  $\varepsilon = 3 \times 10^{-7}$  и  $A_0 \approx 2.5 \times 10^{-6}$ . Фитирование линейными функциями даёт  $K = 0.19 \pm 0.01$  и  $E = 0.050 \pm 0.004$ .

На Рис. 1.10 мы в качестве примера демонстрируем значения  $E_l$ ,  $K_l$  (точки) и их фиты линейными функциями (линии) при  $\varepsilon = 3 \times 10^{-7}$ . Уравнение (1.33) показывает, как можно использовать стабильные солитоны для того, чтобы ограничить снизу метрическую энтропию — индикатор и меру хаоса аналогичной механической системы.

## 1.8 Заключение: обобщение результатов

Данная глава посвящена изучению солитонов в одномерных теориях поля с неинтегрируемыми статическими уравнениями. В частности, мы рассмотрели модель синус-Гордона во внешнем потенциале вида «гребёнка Дирака». Такой выбор позволил нам применить мощный численный метод получения многосолитонных решений. В силу динамического хаоса множество таких решений бесконечно. Более того, мы обнаружили, что значения поля стабильных солитонов образуют фрактал в конфигурационном пространстве. Мы вычислили дробную размерность этого фрактала и изучили его с помощью метрической и топологической энтропий.

Следует отметить, что наша модель не является какой-то особенной. Похожие «хаотические солитоны» должны существовать во многих одномерных теориях с неинтегрируемыми статическими уравнениями [73, 74]. Простейшие обобщения включают в себя однополевые модели с другими периодическими по пространству потенциалами  $V(\varphi, x)$ . Если в моделях присутствует несколько пространственно однородных вырожденных вакуумов, то в таких моделях будут существовать и топологические солитоны, интерполирующие между

вакуумами. Метод подсчёта солитонов, представленный в Разделе 1.4, применим, если периодическое возмущение потенциала достаточно слабое, а его период  $D$  превышает ширину элементарных «кинкоподобных» солитонов. В этом случае количество солитонов должно расти экспоненциально с их длиной, и значения поля солитонов должны образовывать самоподобные фракталы в конфигурационных пространствах, как и в рассмотренной нами модели.

Более широкий класс однополевых моделей имеет потенциалы  $V(\varphi, x)$  с непериодическими зависимостями от пространственной координаты. Например, можно рассмотреть ту же самую модель синус–Гордона, что и в этой главе, но с непериодически расположенными  $\delta$ -функциями в уравнении (1.5) — в точках  $x = x_m \neq mD$ . Если параметр  $\varepsilon$  относительно мал, а расстояние  $x_{m+1} - x_m$  между соседними  $\delta$ -функциями превышает ширину кинка, то солитонные цепочки в этой модели могут быть построены таким же образом, как и в разделе 1.4. Это должно гарантировать существование бесконечного количества стабильных солитонов. Более того, число таких солитонов должно расти экспоненциально с количеством  $\delta$ -функций  $l$ , попадающих внутрь их профиля, см. выражение (1.19), а значения их поля должны образовывать сложные иерархические структуры. Однако самоподобие, видимое на Рис. 1.7, должно быть нарушено. Действительно, рассуждения раздела 1.6 связывают увеличение окрестности солитона на плоскости  $\varphi(0), \varphi'(0)$  с пространственными сдвигами частей солитонов. Если дискретная симметрия сдвигов нарушена, то самоподобие должно исчезнуть. Тем не менее, фрактальная размерность множества  $\{\varphi(0), \varphi'(0)\}$  может по-прежнему быть нецелой.

Интересный особый случай получается, если поместить  $\delta$ -функции в уравнении (1.5) в *случайные* точки  $x = x_m$ . Такой потенциал может быть трактован как короткодействующее взаимодействие с примесью, добавленной к образцу. В этом случае каждая реализация  $\{x_m\}$  соответствует непериодической гребёнке  $\delta$ -функций, но усреднение по ансамблю реализаций может существенно поменять свойства солитонов.

Отметим, что результаты данной Главы могут быть расширены по крайней мере на некоторый класс многополевых моделей. Действительно, рассмотрим два поля  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  с энергией

$$H = \Gamma H_1[\varphi_1] + H_2[\varphi_1, \varphi_2], \quad (1.34)$$

где  $\Gamma$  — постоянная. Уравнения на статические солитоны имеют вид

$$\frac{\delta H_1[\varphi_1]}{\delta \varphi_1} + \frac{1}{\Gamma} \frac{\delta H_2[\varphi_1, \varphi_2]}{\delta \varphi_1} = 0, \quad \frac{\delta H_2[\varphi_1, \varphi_2]}{\delta \varphi_2} = 0. \quad (1.35)$$

В предельном случае  $\Gamma \gg 1$  поле  $\varphi_1$  удовлетворяет независимому уравнению, в то время как  $\varphi_2(x)$  эволюционирует во внешнем потенциале  $\varphi_1(x)$ . Если решение для  $\varphi_1$  оказывается периодичным, то свойства солитонов поля  $\varphi_2$  могут быть близки к тем, что наблюдаются в нашей однополевой модели.

Вообще говоря, в любой неинтегрируемой модели можно ожидать существования бесконечного числа солитонов. Однако распределение стабильных солитонов может зависеть от модели. Действительно, такие солитоны являются локальными минимумами статической энергии  $H[\varphi]$ , которая совпадает с классическим действием аналогичной механической системы. На настоящий момент не существует никакой общей классификации механических траекторий, локально минимизирующих действие, хотя появляются некоторые работы [75] в этом направлении.

## Глава 2

# Эффективная теория поля для осциллонов большого размера

### 2.1 Введение: что такое осциллоны?

Рассмотрим действительное скалярное поле с нелинейным потенциалом  $V(\varphi)$  в  $(d + 1)$ -мерном пространстве–времени. Оно удовлетворяет уравнению

$$(\partial_t^2 - \Delta)\varphi = -V'(\varphi), \quad (2.1)$$

где  $\Delta$  обозначает  $d$ -мерный лапласиан, а штрих означает производную по  $\varphi$ .

Для большого класса притягивающих потенциалов  $V(\varphi)$  временная эволюция поля  $\varphi$  ведёт к появлению локализованных конфигураций, осциллирующих почти периодически. При этом периодичность не является точной: локализованные конфигурации излучают и за счёт этого чрезвычайно медленно распадаются. Подобные долгоживущие конфигурации и называются *осциллонами*. В моделях общего вида они живут порядка  $10^5$  периодов, однако в некоторых случаях, о которых пойдёт речь в Главе 4, и того дольше — до  $10^{14}$  периодов! Такие большие времена жизни удивительны и требуют теоретического объяснения: в большинстве моделей [16, 23, 76–85], где встречаются осциллоны, нет настолько малых параметров.

Осциллоны встречаются в неинтегрируемых моделях и не могут быть найдены точно. Поэтому логично строить их приближённое теоретическое описание с помощью асимптотического разложения по некоторому малому параметру. Было бы разумно в качестве такого параметра выбрать обратное время жизни осциллона. Однако оно никак не встроено в лагранжиан теории и не может быть использовано в явном виде. Поэтому обычно при описании осциллонов приходится рассматривать другие, более удобные, пусть и не столь малые, параметры разложения.

Настоящая Глава посвящена изучению осциллонов большого размера. В этом случае в качестве малого параметра выступит обратный радиус этого объекта  $R^{-1} \ll m$ , где  $m$  — масса поля, а нелинейные члены потенциала будут

учитываться точно в каждом порядке разложения.

## 2.2 Численная иллюстрация

Для начала продемонстрируем численно, что осциллоны действительно появляются, если выбрать подходящий нелинейный потенциал  $V(\varphi)$ . Для этого рассмотрим случай  $d = 3$  пространственных измерений и потенциал, возникающий в теории инфляции с  $\alpha$ -аттрактором [16, 86]

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} \tanh^2 \varphi. \quad (2.2)$$

Мы работаем в безразмерных единицах,<sup>13</sup> где масса поля равна  $m = 1$ . Важно отметить, что потенциал (2.2) — притягивающий, т.е. растёт медленнее, чем  $\varphi^2$ . Это свойство обычно отвечает за формирование долгоживущих сгустков поля, т.е. осциллонов.

Численно решим уравнение для сферически симметричного поля  $\varphi(t, r)$ , где  $r \equiv |\mathbf{x}|$  — радиальная координата. В качестве начальных данных при  $t = 0$  выберем гауссов профиль  $\varphi = \varphi_0 \exp(-r^2/\sigma^2)$  и  $\partial_t \varphi = 0$ . Подробности<sup>14</sup> используемого численного метода приведены в Приложении Б, а результат показан на Рис. 2.1. После короткого периода нелинейных апериодических колебаний (Рис. 2.1б,в и крайняя левая часть Рис. 2.1а) сгусток поля в центре сбрасывает часть исходящих волн (небольшие, но заметные справа на Рис. 2.1г осцилляции). После этого устанавливается почти периодическая долгоживущая конфигурация (Рис. 2.1д и правая часть Рис. 2.1а). Это и есть осциллон, который мы будем изучать в дальнейшем.

Ещё раз подчеркнём, что осциллоны не являются особым свойством конкретной модели (2.1) или гауссовых начальных данных. Хотя модель (2.2) не является особенной с точки зрения времени жизни осциллона, эти объекты обычно сохранялись до конца наших численных симуляций, которые иногда продолжались  $10^5$  периодов осцилляций.

<sup>13</sup>Такие единицы вводятся перешкалировкой  $t \rightarrow t/m$ ,  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}/m$  и  $\varphi \rightarrow \Lambda\varphi$  в модели с канонически нормированным полем и потенциалом  $V = \frac{1}{2}m^2\Lambda^2 \tanh^2(\varphi/\Lambda)$ .

<sup>14</sup>Вкратце, мы используем пространственную дискретизацию бесконечного порядка, основанную на быстром преобразовании Фурье, и симплектический метод четвёртого порядка Рунге-Кутты-Найстрёма. Исходящее излучение поглощается на краях нашей решётки с помощью искусственного затухания [87].

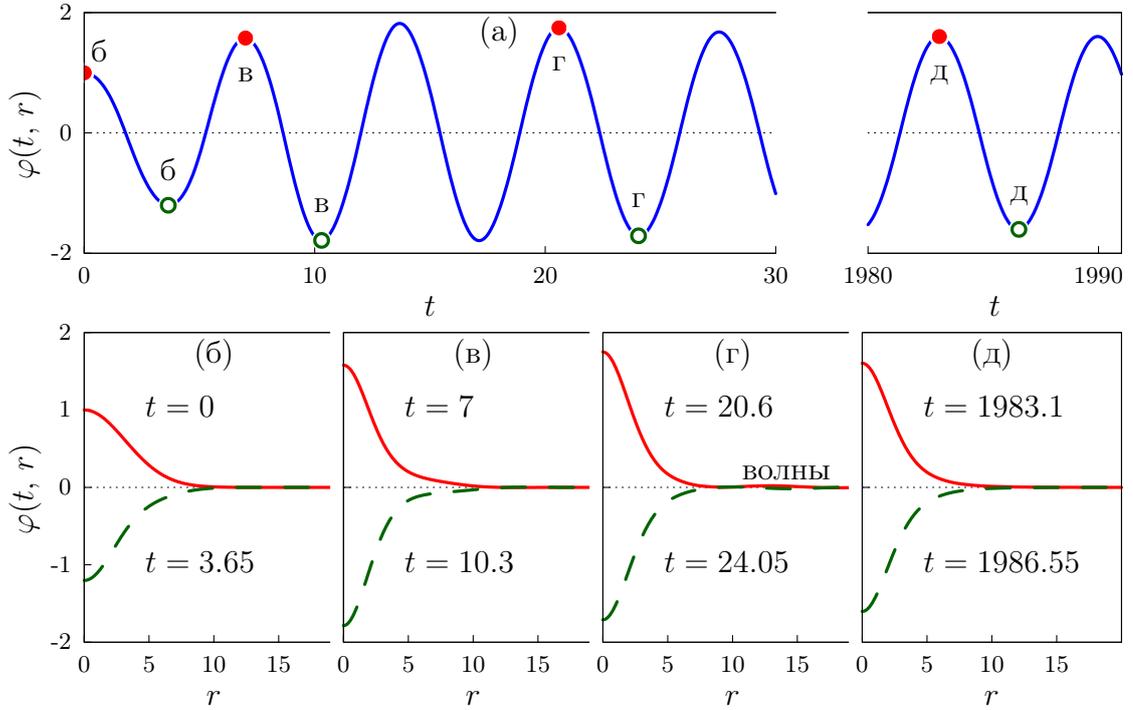


Рис. 2.1: Численная эволюция сферически-симметричного скалярного поля  $\varphi(t, r)$  с гауссовыми начальными данными,  $\varphi_0 = 1$  и  $\sigma = 20$ , в  $(3 + 1)$ -мерной модели (2.2). На Рис. (а) показано поле  $\varphi(t, 0)$  в центре  $r = 0$  как функция времени, в то время как Рис. (б)—(д) демонстрируют полевые конфигурации в момент максимальных (сплошные линии) и минимальных (пунктирные линии) значений  $\varphi(t, 0)$ . Указанные моменты отмечены на Рис. (а) заполненными и пустыми кругами соответственно.

### 2.3 Эффективная теория для классического поля

Построим классическую эффективную теорию поля (далее — ЭТП), описывающую конфигурации большого пространственного размера  $R \gg m^{-1}$ , где  $m$  — масса поля. В этом случае можно считать, что

$$|\partial_i \varphi| \ll m\varphi, \quad (2.3)$$

где  $\partial_i$  — пространственная производная. Вскоре мы увидим, что в моделях общего положения это условие выполнено только для нерелятивистских осциллонов [37], частота  $\omega$  которых близка к массе, а амплитуда поля мала. Но есть и особые модели [16, 17, 83], где осциллоны имеют большой размер, большую амплитуду и живут исключительно долго. Чтобы описать оба случая, мы будем работать с конечной частотой  $\omega$ , т.е.  $m - \omega \sim O(m)$ , и рассматривать нелинейные поля.

Действуя в грубейшем порядке по параметру (2.3), полностью опустим член с пространственными производными в уравнении поля. Оставшееся уравнение, описывающее нелинейный механический осциллятор  $\partial_t^2 \varphi = -V'(\varphi)$ , можно решить в переменных действие-угол [61, 88]. Для этого мы вводим канонический импульс

$$\pi_\varphi = \partial_t \varphi = \sqrt{2h - 2V(\varphi)}, \quad (2.4)$$

где  $h$  — механическая энергия, и сделаем каноническое преобразование к новым переменным  $I$  и  $\theta$ ,

$$\varphi = \Phi(I, \theta), \quad \partial_t \varphi = \pi_\varphi = \Pi(I, \theta). \quad (2.5)$$

Важно, что действие  $I$  вводится как сохраняющаяся величина при механическом движении, а угол  $\theta$  — как канонически сопряжённая ему переменная. А именно,

$$I(h) = \frac{1}{2\pi} \oint \pi_\varphi(h, \varphi) d\varphi, \quad (2.6)$$

где интегрирование производится по полному периоду осцилляций; механическую энергию  $h(I)$  можно выразить как функцию  $I$ , обращая это выражение. Угол  $\theta$  равен

$$\theta(I, \varphi) = \frac{\partial}{\partial I} \int_{\varphi_h}^{\varphi} \pi_\varphi(h(I), \varphi') d\varphi', \quad (2.7)$$

где  $\theta = 0$  соответствует точке поворота  $\varphi = \varphi_h$ , в которой  $\pi_\varphi = 0$ . Вспомнив, что  $h = \pi_\varphi^2/2 + V(\varphi)$ , можно выразить  $\varphi$  и  $\pi_\varphi$  из уравнений (2.6) и (2.7) и получить явные формулы для канонического преобразования (2.5). Отметим, что функции  $\Phi(I, \theta)$  и  $\Pi(I, \theta)$  могут быть найдены точно только для некоторых потенциалов. Однако в других случаях они могут быть вычислены приближённо или же представлены в форме сходящихся степенных рядов с использованием компьютерной алгебры. В любом случае, в переменных действие–угол решение уравнения для нелинейного осциллятора имеет вид  $I = \text{const}$  и  $\theta = \Omega t + \text{const}$ , где  $\Omega(I) = dh/dI$  — частота колебаний в потенциале  $V(\varphi)$ . Как и задумано,  $I$  остаётся постоянным во время нелинейных осцилляций, а  $\theta$  возрастает на  $2\pi$  за каждый период.

В теории поля члены с пространственными производными нельзя полностью игнорировать, даже если они подавлены, поскольку именно они определяют пространственный профиль осциллона. Тем не менее, уравнение (2.5) по-прежнему задаёт каноническое преобразование от  $\varphi$  и  $\pi_\varphi = \partial_t \varphi$  к  $I(t, \mathbf{x})$

и  $\theta(t, \mathbf{x})$ . Новые величины не являются истинными переменными действие–угол в теории поля, но они по-прежнему характеризуют амплитуду и фазу осцилляций в каждой точке пространства. Естественно было бы ожидать, что в пределе большого размера полевой конфигурации  $I$  и  $\partial_t\theta$  медленно зависят от времени и пространства, в отличие от быстро осциллирующих  $\varphi(t, \mathbf{x})$  и  $\pi_\varphi(t, \mathbf{x})$ . Мы будем использовать  $I$  и  $\theta$  в качестве эффективных полей в главном порядке ЭТП.

Построим классическое эффективное действие для медленно меняющихся  $I$  и  $\theta$ . Подставим (2.5) в действие скалярного поля

$$\mathcal{S} = \int dt d^d \mathbf{x} \left( \pi_\varphi \partial_t \varphi - h - \frac{1}{2} (\partial_i \varphi)^2 \right), \quad h \equiv \pi_\varphi^2 / 2 + V(\varphi), \quad (2.8)$$

где мы для удобства выделили «механический гамильтониан»  $h(\varphi, \pi_\varphi)$ . Поскольку преобразование (2.5) каноническое,  $\int dt \pi_\varphi \partial_t \varphi = \int dt I \partial_t \theta$ . Кроме того,  $h$  является функцией  $I$ , определённой в уравнении (2.6). Наконец, заметим, что субдоминантный член с пространственными производными  $f = (\partial_i \varphi)^2$  интегрируется в действии (2.8) по большому временному интервалу. Поэтому его можно явно усреднить по периоду, т.е. по углу  $\theta$ , который меняется почти линейно со временем

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(I, \theta) d\theta. \quad (2.9)$$

Используя (2.5), получим:

$$\langle (\partial_i \varphi)^2 \rangle \approx \frac{(\partial_i I)^2}{\mu_I(I)} + \frac{(\partial_i \theta)^2}{\mu_\theta(I)}, \quad \frac{1}{\mu_I} \equiv \langle (\partial_I \Phi)^2 \rangle, \quad \frac{1}{\mu_\theta} \equiv \langle (\partial_\theta \Phi)^2 \rangle, \quad (2.10)$$

где мы вынесли все медленно меняющиеся величины  $\partial_i I$  и  $\partial_i \theta$  из-под среднего, ввели  $\partial_I \equiv \partial/\partial I$  и  $\partial_\theta \equiv \partial/\partial \theta$ , а также заметили<sup>15</sup>, что  $\langle \partial_I \Phi \partial_\theta \Phi \rangle \partial_i I \partial_i \theta \equiv 0$  в силу симметрии при отражении времени  $t \rightarrow -t$ ,  $\theta \rightarrow -\theta$ .

Собирая все члены, мы получаем эффективное действие в главном порядке ЭТП:

$$\mathcal{S}_{\text{eff}} = \int dt d^d \mathbf{x} \left( I \partial_t \theta - h(I) - \frac{(\partial_i I)^2}{2\mu_I(I)} - \frac{(\partial_i \theta)^2}{2\mu_\theta(I)} \right), \quad (2.11)$$

<sup>15</sup>Вспомним, что  $\theta = 0$  соответствует точке поворота  $\pi_\varphi = 0$ . В этом случае  $\Phi$  является чётной функцией  $\theta$ , а  $\partial_I \Phi \partial_\theta \Phi$  — нечётной с нулевым средним.

где  $\mu_I$  и  $\mu_\theta$  даются выражением (2.10). Если от двух вещественных полей  $I(t, \mathbf{x})$  и  $\theta(t, \mathbf{x})$  перейти к комплексному полю

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \sqrt{I} \cdot e^{-i\theta}, \quad (2.12)$$

то действие примет знакомый вид

$$\mathcal{S}_{\text{eff}} = \int dt d^d \mathbf{x} \left( i\psi^* \partial_t \psi - h(|\psi|^2) - \frac{|\partial_i \psi|^2}{2\mu_1} - \frac{1}{2\mu_2} [\psi^{*2} (\partial_i \psi)^2 + \text{h.c.}] \right), \quad (2.13)$$

где  $\mu_1 \equiv 2I\mu_I\mu_\theta/(4I^2\mu_\theta + \mu_I)$  и  $\mu_2 \equiv 4I^2\mu_I\mu_\theta/(4I^2\mu_\theta - \mu_I)$ . Это — нелинейная модель Шрёдингера для поля  $\psi$  с формфакторами  $h$ ,  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , зависящими от  $I \equiv |\psi|^2$ .

Уравнение эволюции крупномасштабных полевых конфигураций получается варьированием эффективного действия (2.11) по  $I$  и  $\theta$ :

$$\partial_t I = \partial_i (\partial_i \theta / \mu_\theta), \quad \partial_t \theta = \Omega - \frac{\Delta I}{\mu_I} + \frac{\partial_I \mu_I}{2\mu_I^2} (\partial_i I)^2 - \frac{\partial_I \mu_\theta}{2\mu_\theta^2} (\partial_i \theta)^2, \quad (2.14)$$

где  $\Omega \equiv \partial_I h$ . Эквивалентное уравнение на  $\psi$  получается варьированием (2.13). Оно имеет вид модифицированного нелинейного уравнения Шрёдингера.

Стоит отметить, что приведённый выше эффективный подход является приближённым за счёт усреднения по периоду в уравнении (2.10). В разделе 2.6 мы увидим, что поправки к эффективному действию подавлены как минимум четырьмя пространственными производными полей  $I$  и  $\theta$ . Это покажет, что наша эффективная теория является последовательным асимптотическим разложением по количеству пространственных производных.

Важнейшим свойством построенной эффективной теории является глобальная  $U(1)$ -симметрия

$$\theta \rightarrow \theta + \alpha \quad \text{или} \quad \psi \rightarrow \psi e^{-i\alpha}, \quad \psi^* \rightarrow \psi^* e^{i\alpha},$$

которая появилась после усреднения по  $\theta$  в уравнении (2.10). Она приводит к сохранению глобального заряда

$$N = \int d^d \mathbf{x} |\psi|^2, \quad \partial_t N = 0. \quad (2.15)$$

Отметим, что согласно определению переменной действия (2.6), значение этого заряда в главном порядке совпадает с найденным в работах [41, 42] приближённо сохраняющимся «адиабатическим инвариантом»

$$N = \frac{1}{2\pi} \int d^d \mathbf{x} \oint \pi_\varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int d^d \mathbf{x} \oint dt (\partial_t \varphi)^2, \quad (2.16)$$

где  $\varphi$ - и  $t$ -интегралы берутся по полному периоду осцилляций. Выражение (2.16) удобно для нахождения значений  $N$  на полученном численно квазипериодическом решении. Однако, в отличие от величины (2.15), оно неприменимо вне уравнений поля.

В следующем разделе мы заметим, что при определённых условиях сохранение заряда приводит к появлению стабильных нетопологических солитонов<sup>16</sup>, похожих на  $Q$ -шары — осциллонов.

Завершим этот раздел иллюстрацией вычисления эффективного действия в главном порядке на примере модели (2.2). Уравнение (2.6) в этом случае даёт<sup>17</sup>

$$h(I) = I - I^2/2. \quad (2.17)$$

Таким образом, частота механических осцилляций в потенциале  $V(\varphi)$  равна  $\Omega = \partial_I h = 1 - I$ . Каноническое преобразование  $\varphi = \Phi(I, \theta)$  и  $\pi_\varphi = \Pi(I, \theta)$  следует из формулы (2.7) и определения «механической энергии»  $h(\varphi, \pi_\varphi)$ :

$$\Phi = \operatorname{arcsinh} \left( \frac{\sqrt{I(2-I)}}{1-I} \cos \theta \right), \quad \Pi = - \frac{(1-I) \sin \theta}{\sqrt{[I(2-I)]^{-1} - \sin^2 \theta}}. \quad (2.18)$$

Можно проверить, что скобка Пуассона этих функций равна 1. Вычисляя<sup>18</sup> интегралы (2.10) по углу  $\theta$ , получим усреднённые по времени формфакторы

$$\mu_I = I(2-I)^2(1-I)^2, \quad \mu_\theta = I^{-1} - 1. \quad (2.19)$$

Отсюда следуют коэффициенты в действии (2.13) для  $\psi$ :

$$\mu_1 = \frac{2(1-I)^2(2-I)^2}{4 + (1-I)(2-I)^2}, \quad \mu_2 = \frac{4I(1-I)^2(2-I)^2}{4 - (1-I)(2-I)^2}. \quad (2.20)$$

Отметим, что  $\mu_1$  и  $\mu_2/I$  остаются конечными в пределе слабого поля  $I \rightarrow 0$ , что удобно при численных расчётах.

Мы видим, что как только вид скалярного потенциала зафиксирован, эффективная теория поля принимает явный вид модифицированной нелинейной модели Шрёдингера для поля  $\psi$ .

<sup>16</sup>Называемых « $I$ -шарами» в [41].

<sup>17</sup>Замена переменных  $\beta = \tanh \varphi \sqrt{1-2h} / \sqrt{2h - \tanh^2 \varphi}$  превращает выражения (2.6), (2.7) в интегралы от рациональных функций.

<sup>18</sup>Из-за симметрии относительно отражения времени, подынтегральные выражения в уравнении (2.10) являются симметричными функциями  $\theta$ :  $f(\theta) = f(-\theta)$ . В этом случае усреднение (2.9) можно вычислить как контурный интеграл  $\langle f \rangle = \oint dz f(z)/(2\pi iz)$  вдоль единичной окружности  $z = -e^{2i\theta}$ ,  $|z| = 1$ .

## 2.4 Осциллоны в эффективной теории

### 2.4.1 Условия существования

В определённых случаях в эффективной теории для  $I$  и  $\theta$  существует семейство компактных нетопологических солитонов — осциллонов. Действительно, стационарный анзац

$$\psi = \psi(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}, \quad \psi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}, \quad \text{или} \quad I = \psi^2(\mathbf{x}), \quad \theta = \omega t \quad (2.21)$$

проходит через уравнения (2.14) и даёт уравнение на вещественный профиль осциллона  $\psi(\mathbf{x})$

$$-\frac{2\psi^2}{\mu_I} \Delta\psi - (\partial_i\psi)^2 \frac{d}{d\psi} (\psi^2/\mu_I) + \Omega\psi = \omega\psi. \quad (2.22)$$

Это уравнение похоже на уравнение Шрёдингера с «массой»  $\mu_I/\psi^2$  и «потенциалом»  $\Omega = \partial_I h$ , которые сами являются функциями поля  $I \equiv \psi^2(\mathbf{x})$ . Осциллоны существуют, когда уравнение (2.22) имеет стабильные локализованные решения при какой-либо частоте  $\omega$ .

Получим общие условия существования осциллонов, основываясь на законах сохранения [89, 90]. Заметим, что осциллоны минимизируют энергию  $E$  при фиксированном заряде  $N$ , т.е. экстремизируют функционал

$$F = E - \omega N = \int d^d \mathbf{x} \left[ h(I) + \frac{(\partial_i I)^2}{2\mu_I(I)} + \frac{(\partial_i \theta)^2}{2\mu_\theta(I)} - \omega I \right], \quad (2.23)$$

где  $\omega$  является множителем Лагранжа. Действительно, минимизация (2.23) по  $\theta$  даёт  $\partial_i \theta = 0$ , после чего  $(-F)$  совпадает с лагранжианом в выражении (2.11), вычисленным на полевой конфигурации с  $\theta = \omega t$ .

Таким образом, уравнение профиля (2.22) может быть получено экстремизацией  $F$  по  $I = \psi^2(\mathbf{x})$ . Отсюда немедленно следует физическая интерпретация частоты осциллона  $\omega$ . Поскольку осциллонное решение соответствует экстремуму  $F$  по всем полям, то  $\delta E = \omega \delta N$  при любой вариации. В частности, вариация в виде малого изменения частоты осциллона  $\omega$  даёт

$$\omega = dE/dN \quad \text{и} \quad dF/d\omega = -N, \quad (2.24)$$

где последнее равенство следует из первого и уравнения (2.23). Если  $N$  — заряд осциллона, то  $\omega$  играет роль химического потенциала — энергии на

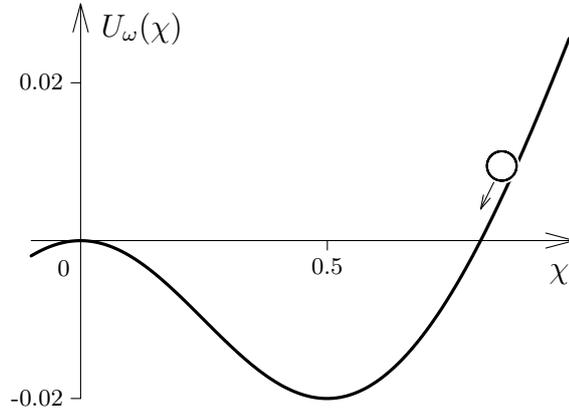


Рис. 2.2: Механический потенциал  $U_\omega(\chi)$ , изображённый при  $\omega = 0.8$  в модели (2.2).

единицу заряда, а функционал  $F$  — «большого термодинамического потенциала» осциллона.

Для дальнейшего анализа удобно ввести поле

$$\chi(I) = \int_0^I dI' [\mu_I(I')]^{-1/2} = 2 \int_0^\psi \psi' d\psi' / \sqrt{\mu_I}, \quad (2.25)$$

у которого градиентный член в функционале  $F$  нормирован канонически:

$$F = \int d^d \mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} (\partial_i \chi)^2 - U_\omega(\chi) \right], \quad \text{где} \quad U_\omega \equiv \omega I - h. \quad (2.26)$$

Теперь мы можем изучать осциллоны с помощью методов, разработанных для  $Q$ -шаров [89, 90]. Будем предполагать, что осциллоны сферически симметричны,  $\chi = \chi(r)$ . Действительно, численные симуляции указывают, что угловая асимметрия исчезает сразу после их формирования [91] — точно так же, как в случае гравитационно связанных Бозе-звёзд [92]. Уравнение для профиля  $\chi(r)$  имеет вид:

$$\partial_r^2 \chi + \frac{d-1}{r} \partial_r \chi = -dU_\omega/d\chi. \quad (2.27)$$

Отметим, что уравнение (2.27) совпадает с законом Ньютона для частицы с единичной массой, движущейся во «времени»  $r$  в механическом потенциале  $U_\omega(\chi)$ , см. Рис. 2.2. Второй член в уравнении (2.27) описывает трение, уменьшающее механическую энергию такой частицы при  $d > 1$ . Поскольку осциллон локализован и является гладкой функцией  $\mathbf{x}$ , мы накладываем граничные условия  $\partial_r \chi = 0$  при  $r = 0$  и  $\chi \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow +\infty$ . Это означает, что

аналогичная механическая частица стартует в «момент времени»  $r = 0$  с нулевой скоростью от  $\chi(0) = \chi_0$  и прибывает<sup>19</sup> к локальному максимуму  $\chi = 0$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Чтобы описанное движение имело место, потенциал  $U_\omega$  должен обладать определёнными свойствами, что, в свою очередь, накладывает условия на амплитуду осциллона  $\chi_0$ , частоту  $\omega$  и скалярный потенциал модели  $V(\varphi)$ . Во-первых,  $\chi = 0$  должно быть локальным максимумом  $U_\omega$ , иначе частица там не остановится при  $r \rightarrow +\infty$ . Это означает

$$\omega < m, \quad (2.28)$$

т.е. энергия связи  $\omega - m$  квантов поля внутри осциллона отрицательна. Действительно, при малых  $\varphi$  справедливо приближение  $V(\varphi) \approx m^2\varphi^2/2$ . Делая каноническое преобразование  $\Phi$  в этой области малых амплитуд, мы находим асимптотики формфакторов ЭТП

$$\begin{aligned} \Phi &\approx \sqrt{2I/m} \cos \theta, & h &\approx mI, \\ \mu_I &\approx 4Im, & U_\omega &\approx m(\omega - m)\chi^2 \end{aligned} \quad \text{при малых } I, \chi. \quad (2.29)$$

Видно, что потенциал  $U_\omega(\chi)$  имеет максимум  $U_\omega = 0$  при  $\chi = 0$  только если частота  $\omega$  ограничена сверху уравнением (2.28).

Во-вторых, чтобы достичь максимума  $U_\omega(0) = 0$ , аналогичная частица должна начинать своё движение вниз с положительной механической энергией (при  $d > 1$ , когда есть «трение») или с нулевой энергией (при  $d = 1$ , когда нет «трения»). Это значит, что  $\partial_{\chi_0} U_\omega(\chi_0) > 0$  и  $U_\omega(\chi_0) \geq 0$ , где  $\chi_0 \equiv \chi(0)$ . В изначальных терминах эффективной теории эти требования принимают вид

$$\omega > \Omega(I_0), \quad \omega \geq h(I_0)/I_0 \quad \text{и} \quad \mu_I(I) \neq 0 \quad \text{при } I \leq I_0, \quad (2.30)$$

где  $I_0 = \psi_0^2$  — амплитуда осциллона при  $r = 0$  — соответствует  $\chi_0$ . Последнее требование в формуле (2.30) связано с тем, что хотя «масса ЭТП»  $\mu_I(I)$  неотрицательна по определению, она может обращаться в ноль в особых точках канонического преобразования. Также отметим, что при  $d = 1$  механическая энергия сохраняется, и второе из соотношений (2.30) обращается в равенство. Из неравенств (2.30) видно, что частота осциллона ограничена снизу.

<sup>19</sup>Ср. с механической аналогией для статических солитонов в Главе 1.

Формулы (2.28) и (2.30) вместе дают условия на существование осциллона с амплитудой  $I_0$  в заданной модели:

$$\Omega(I_0) < m, \quad h(I_0)/I_0 < m \quad \text{и} \quad \mu_I|_{I \leq I_0} \neq 0 \quad \text{для некоторого } I_0. \quad (2.31)$$

В выделенном случае  $d = 1$  мы получаем дополнительное требование

$$\Omega(I_0) < h(I_0)/I_0 \quad \text{при} \quad d = 1. \quad (2.32)$$

Вспомним теперь, что  $\Omega(I)$  — частота нелинейных механических осцилляций в потенциале  $V(\varphi)$ , а  $\Omega(0) = m$ . Условия (2.31) означают, что эта частота *меньше* при  $I = I_0$ , нежели при  $I \rightarrow 0$ , и это же неравенство справедливо для усреднённой по амплитуде частоты  $h(I_0)/I_0 = I_0^{-1} \int_0^{I_0} \Omega(I) dI$ . Данные условия можно понимать как точное определение понятия «притягивающий потенциал» в случае сильных полей. Как правило, им удовлетворяют функции  $V(\varphi)$ , которые растут медленнее, чем  $\varphi^2$  — так, чтобы  $\Omega(I)$  убывала с ростом  $I$ .

В (1+1)-мерном пространстве слагаемое с трением в уравнении (2.27) исчезает, и профили осциллонов могут быть получены аналитически. Проиллюстрируем это вычисление в модели (2.2), где  $m = 1$ . Подставляя соответствующие формфакторы  $h(I)$  и  $\mu_I(I)$  [выражения (2.17) и (2.19)] в условия (2.30), (2.31) и (2.32), мы находим, что осциллоны в этой модели существуют, если их амплитуда в центре удовлетворяет условию  $0 < I_0 < 1$ , а частоты лежат в интервале  $1/2 < \omega < 1$ . Для этих частот «механический» потенциал  $U_\omega(\chi)$  имеет вышеуказанный особый вид; он изображён на Рис. 2.2 при  $\omega = 0.8$ . Наконец, в одномерном случае второе соотношение в формуле (2.30) становится равенством, фиксируя значение поля в центре осциллона:  $\psi(0) = \sqrt{I_0} = \sqrt{2 - 2\omega}$ .

Решая уравнение (2.22) на профиль осциллона, мы получаем аналитическую и чётную функцию  $\psi(x)$  в неявном виде

$$r = \frac{2}{\sqrt{2\omega - 1}} \arctan \frac{\zeta(\psi)}{\sqrt{2\omega - 1}} - \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \arctan \frac{\zeta(\psi)}{\sqrt{2\omega}} + \frac{1}{\sqrt{2 - 2\omega}} \operatorname{arctanh} \frac{\zeta(\psi)}{\sqrt{2 - 2\omega}}, \quad (2.33)$$

где  $\zeta(\psi) = \sqrt{2 - 2\omega - \psi^2}$ , а  $r \equiv |x|$  в одном измерении; подробности этого вычисления приведены в Приложении В.1. Решение (2.33) и  $\theta = \omega t$  полностью определяют поле осциллона  $\varphi(t, x) = \Phi(\psi^2, \theta)$ , поскольку функция  $\Phi$  канонического преобразования известна, см. выражение (2.18).

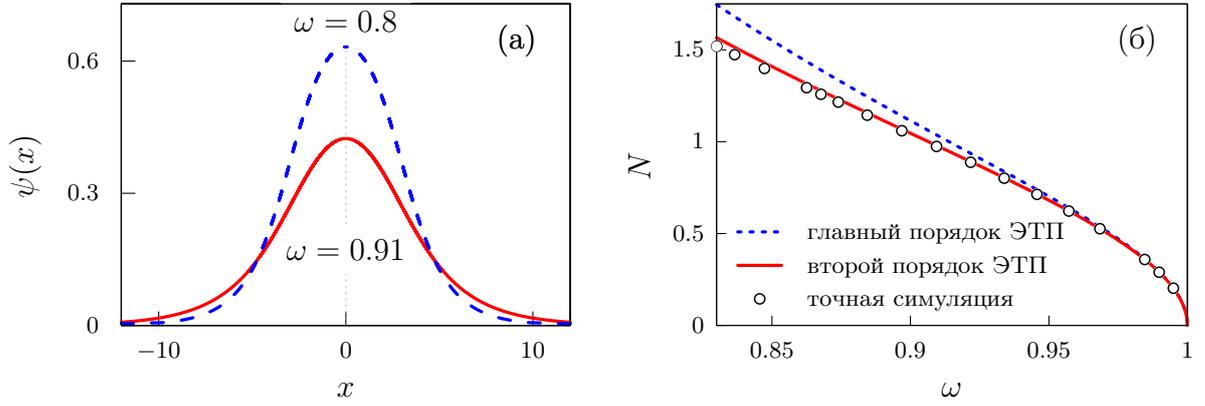


Рис. 2.3: (а) Два профиля одномерных осциллонов в модели (2.2), полученных в главном порядке ЭТП, см. выражение (2.33). (б) Заряды осциллонов  $N(\omega)$  при  $d = 1$ , полученные в главном [пунктирная линия, формула (2.34)] и втором [сплошная линия, выражение (2.60)] порядках эффективной теории, а также заряды, извлечённые из численных симуляций в полной теории (кружочки).

Профили  $\psi(x)$  для двух разных значений частоты  $\omega$  показаны на Рис. 2.3а (сплошная и пунктирная линии), а профиль  $\varphi(0, x)$  при  $\omega = 0.91$  приведён на Рис. 2.4а (пунктирная линия). Отметим, что осциллоны с бóльшими  $\omega$  меньше по амплитуде и имеют бóльший размер  $R$ . Действительно, уравнение (2.33) показывает, что  $R \propto (1 - \omega)^{-1/2}$  стремится<sup>20</sup> к бесконечности в нерелятивистском пределе  $\omega \rightarrow 1$ . В этом пределе ЭТП становится точной.

Зная  $\psi(r)$  и используя уравнения (2.15) и (2.23), мы находим заряды  $N$  и энергии  $E$  одномерных осциллонов в модели (2.2):

$$N = \frac{4}{\sqrt{2\omega - 1}} \arctan \frac{\sqrt{1 - \omega}}{\sqrt{\omega - 1/2}} - \frac{4}{\sqrt{2\omega}} \arctan \sqrt{1/\omega - 1}, \quad (2.34)$$

$$E = \frac{4(1 - \omega)}{\sqrt{2\omega - 1}} \arctan \frac{\sqrt{1 - \omega}}{\sqrt{\omega - 1/2}} + 2\sqrt{2\omega} \arctan \sqrt{1/\omega - 1}, \quad (2.35)$$

см. пунктирные линии на Рис. 2.3б и 2.5в, а также подробности вычисления в Приложении В.1. Отметим, что  $E(\omega)$  и  $N(\omega)$  убывают с ростом  $\omega$  при  $d = 1$ . Иными словами, заряд и энергия осциллонов растут при увеличении энергии связи частиц  $m - \omega$ . В разделе 2.5 мы увидим, что для трёхмерных осциллонов это свойство уже не выполняется.

<sup>20</sup>Также  $R$  велико при  $\omega \rightarrow 1/2$ . Однако соответствующие профили (2.33) имеют форму «пузырей» с почти постоянным полем  $I \approx 1$  внутри, которые окружены тонкими стенками с  $\partial_r I \sim mI$ . Несмотря на большой размер, такие конфигурации нарушают условия применимости ЭТП (2.3), (2.36) и потому быстро распадаются.

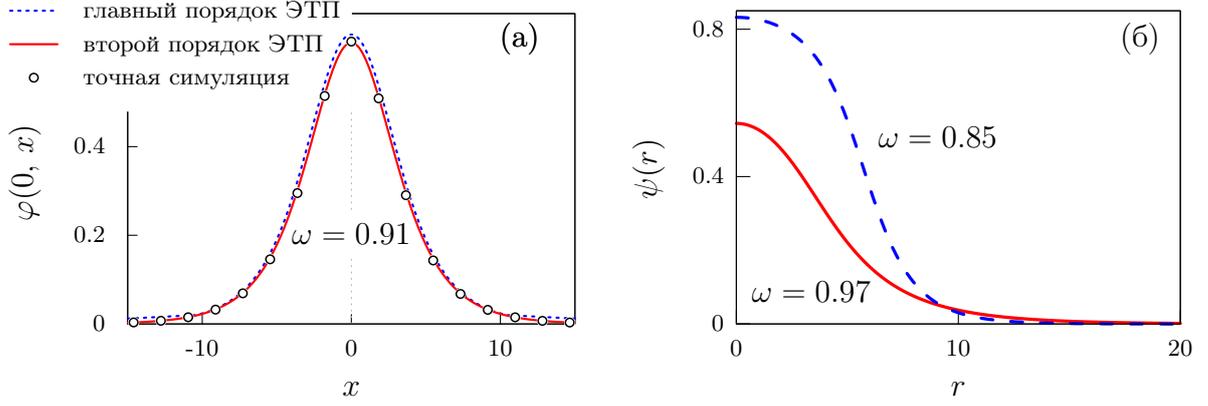


Рис. 2.4: (а) Поле  $\varphi(0, x)$  одномерного осциллона с частотой  $\omega = 0.91$  в модели (2.2). Круги получены в результате точных численных симуляций, пунктирная и сплошная линия есть результаты ЭТП в главном и во втором порядках соответственно, см. уравнения (2.18), (2.33) и (2.58). (б) Два профиля трёхмерных осциллонов  $\psi(r)$  в модели (2.2), полученные в главном порядке ЭТП.

### 2.4.2 Долговечность и стабильность

Теперь сделаем важнейшие замечания по поводу долговечности и стабильности осциллонов. В эффективной теории для осциллонов поле  $\varphi$  и импульс  $\pi_\varphi$  находятся из выражений (2.5). Но в этом случае производная по времени от поля  $\partial_t \varphi = \omega \partial_\theta \Phi$  не совпадает с каноническим импульсом  $\pi_\varphi = \Pi \equiv \Omega \partial_\theta \Phi$ , где последнее равенство следует из общего определения механических переменных действие-угол. Данное несоответствие можно объяснить, заметив, что  $\omega - \Omega(I)$  должно быть малым для того, чтобы эффективная теория была применима. Действительно, вторая пространственная производная  $\psi(\mathbf{x})$  в уравнении (2.22) пропорциональна  $\omega - \Omega$ , а значит размер осциллона пропорционален  $R \propto |\omega - \Omega|^{-1/2}$ . Таким образом,  $\Omega(I)$  должна быть почти постоянна внутри осциллона, т.е.

$$\text{ЭТП: } |d\Omega/dI| \ll \Omega/I, \quad \text{или} \quad \eta^2 \equiv |d \ln \Omega / d \ln I| \ll 1 \quad \text{при} \quad I \leq I_0, \quad (2.36)$$

где  $I_0$  — амплитуда в центре.<sup>21</sup> Более того, поскольку  $\Omega - \omega \propto \partial_I \Omega$ , то из уравнения (2.22) можно грубо оценить  $(mR)^{-2} \sim |d \ln \Omega / d \ln I| \equiv \eta$ .

Можно ожидать, что осциллоны будут более долговечны, если условие (2.36) выполняется с большей точностью. Действительно, сохранение за-

<sup>21</sup>Условие (2.36) можно чуть ослабить, наложив его только в интервале  $I_1 < I \leq I_0$ , где  $I_1 \ll I_0$ . В этом случае ЭТП работает только в центральной части осциллона с  $I > I_1$ , а весь осциллон медленно излучается через границы.

ряда запрещает распад осциллонов в приближённой эффективной теории, и, как мы увидим в Разделе 2.6, поправки высших порядков не нарушают это свойство. Значит, данный распад осциллонов должен быть связан с непертурбативными поправками к эффективной теории. Поэтому времена жизни осциллонов большие — предположительно, экспоненциально большие — по параметру разложения  $\eta \ll 1$ . Это соображение превращает неравенство (2.36) в условие долговечности осциллонов.

До сих пор мы формулировали требования к модели, в которой могут существовать осциллоны, в терминах частоты  $\Omega$  механических колебаний в скалярном потенциале  $V(\varphi)$ . Подбрав подходящую функцию  $\Omega(I)$ , можно восстановить чётный по  $\varphi$  потенциал  $V(\varphi)$  с помощью соотношения [88]

$$\varphi(V) = \int_0^V \frac{dh}{\Omega(h)\sqrt{2V-2h}}, \quad (2.37)$$

где  $\varphi(V)$  — обратная функция к  $V(\varphi)$ , а частота  $\Omega$  в правой части выражена через «механическую энергию»  $h(I)$ . Условие (2.36) означает, что скалярный потенциал  $V(\varphi)$  должен быть близок к квадратичному.

Обсудим два очевидных пути удовлетворить всем вышеуказанным требованиям. Во-первых, ЭТП всегда применима в пределе  $I \rightarrow 0$ , если производная  $\partial_I \Omega(0)$  конечна и отлична от нуля. Действительно, гладкий потенциал общего вида  $V(\varphi)$  почти квадратичен вблизи вакуума. Соответствующие осциллоны долговечны и имеют большой размер: используя параметр разложения (2.36) и выражения (2.29), можно получить  $R \sim |mI_0 \partial_I \Omega(0)|^{-1/2} \propto I_0^{-1/2}$ . Более того, в силу уравнений (2.28) и (2.30), частоты таких осциллонов чуть меньше массы поля:  $m - \omega \propto I_0$ . Наконец, условия (2.31) существования осциллонов фиксируют знак  $\partial_I \Omega(0) < 0$ .

Здесь полезно вспомнить, что при  $I \rightarrow 0$  помимо ЭТП применим другой общий метод описания осциллонов — пертурбативное разложение по малой амплитуде [37, 93–95]. В этом подходе все величины раскладываются в ряды Тейлора по амплитуде поля  $\varphi$ , и, следовательно, по  $I$ . В частности, ряд для  $\Omega(I)$  в уравнении (2.37) порождает ряд для потенциала

$$V = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{g_3}{4}\varphi^4 + \frac{g_5}{6}\varphi^6 + \dots, \quad (2.38)$$

где  $g_3 = \frac{4}{3}m^2\partial_I \Omega(0) < 0$ . За исключением неизбежно отрицательной константы связи  $g_3$ , потенциал (2.38) — общего вида. Таким образом, осциллоны ма-

лой амплитуды появляются во всех моделях с притягивающим самодействием. Важно отметить, однако, что разложение (2.38) не применимо для сильных полей. С этим можно смириться, если условие (2.36) тоже не выполняется при больших  $I$ , и высокоамплитудные осциллоны быстро распадаются. Рассматриваемый в этой Главе в иллюстративных целях потенциал (2.2), для которого  $\Omega = 1 - I$ , является как раз таким. Однако, как мы увидим далее, есть и другие случаи.

Действительно, второй способ удовлетворить условиям применимости эффективной теории состоит в том, что в определённых специально подобранных моделях функция  $\Omega(I)$  может быть плоской даже при конечных  $I$ . В этом случае низкоамплитудное разложение не применимо. Возьмём  $\Omega = \Omega_0 + \delta\Omega(I)$ , где  $\Omega_0$  — постоянная, а функция  $\delta\Omega(I) \ll \Omega_0$  либо ограничена при больших  $I$ , либо растёт логарифмически. Тогда условие применимости ЭТП (2.36) выполняется. Раскладывая выражение (2.37) по  $\delta\Omega$ , получим

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\Omega}^2(\varphi) \varphi^2, \quad \text{где} \quad \tilde{\Omega}^2 \approx \Omega_0^2 + \frac{2}{\varphi} \int_0^{\Omega_0^2 \varphi^2 / 2} \frac{dh \delta\Omega(h)}{\sqrt{\Omega_0^2 \varphi^2 - 2h}}. \quad (2.39)$$

Этот потенциал почти квадратичен, поскольку  $\tilde{\Omega}(\varphi)$  близка к константе и при больших  $\varphi$  растёт в лучшем случае логарифмически. Важно, что случай (2.39) включает в себя модель монодромии [17, 83], где осциллоны имеют чрезвычайно большую амплитуду и живут необычайно долго. Мы будем их изучать в Главе 4. Наши оценки показывают, что время жизни и размер таких осциллонов контролируются параметром (2.36).

Теперь обсудим линейную стабильность осциллонов. Используя аналогию с  $Q$ -шарами, можно ожидать [79], что эти объекты разрушаются после добавления бесконечно малых длинноволновых возмущений, если нарушен критерий Вахитова–Колоколова [40, 96]:

$$\text{стабильность:} \quad dN(\omega)/d\omega = \omega^{-1} dE(\omega)/d\omega < 0. \quad (2.40)$$

В Приложении В.2 мы строго выводим этот критерий в рамках эффективной теории поля: демонстрируем, что осциллоны могут быть минимумами энергии при фиксированном  $N$  только при выполнении условия (2.40). Отметим, что из выражения (2.34) следует, что одномерные осциллоны в модели (2.2) удовлетворяют критерию стабильности (2.40), см. также Рис. 2.3б.

Можно представить себе [17, 79], что осциллоны могут распадаться за счёт параметрического резонанса [97, 98], т.е. экспоненциального роста высокочастотных мод, которыми мы пренебрегли в ЭТП. Можно даже предположить, что это — основной способ распада осциллонов большого размера и большой амплитуды, т.е. как раз тех, которые описываются ЭТП. Покажем, однако, что параметрический резонанс, наоборот, подавлен при выполнении условия (2.36). Действительно, глубоко внутри осциллона высокочастотные возмущения  $\delta\varphi$  с волновыми векторами  $k \sim O(m)$  удовлетворяют уравнению

$$(\partial_t^2 + k^2)\delta\varphi = -V''(\Phi(I_0, \omega t))\delta\varphi, \quad (2.41)$$

где штрихи означают производные по  $\varphi$  и мы игнорируем медленную зависимость осциллона от  $\mathbf{x}$ , используя  $I(\mathbf{x}) \approx I_0$ . В бесконечной однородной среде периодические колебания  $V''$  всегда возбуждают моды  $\delta\varphi$  с импульсами внутри некоторых резонансных полос шириной  $\delta k \sim |V''_{\text{osc}}|/k$ . В последней оценке мы использовали уравнение (2.41) и обозначили осциллирующую часть  $V''$  индексом «osc», см. [88]. В этом случае поле  $\delta\varphi(t, \mathbf{k})$  растёт экспоненциально внутри резонансных полос. Однако такие нестабильности не могут развиваться в компактных объектах, каковыми являются осциллоны, если растущие моды не могут быть локализованы внутри объекта. Отсюда мы получаем условие на параметрическую нестабильность [97, 98]:  $\delta k \gtrsim R^{-1}$  или  $R|V''_{\text{osc}}| \gtrsim m$ , где  $R$  — размер осциллона. Вспомним, что условие применимости ЭТП (2.36), в свою очередь, гарантирует, что скалярный потенциал почти квадратичен, и осцилляции  $V''$  подавлены. Используя выражения (2.38) и (2.29), получим оценку  $(mR)^{-2} \sim |d \ln \Omega / d \ln I| \propto |V''_{\text{osc}}/m^2|$ , из которой следует малость величины  $R|V''_{\text{osc}}|/m \propto (mR)^{-1} \ll 1$ . Таким образом, параметрическая нестабильность отсутствует, если выполнено условие (2.36); см. также [17].

## 2.5 Сравнение предсказаний эффективной теории с численными результатами

В двух и трёх пространственных измерениях профили осциллонов  $\psi(r)$  не могут быть найдены аналитически даже в рамках эффективной теории. Поэтому мы их получаем численно в модели (2.2) с помощью метода стрель-

бы<sup>22</sup>. Результат при  $d = 3$  изображён на Рис. 2.4б. Как и ожидалось, профили становятся ниже и шире, когда  $\omega$  приближается к  $m = 1$ . Это же свойство наблюдается и в двух пространственных измерениях.

Энергии  $E(\omega)$  осциллонов, вычисленных в главном порядке ЭТП, изображены с помощью пунктирных линий для различного числе измерений  $d$  на Рис. 2.5а–в, см. уравнения (2.23) и (2.15). Наблюдается поразительная особенность:  $dE/d\omega$  положительна в правой части графика (Рис. 2.5а) с  $d = 3$ . Это означает, что критерий (2.40) нарушается при  $\omega \approx m$ ,  $d = 3$ , а соответствующие осциллоны нестабильны. К сожалению, это происходит как раз в той области, где и эффективная теория, и низкоамплитудное разложение работают лучше всего.

На самом деле, трёхмерные осциллоны с малыми амплитудами всегда являются нестабильными. Действительно, в разделе 2.4.2 мы оценивали их размеры  $R \propto 1/\sqrt{I_0}$  и частоты  $m - \omega \propto I_0$  через амплитуду в центре  $I_0$ . Это, в свою очередь, определяет зависимость их зарядов  $N(\omega) \propto R^d I_0 \propto (m - \omega)^{1-d/2}$  и энергий  $E \approx mN$  от частоты  $\omega$  в соответствии с уравнениями (2.15) и (2.24). Таким образом, при  $\omega \rightarrow m$  параметры  $E$  и  $N$  стремятся к нулю, константе или бесконечности в  $d = 1, 2$  и  $d \geq 3$  измерениях соответственно. Критерий стабильности нарушается при  $\omega \approx m$  в случае  $d \geq 3$ .

Сравним предсказания главного порядка эффективной теории с точными численными результатами в модели (2.2). Для этого мы находим сферически симметричные численные решения  $\varphi(t, r)$  так же, как и в разделе 2.2. Но теперь мы стартуем при  $t = 0$  с приближённых осциллонов в ЭТП, которые можно получить, подставив профили  $I = \psi^2(r)$  и  $\theta = 0$  в формулу (2.5). Такие конфигурации в процессе эволюции быстрее релаксируют к настоящим осциллонам, чем гауссовы начальные данные. Мы ждём как минимум  $10^3$  периодов осцилляций поля, чтобы это случилось. Затем мы вычисляем периоды колебаний  $T$  установившихся осциллонов как средние временные интервалы между последовательными максимумами поля в центре  $\varphi(t, 0)$ . Частоты осциллонов равны  $\omega = 2\pi/T$ , энергии вычисляются по формуле

$$E = \int d^d \mathbf{x} \left[ (\partial_t \varphi)^2 / 2 + (\partial_i \varphi)^2 / 2 + V(\varphi) \right] , \quad (2.42)$$

<sup>22</sup>А именно, стартуя с начальных данных  $\psi(0) = \psi_0$  и  $\partial_r \psi(0) = 0$  при  $r = 0$ , мы интегрируем уравнение (2.22) с формфакторами (2.17), (2.19) до больших значений  $r$ , а затем подбираем значение  $\psi_0$  таким образом, чтобы решение было локализовано:  $\psi \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow +\infty$ .

а заряды  $N$  даются уравнением (2.16). Стартуя с различных профилей ЭТП, мы получаем осциллоны с различными частотами и функции  $E(\omega)$ ,  $N(\omega)$ .

В Приложении Б мы описываем детали вышеприведённой численной процедуры, делаем проверки и оцениваем численные ошибки, которые оказываются малы. Один численный трюк заслуживает упоминания в основном тексте. В длительных численных симуляциях мы поглощаем всё исходящее излучение, чтобы оно не отразилось от границ решётки обратно на центр. Для этого мы используем «искусственное затухание» [87] следующим образом. Мы видоизменяем уравнение (2.1),

$$(\partial_t^2 + H(r)\partial_t - \Delta)\varphi = -V'(\varphi), \quad (2.43)$$

добавляя «губку»  $H(r)$ , которая равна нулю в основной части  $r < R_s$  решётки и плавно растёт ближе к её границам. Уравнение (2.43) описывает поле во Вселенной де Ситтера с зависящей от  $r$  постоянной Хаббла  $H(r)/3$ . Это гарантирует, что исходящие скалярные волны экспоненциально затухают со временем при  $r > R_s$ , а эволюция поля в центре решётки, где находится осциллон, остаётся неизменной. Таким образом, мы не допускаем повторного взаимодействия осциллона с его собственным излучением во время длительных численных симуляций.

Результаты симуляций для  $N(\omega)$  в  $d = 1$  измерении и<sup>23</sup>  $E(\omega)$  в  $d = 1, 2$ , и 3 размерностях показаны кружочками на Рис. 2.3б и 2.5а, б, в соответственно. Погрешности, возникающие при определении частоты и заряда, изображены только тогда, когда они превосходят размер кружочков. Можно отметить, что предсказания главного порядка ЭТП (пунктирные линии на рисунках) совпадают с точными результатами при  $\omega \approx m = 1$ , но отходят от них при меньших  $\omega$ , как и ожидается на основе критерия (2.36). Единственное исключение составляет случай  $d = 3$ , где численные симуляции не могут воспроизвести нестабильные осциллоны с  $\omega > 0.97$ , а совпадение для остальных значений  $\omega$  имеет качественный характер.

В Разделе 2.4.2 мы сделали важное предположение, что осциллоны живут экспоненциально долго в случае, когда ЭТП применима. Другими словами, можно ожидать, что их скорость излучения  $\Gamma$  имеет вид

$$\Gamma \equiv |E^{-1}\partial_t E| \sim \varsigma_1 e^{-\varsigma_2/\eta}, \quad (2.44)$$

---

<sup>23</sup>Функции  $N(\omega)$  и  $E(\omega)$  имеют схожие профили из-за соотношения (2.24).

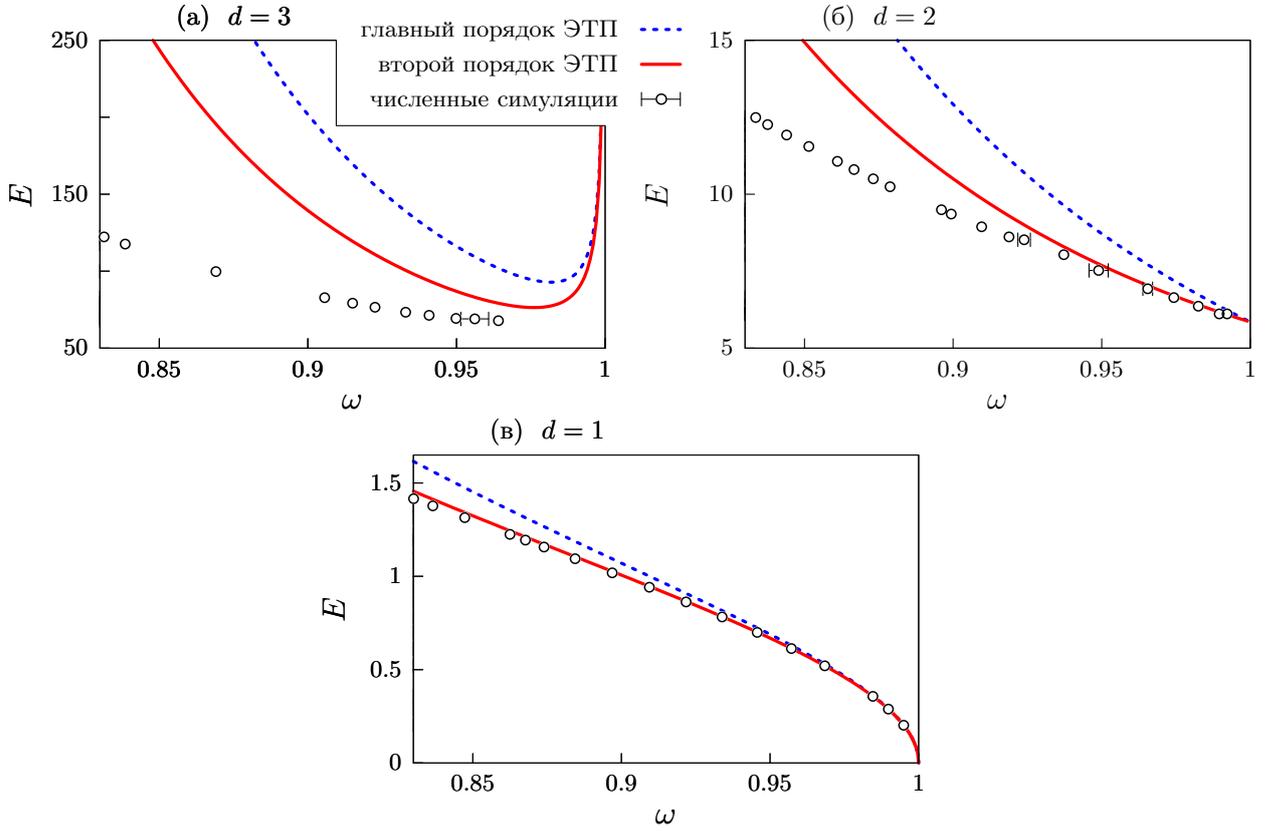


Рис. 2.5: Энергия  $E(\omega)$   $d$ -мерных осциллонов в главном порядке ЭТП (пунктирные линии) и во втором порядке ЭТП (сплошные линии). Кружочки с погрешностями показывают результаты численных симуляций в точной модели.

где  $\eta \equiv |d \ln \Omega / d \ln I|^{1/2} \sim (mR)^{-1}$  — параметр разложения эффективной теории,  $I = I(0)$  — амплитуда осциллона при  $r = 0$ , а  $\zeta_i$  — константы. Выражение, похожее на (2.44), было получено аналитически в предельном случае осциллонов малой амплитуды [38,39,99]. Предположение (2.44) подтверждается: скорости излучения  $\Gamma(\omega)$  трёхмерных осциллонов, вычисленные в полных численных симуляциях, изображены с помощью точек, соединённых пунктирной линией, на Рис. 2.6. Видно, что данные в правой части графика правильно описываются экспонентой (2.44) (изображена сплошной линией) с параметрами  $\ln(\zeta_1/m) = -5.55 \pm 0.38$  и  $\zeta_2 = 7.02 \pm 0.34$ , где  $\eta = \sqrt{I/(1-I)}$  в модели (2.2). Таким образом, поток излучения осциллонов действительно экспоненциально мал при  $\eta \ll 1$ , что для модели (2.2) соответствует режиму  $\omega \approx 1$ .

При меньших  $\omega$  появляются чрезвычайно долгоживущие осциллоны с  $1 - \omega \sim O(1)$ . Они не описываются ЭТП и заслуживают дальнейшего изучения. Отметим, что похожая немонотонная зависимость скоростей излучения

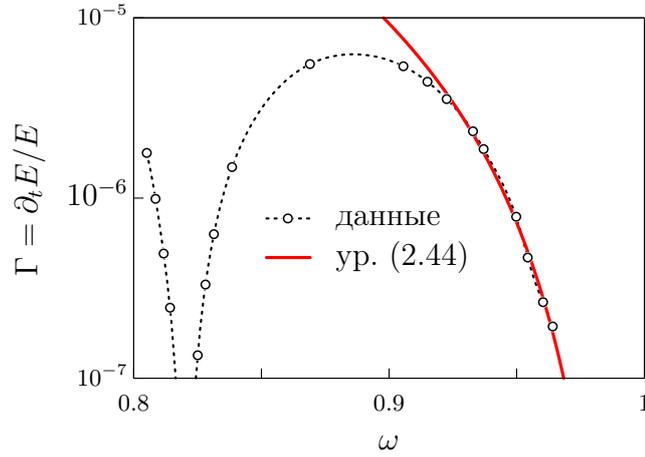


Рис. 2.6: Скорость распада  $\Gamma(\omega) = |E^{-1}\partial_t E|$  трёхмерных осциллонов как функция частоты в модели (2.2) (кружочки с интерполирующей пунктирной линией в логарифмическом масштабе). Сплошная линия соответствует выражению (2.44) с наиболее подходящими параметрами  $\varsigma_1, \varsigma_2$ .

наблюдалась в работах [16, 17, 84].

## 2.6 Поправки высших порядков

В этом Разделе мы вычислим поправки к ЭТП и покажем, что полное эффективное действие имеет вид систематического градиентного разложения, где каждый следующий член подавлен как  $(mR)^{-2}$  по сравнению с предыдущим.

Следует отметить, что само по себе каноническое преобразование от  $\pi_\varphi$  и  $\varphi$  к  $I$  и  $\theta$  оставляет теорию точной. Основное приближение главного порядка ЭТП состоит в предположении, что  $I$  и  $\theta$  медленно меняются в пространстве и во времени. Поэтому во втором порядке мы разобьём их на плавно меняющуюся и быстро осциллирующую части

$$I = \bar{I} + \delta I, \quad \theta = \bar{\theta} + \delta\theta, \quad (2.45)$$

где возмущения имеют нулевое среднее по периоду  $\langle \delta I \rangle = \langle \delta\theta \rangle = 0$ , так что  $\langle I \rangle = \bar{I}$  и  $\langle \partial_t \theta \rangle = \partial_t \bar{\theta}$ . Далее мы увидим, что  $\delta I$  и  $\delta\theta$  малы по параметрам ЭТП и могут быть вычислены по теории возмущений.

Теперь настоящими полями эффективной теории являются «медленные»  $\bar{I}, \bar{\theta}$ , а также их комплексная комбинация  $\psi = \sqrt{\bar{I}} \cdot e^{-i\bar{\theta}}$ . Эффективное действие для них может быть получено подстановкой решений для  $\delta I$  и  $\delta\theta$  в

точное действие

$$\mathcal{S} = \int dt d^d \mathbf{x} [I \partial_t \theta - h(I) + \Phi \Delta \Phi / 2] , \quad (2.46)$$

в котором мы сделали каноническое преобразование, ср. с (2.8). Уравнения на  $\delta I$  и  $\delta \theta$  получаются варьированием действия (2.46) и вычитанием уравнений, усреднённых по периоду. Они имеют вид

$$\partial_t \delta I = j_\theta(I, \theta), \quad \partial_t \delta \theta = \Omega(I) - \langle \Omega \rangle - j_I(I, \theta) , \quad (2.47)$$

где, как обычно,  $\Omega = \partial_I h$ , и мы ввели источники<sup>24</sup>

$$j_\theta = \partial_\theta \Phi \Delta \Phi, \quad j_I = \partial_I \Phi \Delta \Phi - \langle \partial_I \Phi \Delta \Phi \rangle \quad (2.48)$$

зависящие от полных полей  $I = \bar{I} + \delta I$  и  $\theta = \bar{\theta} + \delta \theta$ . Мы видим, что  $\delta I$  и  $\delta \theta$  действительно малы: в уравнениях (2.47) они связаны с  $j_I$  и  $j_\theta$ , которые включают в себя две пространственных производных и потому пропорциональны  $(mR)^{-2}$ .

Чтобы получить второй порядок ЭТП, нам достаточно решить уравнения для  $\delta I$  и  $\delta \theta$  в главном порядке. В этом случае производные по времени в уравнениях (2.48) можно заменить на  $\partial_t \approx (\partial_t \bar{\theta}) \partial_{\bar{\theta}}$ , поскольку  $\bar{\theta}$  растёт почти линейно на протяжении периода осцилляций. Также мы можем разложить  $\Omega - \langle \Omega \rangle \approx \delta I \cdot \partial_{\bar{I}} \Omega$  и пренебречь быстроосциллирующими возмущениями в источниках  $j_\theta$  и  $j_I$ . Это даёт

$$\delta I \approx \frac{\mathcal{I}[j_\theta(\bar{I}, \bar{\theta})]}{\partial_t \bar{\theta}}, \quad \delta \theta \approx \frac{1}{\partial_t \bar{\theta}} \left\{ \partial_{\bar{I}} \Omega(\bar{I}) \mathcal{I}[\delta I(\bar{I}, \bar{\theta})] - \mathcal{I}[j_I(\bar{I}, \bar{\theta})] \right\}, \quad (2.49)$$

где мы ввели первообразную для функций с нулевым средним на окружности  $\bar{\theta}$ :

$$\mathcal{I}[f] = \int_0^{\bar{\theta}} f(\bar{\theta}') d\bar{\theta}' - \left\langle \int_0^{\bar{\theta}} f(\bar{\theta}') d\bar{\theta}' \right\rangle, \quad \text{так что} \quad \langle \mathcal{I}[f] \rangle = \langle f \rangle = 0. \quad (2.50)$$

В дальнейшем средние по периоду  $\langle \cdot \rangle$  будут вычисляться как интегралы по  $\bar{\theta}$ , ср. с выражением (2.9).

---

<sup>24</sup>Отметим, что  $j_\theta$  антисимметрична по  $t$  и потому имеет нулевое среднее по периоду:  $\langle j_\theta \rangle = 0$ .

Примечательно, что уравнения (2.49) выражают возмущения через (пока что) произвольные «медленные» поля  $\bar{I}(t, \mathbf{x})$  и  $\bar{\theta}(t, \mathbf{x})$ . Раскладывая действие (2.46) по  $\delta I$  и  $\delta\theta$  и подставляя эти выражения, мы получаем эффективное действие второго порядка

$$\mathcal{S} \approx \mathcal{S}_{\text{eff}}^{(1)} + \mathcal{S}_{\text{eff}}^{(2)}, \quad (2.51)$$

где  $\mathcal{S}_{\text{eff}}^{(1)}[\bar{I}, \bar{\theta}]$  — действие в главном порядке ЭТП, приведённое в формуле (2.11), а поправка равна

$$\mathcal{S}_{\text{eff}}^{(2)}[\bar{I}, \bar{\theta}] = \int dt d^d \mathbf{x} \left[ \frac{1}{\partial_t \bar{\theta}} \langle j_I \mathcal{I}[j_\theta] \rangle - \frac{\partial_{\bar{I}} \Omega}{2(\partial_t \bar{\theta})^2} \langle (\mathcal{I}[j_\theta])^2 \rangle \right]. \quad (2.52)$$

Её подробный вывод приведён в Приложении В.3.1. Стоит отметить, что  $j_\theta$  и  $j_I$  в этом выражении уже зависят от  $\bar{I}$  и  $\bar{\theta}$ .

Сделаем три важных наблюдения. Во-первых, интеграл по времени в действии, в сущности, усредняет лагранжиан по периоду осцилляций. Это может быть сделано путём интегрирования по  $\bar{\theta}$ , поэтому, как и при выводе главного порядка ЭТП, мы явно усреднили по периоду каждый член выражения (2.52). Вследствие такого усреднения ЭТП второго порядка всё ещё инвариантна относительно сдвиговой симметрии  $\bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} + \alpha$ . Как следствие, сохраняется заряд

$$N = \int d^d \mathbf{x} \left[ \bar{I} + \frac{\delta \mathcal{S}_{\text{eff}}^{(2)}}{\delta(\partial_t \bar{\theta})} \right], \quad (2.53)$$

ср. с (2.15). Это вновь гарантирует, что стационарный анзац  $\bar{\theta} = \omega t$  и  $\bar{I} = \bar{I}(\mathbf{x})$  проходит через эффективные уравнения поля, а нетопологические солитоны — осциллоны — существуют во втором порядке ЭТП.

Во-вторых, поправка (2.52) содержит  $\partial_t \bar{\theta}$  в знаменателе, так что ЭТП работает для осциллонов с  $\omega \sim m$ , но не для статических полей. В третьих, в каждом члене  $\mathcal{S}_{\text{eff}}^{(2)}$  имеется по четыре пространственных производных от  $\bar{I}$  и  $\bar{\theta}$ : они спрятаны внутри  $j_\theta$  и  $j_I$ . Можно их явно увидеть: для этого надо подставить источники (2.48), раскрыть производные  $\Delta \Phi(\bar{I}, \bar{\theta})$ , вынести плавно меняющиеся величины  $\partial_i \bar{I}$  и  $\partial_i \bar{\theta}$  из-под усреднения по периоду и проинтегрировать оставшиеся коэффициенты эффективного лагранжиана по  $\bar{\theta}$ . В Приложении В.3.1 мы проводим это вычисление для осциллонного решения

с  $\partial_i \bar{\theta} = 0$  и  $\bar{I} = \psi^2(\mathbf{x})$ . Результат равен

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{eff}}^{(2)} &= - \int dt F^{(2)}, \\ F^{(2)} &= - \int d^d \mathbf{x} [d_1 (\partial_i \psi)^4 + d_2 \psi \Delta \psi (\partial_i \psi)^2 + d_3 (\Delta \psi)^2], \end{aligned} \quad (2.54)$$

где  $(-F^{(2)})$  — поправка к лагранжиану, а формфакторы  $d_i$  зависят от  $\psi^2$ . К примеру,

$$d_3(\psi^2) = \frac{4\bar{I}}{\omega} \langle (\partial_{\bar{I}} \Phi)^2 \mathcal{I}[\partial_{\bar{\theta}} \Phi \partial_{\bar{I}} \Phi] \rangle - \frac{2\bar{I}}{\omega^2} \partial_{\bar{I}} \Omega \langle (\mathcal{I}[\partial_{\bar{\theta}} \Phi \partial_{\bar{I}} \Phi])^2 \rangle \Big|_{\bar{I}=\psi^2}, \quad (2.55)$$

а выражения для остальных коэффициентов приведены в Приложении В.3.1. В любой наперёд заданной модели функция  $\Phi(\bar{I}, \bar{\theta})$  в том или ином виде известна, поэтому применение формулы (2.55) заключается в многократном взятии интегралов по  $\bar{\theta}$ . Аналитические выражения для  $d_i(\psi^2)$  в модели (2.2) получены в Приложении В.3.2.

Как и раньше, мы находим профиль осциллона  $\bar{I} \equiv \psi^2(\mathbf{x})$ ,  $\bar{\theta} = \omega t$ , экстремизируя (минус) лагранжиан

$$F = F^{(1)} + F^{(2)} = E - \omega N, \quad (2.56)$$

где главный вклад  $F^{(1)}[\bar{I}]$  и поправка  $F^{(2)}[\bar{I}]$  даются выражениями (2.23) и (2.54) соответственно.<sup>25</sup> Отметим, что вышеуказанный профиль может быть вычислен по теории возмущений. А именно, будем искать его в виде  $\bar{I} = \bar{I}^{(1)} + \bar{I}^{(2)}$ , где  $\bar{I}^{(1)}$  экстремизирует  $F^{(1)}$  и потому является решением уравнения (2.22). В этом случае малая поправка  $\bar{I}^{(2)}$  удовлетворяет линейному уравнению на фоне решения  $\bar{I}^{(1)}$ :

$$\frac{\delta^2 F^{(1)}}{\delta \bar{I}^2} \cdot \bar{I}^{(2)} = - \frac{\delta F^{(2)}}{\delta \bar{I}}. \quad (2.57)$$

После нахождения  $\bar{I}^{(2)}$  мы можем восстановить осциллирующее поле  $\varphi$  осциллона с лучшей точностью:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \Phi(\bar{I} + \delta I(\bar{I}, \omega t), \omega t + \delta \theta(\bar{I}, \omega t)), \quad (2.58)$$

где было использовано выражение (2.5). В последнем равенстве  $\delta I$  и  $\delta \theta$  даются формулами (2.49), а  $\bar{I}$  есть сумма  $\bar{I}^{(1)}$  и  $\bar{I}^{(2)}$ .

<sup>25</sup>Последнее равенство в (2.56) следует из общего выражения для энергии  $E = F - \int d^d \mathbf{x} (\partial_t \bar{\theta}) \frac{\delta F}{\delta(\partial_t \bar{\theta})}$  и уравнения (2.53).

Проиллюстрируем нахождение поля осциллона во втором порядке эффективной теории. Для этого численно решим уравнения на  $\bar{I}^{(1)}(x)$  и  $\bar{I}^{(2)}(x)$  в модели (2.2) при  $d = 1$ , используя формфакторы  $d_i$  эффективной теории из Приложения В.3.2. Результат для поля (2.58) осциллона с частотой  $\omega = 0.91$  показан сплошной линией на Рис. 2.4а. Как и ожидалось, он ближе к точному численному результату (кружочки), чем предсказания первого порядка ЭТП (пунктирная линия).

Стоит отметить, что несоответствие между производной  $\partial_t \varphi$  и каноническим импульсом осциллона  $\pi_\varphi \approx \partial_t \varphi$ , о котором шла речь в начале раздела 2.4.2, уменьшается во втором порядке ЭТП. Действительно, дифференцируя по времени уравнение (2.58) и используя уравнения (2.49) и (2.22), можно увидеть, что  $\partial_t \varphi$  теперь отличается на член порядка  $O(mR)^{-4}$  от импульса  $\pi_\varphi$ , вычисленного по формуле (2.5). Напомним, что в главном порядке ЭТП  $\partial_t \varphi - \pi_\varphi \sim O(mR)^{-2}$ ; таким образом, высшие порядки ЭТП последовательно увеличивают точность совпадения этих величин.

Примечательно, что энергию  $E(\omega)$  и заряд  $N(\omega)$  осциллона можно вычислить во втором порядке эффективной теории, не используя поправку к профилю  $\bar{I}^{(2)}$ . Действительно, найденный профиль главного порядка  $\bar{I}^{(1)}$  экстремизирует  $F^{(1)}$ , так что

$$F[\bar{I}^{(1)} + \bar{I}^{(2)}] = F^{(1)}[\bar{I}^{(1)}] + F^{(2)}[\bar{I}^{(1)}] + O(\bar{I}^{(2)})^2 + O(\delta_{\bar{I}} F^{(2)} \bar{I}^{(2)}), \quad (2.59)$$

где оба последних слагаемых меньше, чем следующая поправка к эффективному действию, содержащая шесть производных. Таким образом, «свободную энергию» второго порядка можно вычислять как значение функционала  $F$  на  $\bar{I}^{(1)}$ . После этого формулы (2.24) и (2.56) дают остальные параметры осциллона

$$N = -\partial_\omega F[\bar{I}^{(1)}], \quad E = F[\bar{I}^{(1)}] + \omega N. \quad (2.60)$$

Эти формулы тоже не используют  $\bar{I}^{(2)}$ . На практике производная по  $\omega$  берётся численно.

Заряды  $N(\omega)$  и энергии  $E(\omega)$  осциллонов во втором порядке ЭТП в модели (2.2) показаны сплошными линиями на Рис. 2.3б и 2.5. Они ближе к результатам численных симуляций точных уравнений (т.е. к кружочкам), чем предсказания главного порядка ЭТП (пунктирные линии). При этом точность совпадения существенно выше при  $\omega \approx 1$  и в меньшем числе измерений.

Завершим этот раздел замечанием, что следующие поправки к ЭТП могут быть посчитаны таким же образом, как и поправка второго порядка. Для этого надо получить быстроосциллирующие возмущения  $\delta I$  и  $\delta\theta$  в нужном порядке и подставить их в разложенное до того же порядка действие. Например, в третьем порядке надо разбить возмущения  $\delta I = \delta I^{(2)} + \delta I^{(3)}$  и  $\delta\theta = \delta\theta^{(2)} + \delta\theta^{(3)}$  на главные части  $\delta I^{(2)}$ ,  $\delta\theta^{(2)} \sim O(mR)^{-2}$ , полученные в формуле (2.49), и ещё меньшие поправки  $\delta I^{(3)}$ ,  $\delta\theta^{(3)} \sim O(mR)^{-4}$ . Последние, в свою очередь, можно найти, решая уравнения (2.47) по теории возмущений. Получающиеся выражения будут содержать квадраты источников, т.е. четыре производных. Подставляя решения для возмущений в действие (2.46), можно получить следующую поправку к лагранжиану, содержащую шесть пространственных производных. Её тоже необходимо усреднить, т.е. проинтегрировать по периоду  $\bar{\theta}$ . Это гарантирует, что сдвиг  $\bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} + \alpha$  остаётся симметрией эффективного действия любого порядка.

## 2.7 Сравнение с разложением по амплитуде поля и автоматизация

Мы уже показали в Разделе 2.4, что размер осциллона  $R$  растёт, а амплитуда  $I_0$  уменьшается, когда его частота  $\omega$  приближается к массе поля  $m$ . Как функции малого параметра  $\kappa^2 = m^2 - \omega^2$ , эти величины масштабируются как  $R \sim O(\kappa^{-1})$ ,  $I_0 \sim O(\kappa^2)$  и  $\varphi \sim O(\kappa)$ . Поэтому в пределе  $\kappa \rightarrow 0$  применимы и эффективная теория поля, и пертурбативное разложение по малой амплитуде поля.

У настоящего раздела есть две цели. С одной стороны, мы покажем, что все результаты пертурбативного разложения могут быть восстановлены из ЭТП переразложением эффективного действия по величине поля до соответствующего порядка. С другой стороны, мы увидим, что при построении ЭТП длинные пертурбативные ряды можно находить символьно, так что их последующее численное суммирование позволит реализовать эффективную теорию в произвольной модели.

Помня про эти цели, рассмотрим скалярный потенциал  $V(\varphi)$  общего вида (2.38) в безразмерных единицах с  $m = 1$ . Построение ЭТП стартует с введения механических переменных действие–угол для нелинейного осциллятора с потенциалом  $V(\varphi)$ . Соответствующее каноническое преобразование

может быть получено в виде ряда по полужелым степеням действия,

$$\begin{aligned}\Phi &= \sqrt{2I} \cos \theta + (2I)^{3/2} \frac{g_3}{32} [\cos(3\theta) - 6 \cos \theta] + \dots, \\ h &= I + \frac{3}{8} g_3 I^2 + \gamma_3 I^3 + \dots,\end{aligned}\quad (2.61)$$

где точки обозначают вклады высших порядков,  $g_i$  — коэффициенты потенциала (2.38), и мы ввели  $\gamma_3 \equiv \frac{5}{12} g_5 - \frac{17}{64} g_3^2$ . Вспомним также, что  $\Omega = \partial_I h$  и  $\Pi = \Omega \partial_\theta \Phi$ . Представление (2.61) позволяет вычислить все интегралы по  $\theta$  в формфакторах ЭТП. В частности, выражения (2.10) и (2.55) дают

$$\frac{1}{\mu_I} = \frac{1}{4I} - \frac{9}{16} g_3 + O(I), \quad d_3 = \frac{1}{8\omega} + O(I), \quad (2.62)$$

В этом разделе мы для упрощения обозначений опускаем черту над  $I$  и  $\theta$ : теперь эти переменные обозначают медленно меняющиеся поля эффективной теории. Ряды для формфакторов ЭТП, подобные (2.62), могут быть сделаны сколь угодно длинными с помощью символьных вычислений и длинных рядов для  $\Phi$  и  $h$ .

Теперь получим из ЭТП разложение по малой амплитуде поля осциллона с  $I = \psi^2(\mathbf{x})$ ,  $\theta = \omega t$ . Для этого подставим ряды (2.62) в эффективный лагранжиан второго порядка (2.23), (2.54) и переставим члены в соответствии с их порядком по параметру  $\kappa \ll 1$ :

$$\begin{aligned}F^{(1)} + F^{(2)} &= \int d^d \mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2} (\partial_i \psi)^2 + \frac{\kappa^2}{2} \psi^2 + \frac{3}{8} g_3 \psi^4 \right. \\ &\quad \left. - \frac{9}{8} g_3 \psi^2 (\partial_i \psi)^2 + \frac{\kappa^4}{8} \psi^2 + \gamma_3 \psi^6 - \frac{1}{8} (\Delta \psi)^2 + O(\kappa^8) \right\}. \quad (2.63)\end{aligned}$$

Здесь первая и вторая строка имеют порядок  $O(\kappa^4)$  и  $O(\kappa^6)$ , соответственно, поскольку  $\psi = O(\kappa)$ ,  $\partial_i \psi \sim O(\kappa^2)$ , и  $1 - \omega \approx \kappa^2/2 + \kappa^4/8$ . Как и раньше, профиль осциллона может быть найден варьированием функционала (2.63) по  $\psi(\mathbf{x})$ . Однако теперь мы будем решать полученное уравнение пертурбативно по  $\kappa$ . Иными словами, будем искать решение в виде

$$\psi = \frac{\kappa}{\sqrt{2}} p_1(\mathbf{x}) + \frac{\kappa^3}{4\sqrt{2}} [4p_3(\mathbf{x}) - p_1(\mathbf{x})] + O(\kappa^5), \quad (2.64)$$

где  $p_1$  и  $p_3$  контролируют вклады первого и второго порядков, соответственно. Эффективное уравнение поля в первых двух порядках имеет вид:

$$\kappa^{-2} \Delta p_1 - p_1 - \frac{3}{4} g_3 p_1^3 = 0, \quad \kappa^{-2} \Delta p_3 - p_3 - \frac{9}{4} g_3 p_1^2 p_3 = \left( \frac{5g_5}{8} + \frac{3g_3^2}{128} \right) p_1^5. \quad (2.65)$$

Отметим, что уравнения (2.65) буквально совпадают с уравнениями низкоамплитудного разложения в работе [37]. Поле осциллона может быть найдено разложением выражения (2.58) по  $\kappa$ :

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = (\kappa p_1 + \kappa^3 p_3) \cos(\omega t) + \frac{g_3}{32} (\kappa p_1)^3 \cos(3\omega t) + O(\kappa^5), \quad (2.66)$$

что вновь согласуется с [37]. Наконец, разложения  $E(\omega)$  и  $N(\omega)$  по степеням  $\kappa^2 = 1 - \omega^2$  получаются из уравнений (2.63), (2.64) и (2.53).

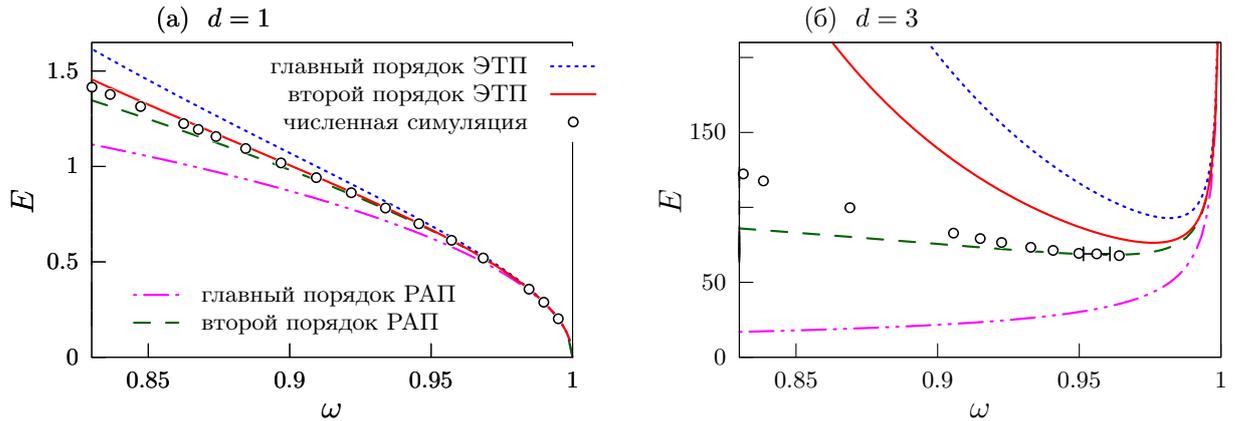


Рис. 2.7: Энергии осциллонов  $E(\omega)$  модели (2.2), предсказанные двумя порядками ЭТП (частая пунктирная и сплошная линии) и двумя порядками нерелятивистского разложения по амплитуде поля (РАП, точно-пунктирная и редкая пунктирная линии). Теоретические предсказания сравнены с точными численными симуляциями (кружочки с погрешностями). Рисунки (а) и (б) отвечают  $d = 1$  и 3 пространственным измерениям, соответственно.

Стоит напомнить, что ЭТП не эквивалентна разложению по амплитуде поля даже при  $\omega \approx 1$ . Действительно, у этих методов разные параметры разложения:  $R^{-1} \rightarrow 0$  при конечном  $\varphi$  (ЭТП) и  $R^{-1} \sim \varphi \rightarrow 0$  (низкоамплитудное разложение). Чтобы сравнить эти приближения, мы решили уравнения (2.65) в модели (2.2) и получили энергии осциллонов  $E(\omega)$  в первых двух порядках разложения по амплитуде поля (РАП). На Рис. 2.7а и 2.7б мы сравниваем эти результаты (пунктирная и штрих-пунктирная линии) с предсказаниями главного и второго порядков ЭТП (точечная и сплошная линии), а также с результатами численных симуляций точного уравнения поля (кружочки с «усами» погрешностей). Мы рассматриваем случаи  $d = 1$  и 3 пространственных измерений. Видно, что ЭТП работает лучше при меньшем  $d$ , но становится менее точной, чем разложение по малой амплитуде при  $d = 3$ . С другой стороны,

даже в главном порядке эффективная теория поля качественно правильно предсказывает две — стабильную и нестабильную — ветви трёхмерных осциллонов [ср. критерий (2.40)]. Пертурбативное разложение ошибочно предсказывает нестабильность всех трёхмерных осциллонов в главном порядке, но становится более точным в высших порядках. Мы ожидаем, что эти свойства останутся справедливыми в других моделях общего вида.

## 2.8 Обсуждение результатов

В данной Главе мы разработали последовательное описание скалярных осциллонов произвольной амплитуды в пределе большого пространственного размера с помощью классической эффективной теории поля (ЭТП). Основной трюк нашего метода состоит в каноническом преобразовании от исходного поля  $\varphi$  и импульса  $\partial_t\varphi$  к длинноволновым переменным  $\psi(t, \mathbf{x})$  и  $\psi^*(t, \mathbf{x})$ . Мы показали, что классическое эффективное действие для медленно меняющихся частей  $\psi$  и  $\psi^*$  имеет вид систематического градиентного разложения, где в каждом порядке появляется всё больше пространственных производных. Единственным параметром разложения является  $(mR)^{-2}$ , где  $m$  — масса поля, а  $R$  — характерный пространственный масштаб. В любом порядке разложения эффективное действие обладает глобальной  $U(1)$ -симметрией  $\psi \rightarrow \psi e^{-i\alpha}$ , что обеспечивает существование семейства нетопологических солитонов — осциллонов. В полной теории скалярного поля  $U(1)$ -симметрия нарушена непертурбативными по отношению к ЭТП эффектами. Поэтому осциллоны большого размера в конце концов распадаются, но можно ожидать, что их времена жизни экспоненциально велики по  $(mR)^2 \gg 1$ .

Примечательно, что все известные на настоящий момент осциллоны имеют размер  $R$ , превышающий обратную массу поля  $m^{-1}$  в несколько раз или даже параметрически [17, 37, 79, 83] — по крайней мере, исключения из этого правила автору неизвестны. Таким образом, сохранение  $U(1)$ -заряда [41, 42] в ЭТП может играть роль универсального механизма, гарантирующего долговечность осциллонов.

Важно, что ЭТП позволяет получить условия на скалярный потенциал  $V(\varphi)$ , необходимые для существования долгоживущих осциллонов. Мы сформулировали эти условия в терминах воображаемого нелинейного осциллятора  $\varphi(t)$  с потенциалом  $V(\varphi)$ , или, если быть точнее, в терминах частоты его

колебаний  $\Omega(I)$  как функции амплитуды  $I$  — переменной действия этой механической системы. Стационарные солитоны, т.е. осциллоны, существуют в эффективной теории только если  $\Omega(I_0) < t$  для некоторой амплитуды  $I_0$ ; полный список условий приведён в неравенствах (2.31) и (2.32). Более того, размер осциллонов большой, и они долгоживущие, если механическая частота почти не зависит от амплитуды колебаний:  $|\partial_I \Omega| \ll \Omega/I$  при  $I \leq I_0$ , см. условие (2.36). Грубо говоря, данные условия означают, что потенциал  $V(\varphi)$  — притягивающий и почти квадратичный, см. [17, 84]. Наконец, осциллоны стабильны относительно длинноволновых линейных возмущений,<sup>26</sup> если выполняется критерий Вахитова–Колоколова (2.40).

Мы обрисовали два очевидных способа удовлетворить всем требованиям. Во-первых, они всегда выполняются<sup>27</sup> в пределе слабого поля  $I \rightarrow 0$ , если потенциал  $V(\varphi)$  — гладкий и притягивающий, см. обсуждение формулы (2.38). В этом случае (пертурбативное) разложение по малой амплитуде [37, 93–95] применимо наравне с ЭТП. Во-вторых, условия ЭТП выполняются, если  $V = \tilde{\Omega}^2 \varphi^2/2$ , а функция  $\tilde{\Omega}(\varphi)$  — почти константа в смысле Раздела 2.4.2. Данный случай включает в себя, в частности, потенциалы монодромии  $V \propto \varphi^n$  с  $n \approx 2$ . Примечательно, что в моделях с такими потенциалами были найдены чрезвычайно долгоживущие осциллоны большой амплитуды [17, 83]. Мы их подробно изучим в Главе 4.

Следует отметить, что вышеприведённые варианты не исчерпывают все способы удовлетворить условиям ЭТП. На практике можно сначала подобрать подходящую функцию  $\Omega(I)$  и затем восстановить потенциал  $V(\varphi)$  по формуле (2.37). Это будет гарантировать существование долгоживущих осциллонов в построенной модели. В частности,  $\Omega(I)$  может быть почти константой в каком-то диапазоне амплитуд  $I$  или даже иметь минимум при некотором значении. В таком случае скорость испарения осциллонов будет немонотонно зависеть от амплитуды и частоты. Похожие немонотонные эффекты наблюдались численно в работах [16, 17, 84], и некоторые из них могут соответствовать описанным свойствам  $\Omega(I)$ .

В моделях с нетривиальным потенциалом вычисление эффективного

---

<sup>26</sup>Также отметим, что параметрический распад на высокочастотные моды подавлен, если выполняются условия ЭТП, см. Раздел 2.4.2.

<sup>27</sup>Напомним, что осциллоны малой амплитуды стабильны только в  $d \leq 2$  пространственных измерениях, см. Раздел 2.5.

действия может показаться технически непреодолимой задачей. Но в действительности эта процедура может быть автоматизирована с помощью компьютерной алгебры. Как мы показали в разделе 2.7, каноническое преобразование к полям  $\psi$ ,  $\psi^*$  и все коэффициенты в эффективном действии могут быть вычислены символично в виде длинных степенных рядов, которые затем могут быть просуммированы численно. Этот символичный подход можно использовать при построении эффективной теории для осциллонов в многополевых моделях, например, для описания векторных осциллонов [85].

В данной главе мы устроили множество тестов эффективной теории. Во-первых, мы показали, что стандартное низкоамплитудное разложение воспроизводится из ЭТП разложением эффективного действия по степеням поля, см. Раздел 2.7. Во-вторых, мы сравнили предсказания эффективной теории с точными численными вычислениями в модели с плоским потенциалом (2.2). Как и ожидалось, ЭТП становится более точной, когда осциллоны имеют большие размеры и времена жизни.

Ещё одна интересная и нерешённая задача состоит в описании излучения осциллонов и вычислении его потока при конечной амплитуде поля и  $mR \rightarrow \infty$ . В разделе 2.5 мы численно подтвердили, что поток излучения экспоненциально мал по параметру ЭТП  $\eta \sim (mR)^{-1} \ll 1$ . Аналитическое вычисление времени жизни осциллона, как мы уже говорили, должно быть непертурбативным по отношению к эффективной теории. Возможно, это удастся сделать, извлекая экспоненциально малые, лежащие за пределами ЭТП, части осциллонных решений с помощью комплексного анализа, как это было сделано в пределе малых амплитуд [38, 39, 95, 99].

## Глава 3

# Осциллоны в пределе нулевого количества измерений

### 3.1 Введение. Зависимость времени жизни осциллона от размерности пространства.

В Главе 2 мы изучали осциллоны в различном числе измерений и построили эффективную теорию для их описания. При сравнении теоретических предсказаний с численными симуляциями на рисунках 2.5а–в заметно, что эффективная теория работает значительно лучше в меньшем числе измерений. Действительно, при  $d = 3$  точные результаты воспроизводятся лишь на качественном уровне, но при  $d = 1$  теоретическое описание становится почти точным в заметном диапазоне частот.

Это — не единственное наблюдение, которое можно сделать о влиянии размерности пространства на свойства осциллонов. Считается [100], что осциллоны чаще встречаются в низкоразмерных моделях, а при  $d \geq 4$  они, напротив, крайне редки. Более того, как правило, осциллоны живут дольше в пространстве меньшего числа измерений  $d$ . Это видно и в модели (2.2): на Рис. 3.1 сравниваются скорости распада  $\Gamma = |\partial_t E/E|$  одномерных и трёхмерных осциллонов. Видно, что за исключением узкой области около  $\omega \approx 0.82$ , испарение одномерных осциллонов происходит на несколько порядков медленнее, чем трёхмерных.

В данной Главе мы постараемся дать объяснение зависимости свойств осциллонов от размерности пространства. Заметим, что  $d$  входит в уравнения на сферически симметричные поля  $\psi(r)$  и  $\varphi(r)$  как параметр. Поэтому мы можем проводить все вычисления даже при нецелом  $d$ . В следующем разделе мы увидим, что в формальном пределе  $d \rightarrow 0$  существуют точные периодические решения нелинейных уравнений поля — «ноль-мерные осциллоны».

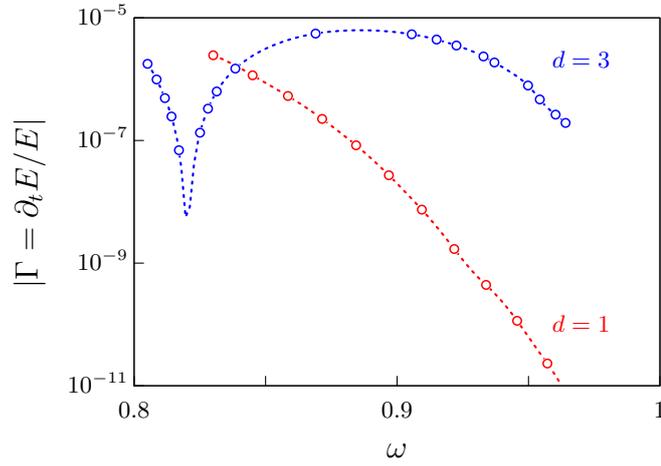


Рис. 3.1: Скорость распада  $\Gamma(\omega) = |E^{-1}\partial_t E|$  осциллонов в  $d = 1$  и  $3$  пространственных измерениях в модели (2.2). Пунктирные линии приведены для наглядности, они интерполируют между кружочками, демонстрирующими численные данные.

### 3.2 Точные периодические решения при $d = 0$

Аналитически продолжим уравнение на сферически симметричное поле

$$\partial_t^2 \varphi - \partial_r^2 \varphi - \frac{d-1}{r} \partial_r \varphi = -V'(\varphi) \quad (3.1)$$

на случай дробного числа пространственных измерений  $d$ . Мы будем накладывать условие регулярности  $\partial_r \varphi = 0$  в начале координат  $r = 0$ . Последнее требование гарантирует, что при малых  $r$  поле имеет вид  $\varphi = \varphi_0(t) + \varphi_2(t) r^2 + O(r^4)$ . Подставляя это разложение в уравнение (3.1) и беря  $r = 0$ , получим уравнение на первые два коэффициента разложения в центре:

$$\partial_t^2 \varphi_0 - 2\varphi_2 d = -V'(\varphi_0) . \quad (3.2)$$

Видно, что при  $d = 0$  поле  $\varphi_0(t)$  в центре координат удовлетворяет механическому уравнению, которое вообще не зависит от остальной полевой конфигурации. Это согласуется с интуитивной интерпретацией ноль-мерного поля как механического маятника  $\varphi_0(t)$ , колеблющегося в потенциале  $V(\varphi)$ . Маятник накладывает периодические по времени граничные условия Дирихле  $\varphi(t, 0) = \varphi_0(t)$  на остальное поле. Тогда последнее вне зависимости от начальных данных должно с течением времени прийти к стационарному решению, осциллирующему с периодом внешней силы  $\varphi_0(t)$ . Мы заключаем, что при

$d = 0$  существует вечно живущее точно периодическое решение, которое можно рассматривать как прототип низкоразмерных осциллонов.

Продemonстрируем, что периодическое решение существует, численно решив<sup>28</sup> уравнение (3.1) при  $d = 0$  в модели (2.2). Как и раньше, в качестве начальной конфигурации возьмём приближённый профиль, полученный из эффективной теории при  $d = 0$  и, скажем,  $\omega = 0.65$ . После стадии нерегулярных болтаний решение входит в стационарный режим с точным периодом  $2\pi/\omega$  и остаётся в нём до конца численных вычислений, как продемонстрировано на Рис. 3.2.

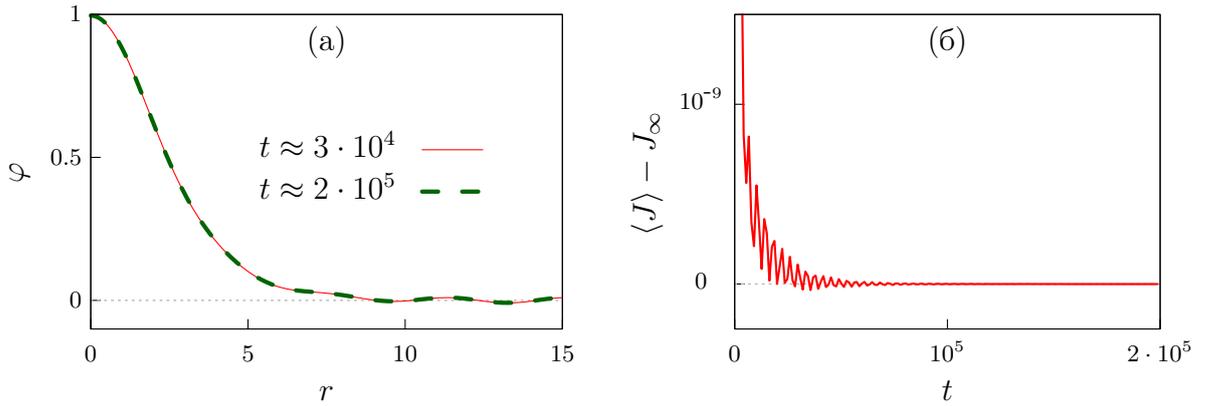


Рис. 3.2: Численное решение уравнения (3.1) при  $d = 0$  в модели (2.2). В качестве стартовой конфигурации использован осциллон в эффективной теории с частотой  $\omega = 0.65$  и амплитудой  $\varphi(0, 0) \approx 1$ . (а) Полевые конфигурации  $\varphi(t, r)$  при существенно разных значениях времени, соответствующих максимальной амплитуде поля в центре,  $\partial_t \varphi(t, 0) = 0$ . (б) Поток энергии  $\langle J \rangle = -r^{-1} \langle \partial_t \varphi \partial_r \varphi \rangle$  при  $r = 50$ , усреднённый по нескольким периодам осцилляций; мы вычли асимптотическое значение  $\langle J \rangle \rightarrow J_\infty \approx 1.0088 \cdot 10^{-5}$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Теперь разберёмся, что происходит в пределе  $d \rightarrow 0$  с интегральными величинами, например, с энергией (2.42). Запишем элемент объёма как  $d^d \mathbf{x} = S_{d-1} (\mu r)^d dr/r$ , где  $S_{d-1} = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$  — площадь единичной сферы, а масштаб  $\mu$  введён для восстановления размерности подинтегрального выражения. Заметим, что в ноль-мерном пределе  $S_{d-1} \rightarrow 0$ . Однако при интегрировании по объёму это компенсируется логарифмической расходимостью интеграла по радиусу при  $r \rightarrow 0$ , которая возникает в случае  $d = 0$ . В резуль-

<sup>28</sup>На практике мы решаем уравнение (2.43) с дополнительным членом, поглощающим исходящее излучение. При  $d = 0$  эта модификация качественно влияет на эволюцию, не позволяя излучаемым волнам расти при  $r \rightarrow \infty$  и исключая связанные с этим нелинейные эффекты.

тате основной вклад во все интегралы по объёму вносит поле вблизи центра. В частности, энергия (2.42) принимает вид

$$E = E_0 + E_1 d + O(d^2), \quad E_0 = (\partial_t \varphi_0)^2 / 2 + V(\varphi_0), \quad E_1 = \int_{\tilde{\epsilon}}^{\infty} \rho dr / r + E_0 \ln(c\mu\tilde{\epsilon}),$$

где  $\rho(r)$  — подынтегральное выражение в уравнении (2.42),  $c = e^{\gamma_E/2} \sqrt{\pi} \approx 2.37$  — число, включающее в себя постоянную Эйлера  $\gamma_E$ , а в последнем выражении подразумевается взятие предела  $\tilde{\epsilon} \rightarrow +0$ , который существует. Мы видим, что при малых  $d$  главный вклад даёт энергия осциллятора в центре, в то время как вклад остального поля  $E_1 d$  подавлен.

Следует отметить, что энергия поля  $E_1$  в глубине пространства удовлетворяет дифференциальному закону сохранения, остающемуся в силе при  $d = 0$ . В последнем случае из уравнения (3.1) следует, что  $\partial_t E_1 = J_0 - J$ , где  $J = -\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \partial_t \varphi \partial_r \varphi$  — поток энергии, излучённый на бесконечность, а  $J_0 = -\partial_t \varphi \partial_r^2 \varphi|_{r=0}$  — поток, приходящий от осциллятора в центре. На Рис. 3.2б изображён усреднённый по времени поток  $\langle J \rangle$ , который был вычислен для решения на Рис. 3.2а. После нескольких начальных флуктуаций он устремляется к постоянному значению  $J_\infty$ , что свидетельствует об установлении стационарного режима. Итак, точно периодическое решение устроено следующим образом: осциллятор в центре отправляет стационарный поток энергии  $O(d)$ , который проходит через полевую конфигурацию в глубине пространства и в конечном итоге уходит на бесконечность.

### 3.3 Выводы: описание осциллонов в низких размерностях

Вернёмся к эффективной теории поля. Теперь ясно, что она становится точной в пределе  $d \rightarrow 0$ . Действительно, мы ввели  $I$  и  $\theta$  как переменные действие–угол для механической системы с потенциалом  $V(\varphi)$ . При  $d = 0$  решение уравнений эффективной теории с  $I(0) = I_0$  и  $\theta = \omega t$  абсолютно точно описывает движения механического маятника  $\varphi_0(t)$ , находящегося в центре  $r = 0$ . Более того, уравнение (2.22) для профиля осциллона имеет вид  $\Omega(I_0) = \omega$  при  $r = 0$ , тем самым устанавливая частоту осциллона равной частоте механического маятника. В результате все поправки к главному порядку ЭТП связаны с остальной пространственной конфигурацией при  $r > 0$ ,

и они пропорциональны  $d$ . Это и есть причина повышения точности ЭТП в низкоразмерных моделях.

Проиллюстрируем вышесказанное в модели (2.2), сравнив точность предсказаний эффективной теории при  $d = 1$  с ещё более низкоразмерным случаем  $d = 0.5$ . На Рис. 3.3 изображена энергия осциллонов  $E(\omega)$  в зависимости от частоты, вычисленная в первых двух порядках ЭТП и численно в полной теории. Видно, что при  $d = 0.5$  результаты ЭТП уже в главном порядке практически идеально совпадают с энергиями настоящих осциллонов.

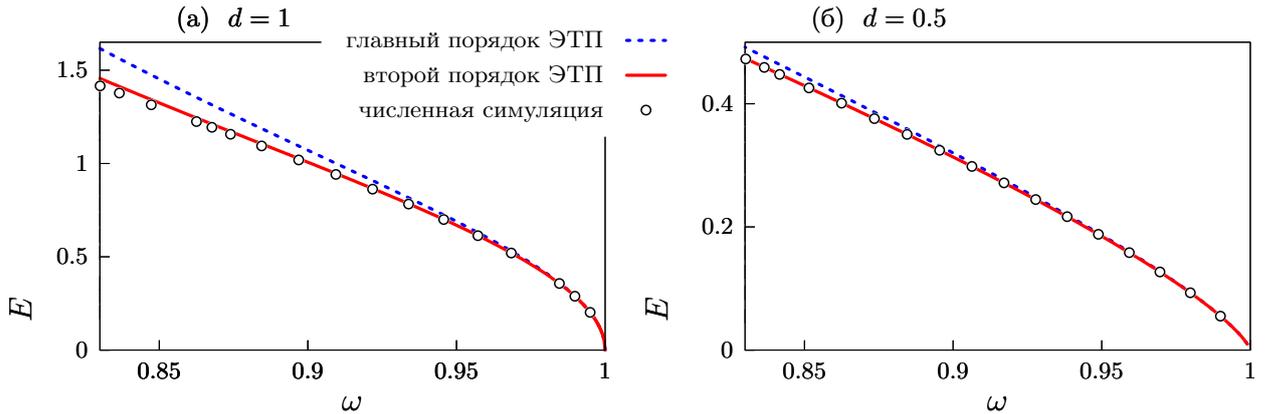


Рис. 3.3: Энергия  $E(\omega)$  осциллонов в пространстве с размерностью (а)  $d = 1$ , (б)  $d = 0.5$ . Главный и следующий за ним порядки ЭТП показаны пунктирными и сплошными линиями соответственно; результаты численных симуляций отмечены кружочками.

Напоследок отметим, что найденные точно периодические ноль-мерные осциллоны могут использоваться в качестве грубого приближения для осциллонов в пространствах низкой размерности. Это открывает возможность изучать такие объекты с помощью разложения по размерности пространства  $d$ . Такой подход может объяснить бóльшую распространённость осциллонов в низкоразмерных моделях [100] и увеличение их времени жизни при уменьшении размерности пространства  $d$  за счёт близости к точным периодическим решениям при  $d = 0$ .

## Глава 4

# «Ренормгрупповой» подход к осциллонам в модели монодромии

### 4.1 Введение. Модель монодромии

Рассмотрим модель монодромии с потенциалом<sup>29</sup>

$$V(\varphi) = \frac{1}{2p}(1 + \varphi^2)^p, \quad p \lesssim 1, \quad (4.1)$$

изображённым сплошной линией на Рис. 4.1. Данная модель часто используется в космологии, где  $\varphi$  может выступать как поле инфлатона [101–103] или как поле скалярной тёмной материи. Известно, что при  $p \approx 1$  осциллоны в теории (4.1) живут особенно долго — до  $10^{14}$  периодов — и обладают сильным полем  $|\varphi| \gg 1$ . В этом случае разложение по амплитуде поля, описанное в разделе 2.7, неприменимо. В разделе 2.4.2 мы подчёркивали, что построенная в Главе 2 эффективная теория поля (ЭТП) верна даже при сильных полях. Однако её применение является технически сложным. Действительно, отправная точка ЭТП — точное решение для механической частицы в полном нелинейном потенциале  $V(\varphi)$ . В модели (4.1) такое решение не может быть получено аналитически.

Поэтому в этой главе мы объединим упомянутые два подхода. С одной стороны, мы будем использовать тот факт, что потенциал монодромии может быть приближен параболой даже при больших  $\varphi \sim \varphi_0 \gg 1$ . Но это квадратичное приближение сильно отличается от степенного разложения вблизи вакуума, ср. сплошную и пунктирные линии на Рис. 4.1. Это означает, что скалярные частицы слабо взаимодействуют даже при сильных полях, но их «масса»  $\mu$  зависит от  $\varphi$ . Поэтому можно записать<sup>30</sup>

$$V(\varphi) = \mu^2 \varphi^2 / 2 + \delta V(\varphi), \quad \delta V \equiv V(\varphi) - \mu^2 \varphi^2 / 2, \quad (4.2)$$

<sup>29</sup>Как и в прошлых Главах, мы используем безразмерные переменные с массой  $m = 1$ . Размерности восстанавливаются перешкалировкой  $\varphi \rightarrow \varphi/F$ ,  $t \rightarrow mt$  и  $\mathbf{x} \rightarrow m\mathbf{x}$ , что даёт  $V = m^2 F^2 (1 + \varphi^2/F^2)^p / 2p$ .

<sup>30</sup>Сравни с разложением (2.38).

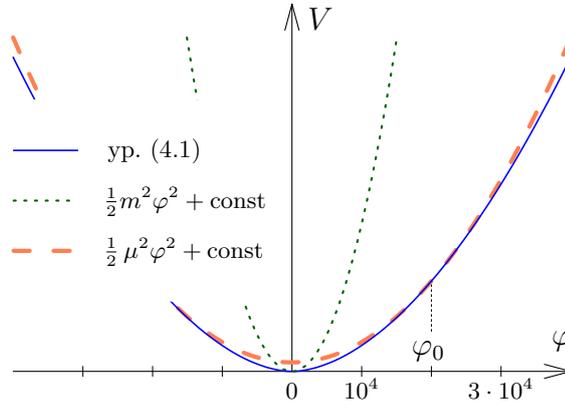


Рис. 4.1: Потенциал (4.1), его приближение при  $\varphi \sim \varphi_0$  главным членом разложения около вакуума и первым членом уравнения (4.2). Величина  $\varphi_0$  соответствует характерным значениям поля осциллона. График построен при  $p = 0.9$  и  $\varphi_0 = 2 \cdot 10^4 \gg 1$ .

где  $\mu \neq m = 1$ , и после этого считать<sup>31</sup>  $\delta V$  малой поправкой. Поскольку представление (4.2) является точным, то итоговый результат не должен зависеть от параметра  $\mu$ , который можно будет в конце вычисления сделать зависящим от амплитуды поля. Мы увидим, что этот «ренормгрупповой» трюк даёт колоссальное улучшение точности по сравнению с простым разложением по степеням поля. С другой стороны, слабость нелинейного самодействия означает, что связанные состояния поля — осциллоны — по-прежнему имеют большой размер. Поэтому, как и в прошлой главе, мы будем использовать разложение по обратному размеру осциллона.

Таким образом, параметрами разложения «упрощённой эффективной теории» данной Главы являются величины  $(\partial_i \varphi)^2 \ll m^2 \varphi^2$  и  $\delta V \ll m^2 \varphi^2$ .

## 4.2 Механический осциллятор с потенциалом монодромии

Для начала проиллюстрируем «ренормгрупповой» трюк на примере механического осциллятора с потенциалом (4.1). Результаты этого вычисления будут использованы при описании осциллонов в теории поля. Уравнение дви-

<sup>31</sup>В выражении (4.2) мы опустили постоянную добавку к потенциалу, которая не влияет на полевые уравнения.

жения осциллятора имеет вид

$$\partial_t^2 \varphi = -V'(\varphi) \equiv -\varphi (1 + \varphi^2)^{-\epsilon}, \quad \text{где } \epsilon \equiv 1 - p. \quad (4.3)$$

Оно не является точно решаемым. Однако при  $p \approx 1$  и  $\epsilon \ll 1$  потенциал (4.1) близок к квадратичному. Поэтому мы можем считать (4.3) близким к уравнению линейного осциллятора

$$\partial_t^2 \varphi = -\mu^2 \varphi - \delta V'(\varphi), \quad \text{где } \mu^2 = V'(\varphi_0)/\varphi_0 \equiv (1 + \varphi_0^2)^{-\epsilon}, \quad (4.4)$$

а  $\delta V$ , определённое соотношением (4.2), считать малым. Последнее равенство в формуле (4.4) устанавливает  $\mu^2$  равным кривизне потенциала на некотором масштабе  $\varphi_0$ , см. Рис. 4.1. Это и обеспечивает точность квадратичного приближения в широкой области  $\varphi \sim O(\varphi_0)$  и гарантирует малость нелинейности  $\delta V$ . В самом конце вычисления мы сделаем масштаб  $\varphi_0$  зависящим от амплитуды поля.

В нулевом порядке по  $\delta V$  решение уравнения (4.4) можно найти, перейдя к переменным действие–угол для линейного осциллятора:

$$\varphi = \sqrt{2I/\mu} \cos \theta, \quad \pi_\varphi \equiv \partial_t \varphi = -\sqrt{2I\mu} \sin \theta, \quad (4.5)$$

ср. с уравнением (2.5). В этом грубом приближении эволюция системы имеет вид  $I = \text{const}$  и  $\theta = \mu t$ .

Теперь учтём нелинейную поправку  $\delta V$ . Следуя рецепту Главы 2, перепишем для этого классическое действие через переменные  $I$  и  $\theta$ , подставив (4.5). Получим:

$$\mathcal{S} = \int dt [\pi_\varphi \partial_t \varphi - H] = \int dt [I \partial_t \theta - H(I, \theta)], \quad (4.6)$$

где полный гамильтониан системы равен

$$H = \frac{1}{2} \pi_\varphi^2 + V(\varphi) = \mu I + \delta V(I, \theta). \quad (4.7)$$

Повторим, что для нелинейной системы  $I$  и  $\theta$  уже не являются переменными действие–угол. Появление малой нелинейности приводит к их медленной эволюции (ср. раздел 2.3), а также может снабдить их малыми быстроосциллирующими добавками (ср. раздел 2.6). При построении эффективной теории нас интересует эволюция на больших временных интервалах. В этом случае интеграл в действии (4.7) усредняет быстро осциллирующую нелинейность

$\delta V \sim O(\epsilon)$ . Поскольку в приближённой линейной теории  $\theta = \mu t$ , то мы можем усреднение по времени явно записать в виде интеграла по  $\theta$ :

$$\delta V \rightarrow \langle \delta V \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \delta V(\theta) = \frac{1}{2p} (\mathcal{A}_p(\varsigma) - p\mu I), \quad (4.8)$$

где  $\varsigma = 2I/\mu$ ,

$$\mathcal{A}_p(\varsigma) \equiv \langle (1 + \varsigma \cos^2 \theta)^p \rangle = (1 + \varsigma)^{p/2} P_p \left( \frac{1 + \varsigma/2}{\sqrt{1 + \varsigma}} \right), \quad (4.9)$$

а  $P_p(x) \equiv {}_2F_1[-p, p+1; 1; (1-x)/2]$  — функция Лежандра.

Выражения (4.6), (4.7), и (4.8) дают классическое эффективное действие для эволюции осциллятора монодромии на больших временных интервалах. Пока что мы нашли его в главном порядке.

Теперь сделаем важный шаг: выберем «массу»  $\mu$  и соответствующий ей характерный масштаб  $\varphi_0$  в уравнении (4.3); до этого мы считали их произвольными. Важно отметить, что приближённое эффективное действие (4.6)–(4.8) зависит от  $\varphi_0$ , но очень слабо: вариация по этой переменной имеет следующий за главным порядок малости  $O(\delta V^2) \sim O(\epsilon^2)$ . Это неудивительно: в точной теории параметр  $\mu$  сокращается, и поэтому зависимость от него приближённого эффективного действия связана лишь отброшенными поправками следующего порядка, которые зависят от  $\mu$ . Если бы мы продолжили считать поправки до  $n$ -го порядка по  $\delta V$ , то зависимость получившегося действия от  $\mu$  и  $\varphi_0$  заключалась бы в членах  $O(\epsilon^{n+1})$ . Так как чувствительность к  $\varphi_0$  исчезает из эффективного действия порядок за порядком, мы вольны выбрать этот параметр любым способом, который уменьшит нелинейное возмущение  $\delta V$  и тем самым повысит точность разложения. Положим  $\varphi_0$  равным амплитуде колебаний, получив из уравнения (4.5) грубую<sup>32</sup> оценку

$$\varphi_0 = \sqrt{2I}. \quad (4.10)$$

Такой выбор означает, что эффективная «масса»  $\mu$  является «бегущей», т.е. медленно зависит от переменной действия:  $\mu = \mu(I)$ .

---

<sup>32</sup>Альтернативный подход к выбору  $\varphi_0$  заключается в решении уравнения  $\varphi_0^2 = 2I/\mu$ , где  $\mu$  по-прежнему даётся формулой (4.3). Этот способ слегка улучшает точность теоретических предсказаний при экстремально сильных полях  $\varphi$ , когда значение  $\mu$  оказывается значительно меньше 1.

Эффективное уравнение, описывающее эволюцию осциллятора на больших временных интервалах, может быть получено вариацией действия (4.6)–(4.8) по  $I(t)$  и  $\theta(t)$ . Оно имеет вид  $\partial_t I = 0$  и  $\partial_t \theta = \omega(I)$ , где

$$\omega = \mu + (\partial_\zeta \mathcal{A}_p / \mu p - 1/2) (\mu - I \partial_I \mu); \quad (4.11)$$

напомним, что  $\zeta = 2I/\mu$  и  $\partial_I \mu = -\epsilon(1 + \varphi_0^2)^{-\epsilon-1}$ . Полученное уравнение (4.11) даёт зависимость частоты колебаний нелинейного осциллятора от переменной действия  $\omega = \omega(I)$ .

Сравним предсказание эффективной теории (4.11) с точной частотой осцилляций  $\omega(I)$ . Последнюю мы находим, численно решая уравнение (4.3) и извлекая из решения частоту колебаний  $\omega = 2\pi/T$  и переменную действия  $I = \oint \pi_\varphi d\varphi / 2\pi$ . На рисунке 4.2 показано сравнение точного результата с эффективной теорией при  $p = 0.95$ . Видно, что относительная точность уравнения (4.11) остаётся высокой,  $\delta\omega/\omega \sim 10^{-4}$ , даже при очень больших амплитудах  $I \sim 10^{30}$ .

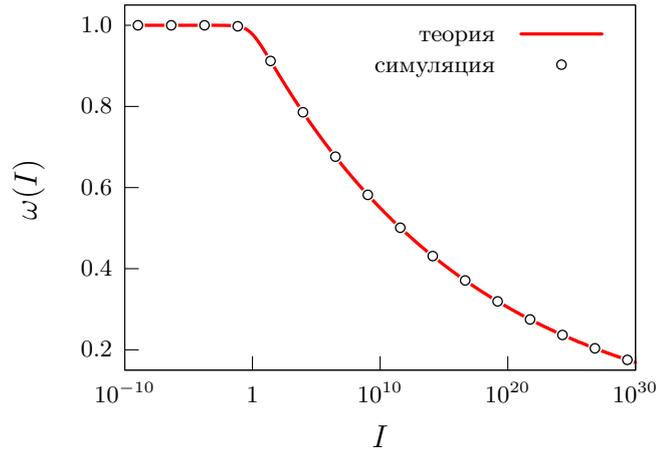


Рис. 4.2: Частота нелинейного осциллятора с потенциалом (4.1) и  $p = 0.95$  как функция переменной действия  $I$ . Линия показывает теоретическое предсказание (4.11), а результаты численных симуляций представлены кружочками.

Причина подобной точности связана с двумя факторами. Во-первых, мы правильно выбрали значения искусственно введённых параметров  $\varphi_0$  и  $\mu(\varphi_0)$ , сделав их «бегущими» т.е. зависящими от амплитуды  $I$ . Такой подход напоминает введение бегущих перенормированных констант в квантовой теории поля. Во-вторых, несмотря на то, что мы работаем при малом значении параметра  $\epsilon \equiv 1 - p$ , мы не раскладывали по нему функцию  $\delta V$ . В действительности, ряд Тейлора по  $\epsilon$  идёт по степеням  $\epsilon \ln |\varphi|$ . Он становится неприменимым

при  $|\varphi| \gtrsim e^{1/2\epsilon}$ , в то время как наше вычисление остаётся верным.

Напоследок отметим, что поправки более высокого порядка по  $\delta V$  могут быть вычислены рассмотрением вышеупомянутых быстроосциллирующих добавок к  $I$  и  $\theta$ , как и в разделе 2.6. Мы проведём это вычисление в разделе 4.5 для теоретико-полевых осциллонов.

### 4.3 Эффективная теория поля и «бегущая масса» для осциллонов

Перейдём к теоретико-полевой модели и уравнению (2.1) с потенциалом (4.1). Для определённости мы будем работать в  $d = 3$  пространственных измерениях.

Применим разработанный в предыдущем разделе «ренормгрупповой трюк» для описания осциллонов. А именно, выделим квадратичную часть потенциала  $\mu^2\varphi^2/2$  с помощью формулы (4.2), после чего будем развивать теорию возмущений по оставшейся нелинейной части  $\delta V$ . Однако теперь в уравнении есть ещё один член — пространственная производная  $\Delta\varphi$ . Её тоже необходимо включить в возмущение, т.к. внутри стационарного осциллона она имеет тот же порядок малости, что и  $\delta V'$ . Действительно, слабая нелинейность удерживает осциллон, уравновешивая отталкивание, связанное с пространственной производной. Поэтому пространственный размер осциллонов в модели монодромии является большим:  $R^{-2} \sim O(\delta V) \sim O(\epsilon)$ .

В нулевом порядке по  $\delta V$  и  $\Delta\varphi$  мы получаем тот же линейный осциллятор  $\partial_t^2\varphi = -\mu^2\varphi$ , что и в предыдущем разделе. В дальнейшем мы будем использовать переменные действие-угол (4.5) этого осциллятора. Величина  $\mu$  опять оценивается из локальной кривизны потенциала через уравнение (4.4). Она не совпадает с массой поля.

Следующий шаг состоит в каноническом преобразовании (4.5) к переменным действие-угол для линейного осциллятора, которые теперь становятся полями  $I(t, \mathbf{x})$  и  $\theta(t, \mathbf{x})$ . Классическое действие в этих переменных приобретает вид

$$\mathcal{S} = \int dt d^3\mathbf{x} [I\partial_t\theta - \mu I - (\partial_i\varphi)^2/2 - \delta V(\varphi)], \quad (4.12)$$

ср. с выражениями (4.6) и (2.8). Последние два члена здесь представляют собой быстроосциллирующее возмущение, которое мы, как и в разделах 2.3

и 4.2, усредняем по периоду. Выражение для  $\langle \delta V \rangle$  уже получено в формулах (4.8) и (4.9), так что нам осталось усреднить только градиентный член. Подставляя преобразование (4.5) в  $(\partial_i \varphi)^2$ , вытаскивая медленно меняющиеся  $\partial_i I$  и  $\partial_i \theta$  из-под среднего и усредняя оставшиеся коэффициенты по  $\theta$ , получим

$$\langle (\partial_i \varphi)^2 \rangle = \frac{(\partial_i I)^2}{4I\mu} + \frac{I}{\mu} (\partial_i \theta)^2, \quad (4.13)$$

где перекрёстный член  $\partial_i I \partial_i \theta \langle \partial_I \varphi \partial_\theta \varphi \rangle$  обращается в ноль из-за того, что  $\partial_I \varphi \partial_\theta \varphi$  — нечётная функция  $\theta$ . Подставляя выражения (4.8) и (4.13) в (4.12), получим эффективное действие для осциллонов в модели монодромии:

$$\mathcal{S}_{\text{eff}} = \int dt d^d \mathbf{x} \left[ I \partial_t \theta - \mu I - \frac{(\partial_i I)^2}{8I\mu} - \frac{I(\partial_i \theta)^2}{2\mu} - \frac{\mathcal{A}_p(\varsigma)}{2p} + \frac{\mu I}{2} \right], \quad (4.14)$$

где  $\varsigma = 2I/\mu$  и среднее  $\mathcal{A}_p(\varsigma)$  было определено в формуле (4.9).

Последний — важный — шаг состоит в том, чтобы сделать «эффективную массу»  $\mu = \mu(I)$  и её характерный «масштаб»<sup>33</sup>  $\varphi_0 = \varphi_0(I)$  зависящими от амплитуды  $I$ . Как и разделе 4.2, мы воспользуемся для этого формулой (4.10). Вместе с определением (4.4) для  $\mu$ , это приравнивает квадрат «эффективной массы» ко второй производной потенциала  $V$  при  $\varphi = \sqrt{2I}$ , тем самым обеспечивая малость нелинейности  $\delta V$ .

Из-за усреднения по  $\theta$  эффективное действие (4.14) инвариантно относительно глобального сдвига фазы  $\theta \rightarrow \theta + \alpha$ , что гарантирует сохранение Нётеровского заряда (2.15) и существование осциллонов как нетопологических солитонов. Уравнение на профили  $I = \psi^2(\mathbf{x})$  находится варьированием действия и подстановкой стационарного анзаца (2.21) в получившееся уравнение. Это даёт

$$\omega \psi = \mu \psi - \frac{\Delta \psi}{2\mu} + \psi (\partial_i \psi)^2 \frac{\partial_I \mu}{2\mu} + (\partial_\varsigma \mathcal{A}_p / \mu p - 1/2) (\mu - \psi^2 \partial_I \mu) \psi, \quad (4.15)$$

ср. с уравнениями (4.11) и (2.21).

Мы численно решаем сферически симметричную версию уравнения (4.15) с помощью метода стрельбы, см. Раздел 2.5 и сноску 22. Решения  $\psi = \psi(r)$  при двух разных частотах  $\omega$  и  $p = 0.95$  показаны на Рис. 4.3. Эти профили соответствуют осциллонам большой амплитуды, которая, как видно, резко растёт при уменьшении частоты  $\omega$ .

<sup>33</sup>В силу соотношения  $\delta V \sim (\partial_i I)^2 / I \sim O(\epsilon)$  и рассуждений раздела 4.2 зависимость эффективного действия (4.14) от  $\varphi_0$  имеет порядок  $O(\epsilon^2)$ .

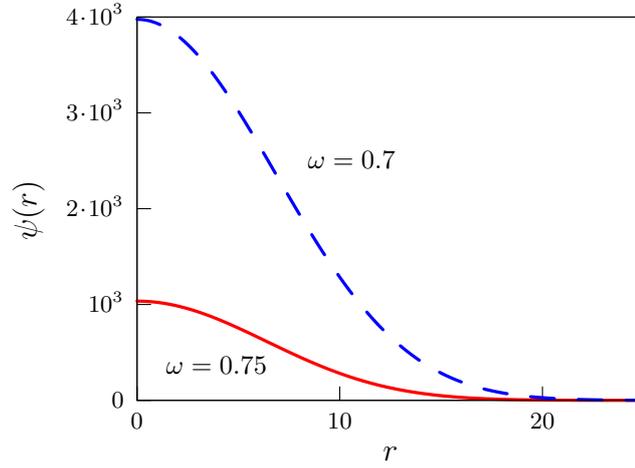


Рис. 4.3: Профили  $\psi(r)$  осциллонов в модели монодромии при двух значениях частоты и  $p = 0.95$ .

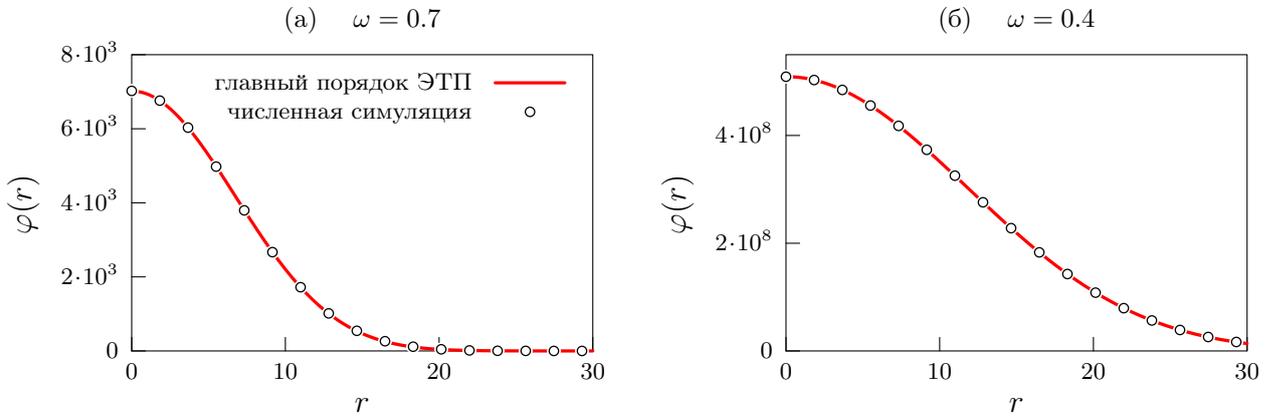


Рис. 4.4: Профили  $\varphi(0, r)$  осциллонов в модели (4.1) с  $p = 0.95$  и частотами (а)  $\omega = 0.7$ , (б)  $\omega = 0.4$ . Сплошная линия демонстрирует предсказание эффективной теории, а кружочки получены с помощью численных симуляций.

#### 4.4 Сравнение с численными результатами

Теперь сравним предсказания нашей «улучшенной по ренормгруппе» эффективной теории поля (ЭТП) с осциллонами в полной теории. Для получения последних мы решаем уравнение (3.1) для сферически симметричного поля  $\varphi(t, r)$  с потенциалом (4.1) в  $d = 3$  пространственных измерениях. В качестве начальных условий  $\varphi(0, r)$  мы используем осциллоны, найденные в эффективной теории. Они получаются подстановкой профилей  $\psi(r)$  в выражения (4.5) и (2.21). Частота, приближённо сохраняющийся заряд  $N$  и энергия  $E$  в полной теории вычисляются так же, как и в разделе 2.5.

На Рис. 4.4 приведено сравнение поля  $\varphi(t, \mathbf{x})$  осциллонов в эффектив-

ной и полной теориях в моменты времени  $t_{\max}$ , соответствующие максимумам колебаний  $\partial_t \varphi(t_{\max}, 0) = 0$ . Предсказание эффективной теории (линии) получается подстановкой профиля  $I = \psi^2(r)$  и  $\theta = 0$  в каноническое преобразование (4.5). Видно, что теория совпадает с численными данными (кружочки) при двух существенно разных значениях  $\omega$ . Особо отметим, что построенная теория остаётся точной даже для осциллона с частотой  $\omega = 0.4$ , обладающего гигантской амплитудой. Нечувствительность точности нашего метода к амплитуде поля также видна на Рис. 4.5а, где показана зависимость максимальной амплитуды  $\varphi(t_{\max}, r = 0)$  осциллонов от частоты.

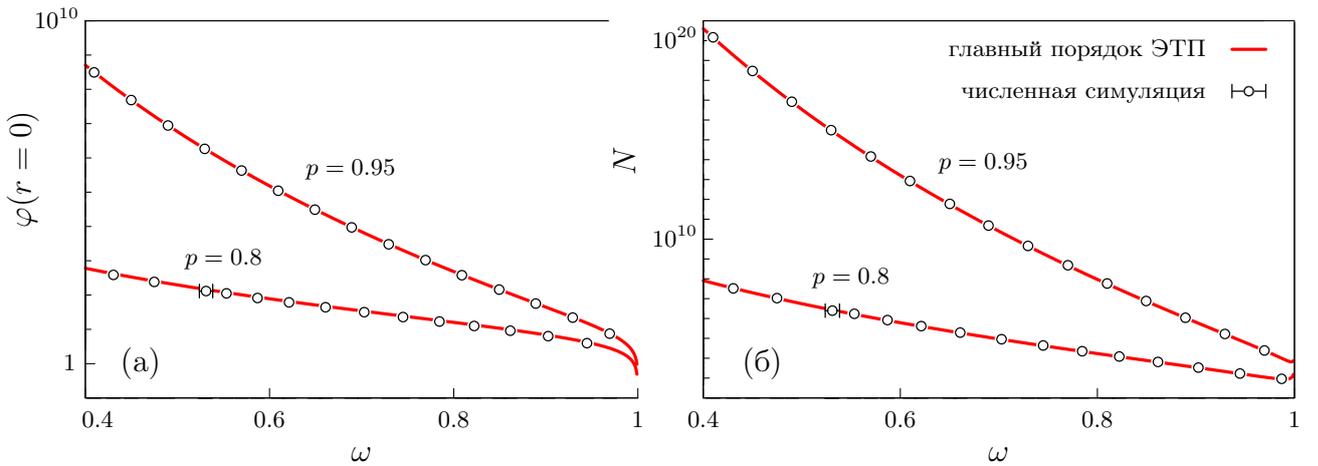


Рис. 4.5: (а) Амплитуды  $\varphi(t_{\max}, r = 0)$  и (б) адиабатические инварианты  $N(\omega)$  осциллонов в модели монодромии с  $p = 0.8$  и  $p = 0.95$ . Предсказания эффективной теории в главном порядке показаны сплошными линиями. Они воспроизводят численные результаты в полной модели (кружочки) с относительной точностью  $\Delta N/N \sim 0.2$  и  $0.06$  при двух указанных значениях  $p$  соответственно. Данная точность практически не зависит от амплитуды осциллона.

Такое же хорошее совпадение наблюдается для интегральных характеристик осциллонов, например для  $N(\omega)$ , показанного на Рис. 4.5б. Справа на этом рисунке можно заметить обсуждавшееся в Главе 2 нарушение критерия Вахитова–Колоколова при  $\omega \approx t = 1$ .

Мы видим, что из-за «ренормгруппового» трюка с  $\varphi_0 = \varphi_0(I)$  предсказания нашей эффективной теории уже в главном порядке имеют прекрасную точность даже в случаях сильных полей и заметной нелинейности, ср. графики с  $p = 0.8$  и  $\epsilon = 0.2$  на Рис. 4.5. При этом относительная погрешность метода практически нечувствительна к амплитуде поля.

## 4.5 Высшие поправки

В данном разделе мы получим поправки следующего порядка к эффективному действию так же, как мы это делали в Разделе 2.6.

Для этого учтём быстроосциллирующие вклады в переменные  $I$  и  $\theta$ , которыми мы пренебрегли при усреднении в Разделе 4.3. А именно, представим переменные в виде  $I = \bar{I} + \delta I$  и  $\theta = \bar{\theta} + \delta\theta$ , где  $\langle \delta I \rangle = \langle \delta\theta \rangle = 0$ , а  $\bar{I}$  и  $\bar{\theta}$  являются медленно меняющимися. Уравнения на  $\delta I$  и  $\delta\theta$  имеют вид

$$\partial_t \delta I = j_\theta(I, \theta), \quad \partial_t \delta\theta = -j_I(I, \theta), \quad (4.16)$$

где вклад в источники  $j_I$  и  $j_\theta$  дают как градиентные, так и нелинейные члены:

$$j_\theta = \partial_\theta \varphi(\Delta\varphi - \delta V'), \quad (4.17)$$

$$j_I = \partial_I \varphi(\Delta\varphi - \delta V') - \left\langle \partial_I \varphi(\Delta\varphi - \delta V') \right\rangle. \quad (4.18)$$

Как и в Разделе 2.6, уравнение (4.16) с источниками (4.17) можно решать порядок за порядком по  $\delta I$  и  $\delta\theta$ . Это позволяет выразить быстроосциллирующие поправки в виде функциональных рядов с коэффициентами, зависящими от  $\bar{I}$  и  $\bar{\theta}$ .

Найдём поправку второго порядка к эффективному действию. С целью упрощения вычислений будем их проводить сразу для стационарного случая  $\bar{I} = \psi^2(\mathbf{x})$  и  $\bar{\theta} = \omega t$ , следуя анзацу (2.21). Пренебрегая зависимостью от  $\delta I$  и  $\delta\theta$  в правой части уравнений (4.16), получим:

$$j_\theta \approx \frac{\sin 2\bar{\theta}}{\mu} \psi^2 \left[ -\Delta\psi/\psi - \mu^2 + (1 + \varsigma \cos^2 \bar{\theta})^{-\epsilon} \right], \quad (4.19)$$

$$j_I \approx \frac{\cos 2\bar{\theta}}{2\mu} \left( \frac{\Delta\psi}{\psi} + \mu^2 \right) - \frac{\cos^2 \bar{\theta}}{\mu} (1 + \varsigma \cos^2 \bar{\theta})^{-\epsilon} + \frac{1}{2\psi^2} [\mathcal{A}_p(\varsigma) - \mathcal{A}_{p-1}(\varsigma)], \quad (4.20)$$

где мы использовали каноническое преобразование (4.5), явный вид потенциала (4.1), представление (4.2) и переобозначили  $\varsigma = 2\bar{I}/\mu$ . Решения  $\delta I(\bar{I}, \bar{\theta})$  и  $\delta\theta(\bar{I}, \bar{\theta})$  получаются из  $j_\theta$  и  $j_I$  действием функционала  $\mathcal{I}$ , определённого формулой (2.50). Подставляя  $\delta I$  и  $\delta\theta$  в полное действие (4.12) и раскладывая до второго порядка, получим выражение для поправки к эффективному действию в модели монодромии

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{eff}}^{(2)} &= \frac{1}{\omega} \int dt d^3 \mathbf{x} \left\langle j_I(\bar{I}, \bar{\theta}) \cdot \mathcal{I} [j_\theta(\bar{I}, \bar{\theta})] \right\rangle \\ &= \frac{1}{4\omega} \int dt d^3 \mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2\mu^2} (\Delta\psi + \mu^2 \psi)^2 - \frac{\mathcal{B}_p(\varsigma)}{p\psi^3} (\Delta\psi + \mu^2 \psi) + \frac{\mathcal{D}_p(\varsigma)}{p\psi^2} \right\}, \quad (4.21) \end{aligned}$$

где мы ввели формфакторы

$$\mathcal{B}_p = (p+1) \mathcal{A}_{p+1}(\varsigma) + p(\varsigma/2 + 1) \mathcal{A}_{p-1}(\varsigma) - (1 + 2p + (p+1)\varsigma/2) \mathcal{A}_p(\varsigma), \quad (4.22)$$

$$\mathcal{D}_p = \mathcal{A}_{2p}(\varsigma) - \mathcal{A}_p^2(\varsigma) - \mathcal{A}_{2p-1}(\varsigma) + \mathcal{A}_p(\varsigma)\mathcal{A}_{p-1}(\varsigma) \quad (4.23)$$

перед членами с различным количеством пространственных производных.

Очевидно, из-за усреднения по  $\bar{\theta}$  поправка (4.21) по-прежнему не нарушает глобальную симметрию по группе  $U(1)$  относительно сдвигов  $\bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} + \alpha$ . Поэтому эффективная теория всё ещё обладает сохраняющимся нетопологическим зарядом и содержит осциллоны. Но следует отметить, что аналитическое выражение для заряда получает поправку (2.53), где  $\mathcal{S}_{\text{eff}}^{(2)}$  даётся выражением (4.21).

После получения  $\mathcal{S}_{\text{eff}}^{(2)}$  мы вновь привязываем значение  $\varphi_0$  и  $\mu$  с помощью равенств (4.10) и (4.4) к амплитуде поля, которая теперь характеризуется «медленной» переменной  $\bar{I}$ . Как и в разделе 2.6, теперь мы можем вычислить поправки к профилю осциллона по теории возмущений  $\psi(r) = \psi^{(1)}(r) + \psi^{(2)}(r)$ , найти его поле  $\varphi(\psi^2(r) + \delta I, \bar{\theta} + \delta\theta)$ , заряд и энергию, см. формулы (4.5) и (2.53).

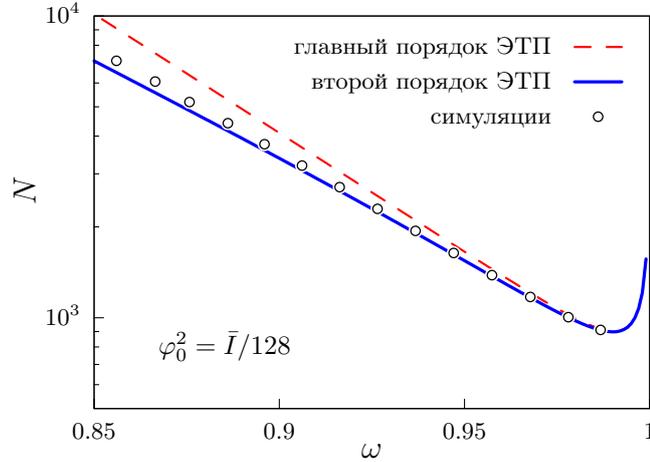


Рис. 4.6: Сравнение предсказаний первого и второго порядков эффективной теории с результатами численных симуляций. График показывает заряд  $N(\omega)$  осциллонов в модели монодромии (4.1) с  $p = 0.8$ . Мы намеренно испортили точность теоретических предсказаний, выбрав контринтуитивное значение параметра  $\varphi_0$ .

Сравним улучшенную до второго порядка эффективную теорию с осциллонами в полной теории. Но здесь следует отметить, что точность главного

порядка ЭТП уже сравнима с численными ошибками нахождения «точных» осциллонов. Чтобы увидеть хоть какой-то эффект от следующего порядка, давайте специально испортим теоретические результаты, взяв нелогичное значение вспомогательного масштаба  $\varphi_0^2 = \bar{I}/128$ . Более того, будем рассматривать заметно нелинейный случай  $p = 0.8$ . Эти два ухудшения приводят к тому, что значения заряда  $N(\omega)$ , найденные в первом порядке ЭТП (пунктирная линия на Рис. 4.6), сильнее не совпадают с точными численными результатами (кружочки). В то же время, предсказания второго порядка ЭТП (сплошная линия) по-прежнему согласуются с численными симуляциями. Мы можем заключить, что учёт поправок второго порядка способен улучшить предсказания эффективной теории, хотя в модели монодромии с малым  $\epsilon$  это может быть нецелесообразно.

## 4.6 Обсуждение и сравнение с другими методами

В данной Главе мы разработали простое и точное аналитическое описание осциллонов в скалярных теориях с почти квадратичными потенциалами. Две основных идеи нашего метода заключаются в правильном выборе медленно меняющихся переменных  $I, \theta$  в выражении (4.5) и во введении «бегущей», т.е. зависящей от амплитуды поля, «эффективной массы»  $\mu = \mu(I)$  в выражениях (4.2), (4.4) и (4.10). Полученное эффективное действие (4.14), (4.21) для  $I$  и  $\theta$  имеет вид асимптотического разложения по пространственным производным и по нелинейности потенциала. Осциллоны возникают в эффективной теории как нетопологические солитоны, соответствующие минимуму энергии при заданном значении адиабатического инварианта  $N$ .

Хотя наш метод позволяет вычислять поправки высших порядков, разумный выбор «бегущей массы»  $\mu$  сильно повышает точность и делает надёжными предсказания теории уже в главном порядке. Идея трюка с  $\mu = \mu(I)$  навеяна теорией перенормировок: этот параметр в эффективном действии выполняет ту же функцию, что и зависящие от масштаба константы связи в перенормированной квантовой теории поля.

Полезно сравнить получившийся подход с другими способами аналитического описания осциллонов в модели монодромии. Во-первых, можно применить разложение по амплитуде поля  $\varphi$ ,

$$V(\varphi) = \varphi^2/2 - \epsilon \varphi^4/4 + \epsilon(1 + \epsilon) \varphi^6/12 + \dots, \quad (4.24)$$

и решать уравнение поля порядок за порядком по теории возмущений. Мы уже обсуждали в разделе 2.7, что такое разложение в действительности идёт по параметру  $\kappa^2 = 1 - \omega^2$ ; оно правомерно только при  $\omega \sim m = 1$ . На Рис. 4.7 мы показываем энергию  $E(\omega)$ , вычисленную в первых двух порядках разложения по амплитуде поля (РАП) [первые два и три члена в уравнении (4.24) соответственно]. Как и ожидалось, данный метод неприменим в широкой области частот  $\omega < 0.9$ , соответствующей сильным полям осциллонов, ср. Рис. 4.4.

Ещё один подход к осциллонам в модели монодромии состоит в разложении по параметру нелинейности,  $\epsilon = 1 - p$ . В первом порядке разложения и при  $|\varphi| \gg 1$  получим [17]

$$V = \frac{\varphi^2}{2} [1 + \epsilon - \epsilon \ln \varphi^2 + O(\varphi^{-2}) + O(\epsilon^2 \ln^2 |\varphi|)]. \quad (4.25)$$

Усечённый потенциал (4.25) имеет недостаток в виде мягкой сингулярности при  $\varphi = 0$ . Но зато в такой модели существует семейство точных периодических решений [17, 42], которые могут приближённо описывать осциллоны монодромии. Энергии  $E(\omega)$  этих решений показаны пунктирной линией на Рис. 4.7. Видно, что приближение (4.25) приводит к лучшим результатам, чем разложение по амплитуде поля, но перестаёт работать при небольших  $\omega$ , когда поле осциллонов становится настолько большим, что  $\epsilon \ln |\varphi| \gtrsim 1$ .

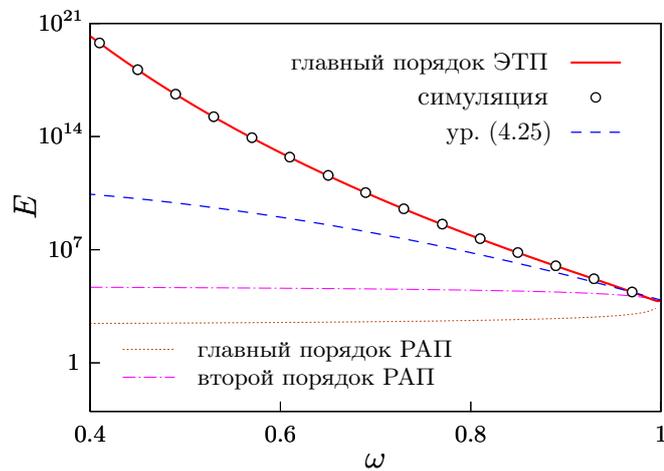


Рис. 4.7: Различные оценки энергии  $E(\omega)$  осциллонов в модели монодромии с  $p = 0.95$ .

Наша же эффективная теория, напротив, применима и точна при любых частотах и амплитудах осциллонов. Её предсказание для энергии  $E(\omega)$  показано на Рис. 4.7 сплошной линией, которая совпадает с численными симуляциями (кружочки) с относительной точностью лучше, чем  $\Delta E/E \lesssim 0.06$ .

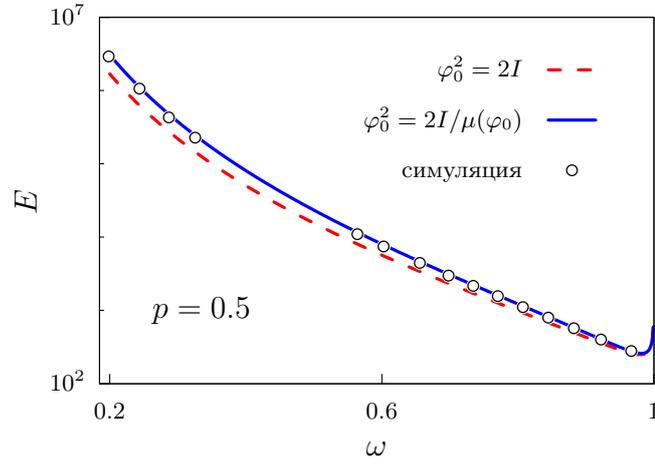


Рис. 4.8: Энергия осциллонов  $E(\omega)$  в сильно нелинейной модели монодромии с  $p = 0.5$  (кружочки) по сравнению с двумя предсказаниями главного порядка ЭТП (сплошная и пунктирная линии). Последние два случая отличаются выбором масштаба  $\varphi_0$  эффективной теории.

Следует отметить, однако, что точность нашего метода всё-таки связана с параметром нелинейности  $\epsilon \equiv 1 - p$  рассматриваемого потенциала. Например, в случае  $p = 0.5$ , который используется в моделях инфляции [32, 33, 35, 104], предсказания главного порядка ЭТП отличаются уже на  $\Delta E/E \sim 0.4$  от точных результатов, ср. пунктирную линию и кружочки на Рис. 4.8.

Однако если последовать совету сноски 32 и улучшить выбор  $\varphi_0$ , решив уравнение  $\varphi_0^2 = 2I/\mu(\varphi_0)$ , то относительная ошибка предсказаний эффективной теории (сплошная линия на Рис. 4.8) падает до  $\Delta E/E \sim 0.1$ , что неожиданно для настолько нелинейного потенциала. Это даёт надежду на то, что правильный выбор масштаба  $\varphi_0$  эффективной теории может позволить обобщить наш метод даже на сильно нелинейные потенциалы<sup>34</sup>.

Можно рассчитывать на то, что предложенный «ренормгрупповой» подход найдёт применение и в других моделях с почти квадратичными потенциалами, подобных (4.1).

<sup>34</sup>Совпадение в главном порядке всё ещё не означает, что асимптотический ряд эффективной теории быстро сходится, т.к. параметр разложения  $\epsilon = 0.5$  велик.

## Заключение

В данной диссертации изучались компактные решения в скалярной теории поля — солитоны и осциллоны. Получены следующие результаты.

В Главе 1 на примере  $(1+1)$ -мерной модели синус-Гордона во внешнем периодическом потенциале показано, что неинтегрируемость статических уравнений поля существенно меняет свойства солитонов в теории. А именно, множество статических солитонов становится бесконечным, а количество стабильных солитонов экспоненциально растёт с их пространственным размером. Мы доказали, что показатель экспоненты такого роста ограничивает снизу топологическую энтропию, характеризующую динамический хаос в статических уравнениях поля. Показано, что множество значений поля  $\varphi(0)$  и  $\varphi'(0)$  стабильных солитонов образует самоподобный фрактал, в котором произвольно малая окрестность каждого солитонного решения подобна всему фракталу, см. Рис. 1.7. На языке солитонов это объясняется возможностью усложнять солитон, увеличивая его длину, но не меняя при этом уже существующую конфигурацию, см. Рис. 1.8. Была вычислена фрактальная размерность солитонного фрактала. Объяснена немонотонная зависимость этой величины от параметра неинтегрируемости системы. Наконец, показано, что распределение значений поля внутри фрактала ограничивает снизу ещё одну меру хаотичности статических уравнений — метрическую энтропию.

В Главе 2 построена эффективная теория поля для описания нелинейных осциллонов большого размера. Основная идея данного подхода заключается в каноническом преобразовании к переменным  $I(t, \mathbf{x})$  и  $\theta(t, \mathbf{x})$ , описывающим амплитуду и фазу колебаний поля. Показано, что эффективное действие для  $I$  и  $\theta$  имеет вид систематического разложения по пространственным производным. Параметр такого разложения — обратный размер полевой конфигурации. По построению, во всех порядках эффективная теория обладает глобальной  $U(1)$  симметрией, и следовательно, сохраняющимся зарядом, который соответствует адиабатическому инварианту в полной теории. Это обеспечивает существование в эффективной теории нетопологических солитонов — осциллонов. Были получены условия существования и долговечности этих объектов: грубо говоря, скалярный потенциал модели должен расти медленнее, чем квадратичный, но быть близким к нему. Также выведен

критерий Вахитова–Колоколова для стабильности осциллонов относительно малых далекодействующих возмущений. Предсказания эффективной теории сопоставлены с результатами численного решения точных уравнений поля для плоского потенциала (2.2). Лучшее совпадение обнаружилось в нерелятивистском пределе, когда размеры осциллонов становятся большими, а также при меньшем числе  $d$  размерностей пространства.

В Главе 3 было показано, что в формальном пределе  $d \rightarrow 0$  осциллоны превращаются в точно периодические решения, для которых эффективное описание становится точным. Это позволило объяснить, почему времена жизни осциллонов оказываются больше, а сами они встречаются чаще в низкоразмерных теориях. Рассмотренный предел также объясняет увеличение точности эффективного описания при уменьшении  $d$ .

В Главе 4 был рассмотрен случай, когда скалярный потенциал модели близок к квадратичному. Таковым, при определённом выборе параметров, является потенциал монодромии (4.1). Разработан «ренормгрупповой» метод корректного учёта малой нелинейности потенциала при произвольно сильных полях. В рамках данного подхода была построена эффективная теория поля для осциллонов в потенциале монодромии. Её предсказания уже в главном порядке воспроизводят численные решения точных уравнений поля, превосходя по точности все имеющиеся пертурбативные подходы.

Дальнейшие исследования осциллонов могут развиваться по нескольким направлениям. Во-первых, распад этих объектов является непертурбативным эффектом по отношению к построенной эффективной теории. Тем не менее, такой процесс можно попытаться описать, используя технику Сегура и Крускала [99]. Второй интересный путь состоит в применении эффективной теории для описания осциллонов в более сложных системах, например, в векторных полях [85] или аксионном поле с быстро растущей массой [19] в ранней Вселенной.

Результаты диссертации опубликованы в ведущих зарубежных изданиях [54–56].

Численные вычисления выполнялись на вычислительном кластере Отдела теоретической физики ИЯИ РАН.

Автор выражает огромную благодарность своему научному руководителю Дмитрию Геннадиевичу Левкову и своим соавторам Эмину Яткяровичу Нугаеву и Александру Григорьевичу Панину за совместную плодотворную работу на протяжении многих лет, за наставничество и поддержку.

Автор благодарит научный коллектив отдела теоретической физики Института Ядерных Исследований РАН и кафедры физики частиц и космологии физического факультета МГУ за создание замечательной рабочей и творческой атмосферы, за консультации и помощь.

Автор признателен Институту Теоретической и Математической Физики МГУ за поддержку. Также работы по подготовке данной диссертации были поддержаны грантами РФФИ 22-12-00215 и 16-12-10494.

Автор благодарит оппонентов за внимательное чтение диссертации и ценные комментарии. Автор выражает признательность диссертационному совету ИЯИ РАН за рассмотрение данной диссертации.

## Приложение А

### Методы поиска и исследования хаотических солитонов

В данном Приложении мы опишем технические детали нахождения статических солитонов и исследования их стабильности, которые использовались в Главе 1.

#### А.1 Поведение статических решений при $x \rightarrow \pm\infty$

Вблизи вакуума  $\varphi = 0$  можно опустить нелинейные члены, и уравнение (1.3), (1.4) принимает вид уравнения Шрёдингера

$$\varphi''(x) = \varphi(x)U(x) \quad (\text{A.1})$$

в периодическом потенциале  $U(x)$  вида (1.5). Частные решения такого уравнения являются собственными функциями оператора сдвига на период  $x \rightarrow x + D$ , т.е. функциями вида

$$\varphi(x) = e^{\lambda x} f(x), \quad (\text{A.2})$$

где  $f(x)$  периодична с периодом  $D$ . Решая уравнение (A.1) внутри интервала  $0 < x < D$ , находим

$$f(x) = e^{-\lambda x} (C_+ e^x + C_- e^{-x}). \quad (\text{A.3})$$

Линеаризованные условия сшивки (1.9) на концах интервала имеют вид

$$f(0) = f(D), \quad f'(D) + \varepsilon f(0) = f'(0), \quad (\text{A.4})$$

где учтено, что  $f$  — периодична. Подставляя уравнение (A.3) в условия сшивки (A.4), получим однородную линейную систему

$$\begin{pmatrix} e^{(1-\lambda)D} - 1 & e^{-(1+\lambda)D} - 1 \\ \varepsilon + \lambda - 1 + (1-\lambda)e^{(1-\lambda)D} & \varepsilon + \lambda + 1 - (1+\lambda)e^{-(1+\lambda)D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_+ \\ C_- \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{A.5})$$

которая имеет нетривиальные решения, только если матрица коэффициентов вырождена. Мы получаем корни

$$\lambda = \pm \frac{1}{D} \ln \left( \sigma + \sqrt{\sigma^2 - 4} \right) \equiv \pm \lambda_v, \quad \text{где} \quad \sigma = \cosh D + \frac{\varepsilon}{2} \sinh D. \quad (\text{A.6})$$

Таким образом, мы получили выражение (1.6), где частные решения  $f_A, f_B$  имеют вид (А.3) с показателями  $\lambda = \pm\lambda_v$ , а коэффициенты  $C_+$  и  $C_-$  находятся из уравнения (А.5). Мы нормируем решения, требуя  $C_+ + C_- = 1$ .

## А.2 Общий вид статических решений уравнения синус–Гордона

В интервалах между  $\delta$ -функциями система (1.3), (1.4), (1.5) сводится к уравнению физического маятника  $\varphi'' = \sin \varphi$ . Движение такой системы зависит от того, превосходит ли её механическая энергия

$$\mathcal{E}_m = \frac{\varphi'^2}{2} + \cos \varphi - 1 \quad (\text{А.7})$$

высоту барьера  $\mathcal{E}_m = 0$  или нет [105]. При  $\mathcal{E}_m < 0$  её движение периодично. Оно описывается общим решением

$$\varphi(x) = 2 \arccos(\pm k \operatorname{sn}(x - x_\pi, k)) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{А.8})$$

В то же время, «вращающиеся» решения с  $\mathcal{E}_m > 0$  имеют вид

$$\varphi(x) = \pi \pm 2 \operatorname{am}\left(k(x - x_\pi), \frac{1}{k}\right). \quad (\text{А.9})$$

Здесь  $\operatorname{sn}$  и  $\operatorname{am}$  обозначают эллиптический синус и амплитуду Якоби, соответственно [106]. Решения (А.8) и (А.9) включают две константы интегрирования:  $k = \sqrt{\mathcal{E}_m/2 + 1}$  и параметр сдвига  $x_\pi$ , а знаки  $\pm$  в уравнениях отличают две ветви решения с разными знаками  $\varphi'(x)$ .

Чтобы получить численное решение, мы используем формулы (А.8) и (А.9) следующим образом. Стартуя со значений  $\varphi$  и  $\varphi'$  при  $x = mD + 0$ , мы вычисляем  $\mathcal{E}_m, k$  и определяем, какую ветвь общего решения использовать. Обращая уравнение (А.8) или (А.9), мы находим  $x_\pi$ , а значит — значения  $\varphi$  и  $\varphi'$  внутри всего интервала  $mD < x < (m + 1)D$ . После этого мы используем условия сшивки (1.9) и переходим к следующему интервалу.

## А.3 Линейная стабильность

Опишем практический способ изучать стабильность солитонов в рамках метода стрельбы. Напомним, что для этого мы считаем число нулей у возмущения  $\theta_0(x)$  в уравнении (1.11).

При непрерывном изменении параметра стрельбы  $A$  эти нули не могут внезапно исчезать или появляться внутри конечного интервала  $0 < x < L$ . Действительно, давайте сгладим  $\delta$ -функции. Тогда  $\theta_0(x)$  станет гладкой функцией  $x$  и  $A$ . После этого корни  $\theta_0$  могут появляться или исчезать между 0 и  $L$  только попарно; при этом, в точках  $x_*$ , где это происходит, должно выполняться условие  $\theta_0(x_*) = \theta'_0(x_*) = 0$ . Однако  $\theta_0(x)$  удовлетворяет линейному уравнению  $\hat{L}_\varphi \theta_0 = 0$ . Она не может обратиться в ноль одновременно со своей производной — значит, число её корней внутри интервала  $0 < x < L$  может меняться только на  $\pm 1$ , когда один из них пересекает границу  $L$ . В силу определения (1.11), это происходит при тех значениях  $A = A_*$  параметра пристрелки, когда выполняется уравнение  $\partial\varphi(L)/\partial A = 0$ .

Нам осталось определить, в каком направлении корень  $x_r(A)$  пересекает границу интервала при  $A = A_*$ . Дифференцируя равенство  $\theta_0(x_r(A), A) = 0$ , получим выражение для изменения  $\Delta N_r$  числа корней

$$\Delta N_r = -\operatorname{sgn} \left. \frac{dx_r}{dA} \right|_{A_*} = \operatorname{sgn} \left. \frac{\partial_A \theta_0(L)}{\theta'_0(L)} \right|_{A_*}. \quad (\text{A.10})$$

Выражение (A.10) можно упростить, используя введённую в уравнении (A.7) механическую энергию  $\mathcal{E}_m$ . По построению, эта величина не зависит от  $x$  внутри каждого из интервалов  $mD < x < (m+1)D$ . Из уравнения (1.11) получим  $\partial_x \theta_0(L) = \partial_x \partial_A \varphi(L) = \partial_A \mathcal{E}_m / \varphi'(L)$  при  $A = A_*$ . Отсюда следует

$$\Delta N_r = \operatorname{sgn} \left( \partial_A \mathcal{E}_m \partial_A^2 \varphi(L) \varphi'(L) \right) \Big|_{A_*}. \quad (\text{A.11})$$

Множители в уравнении (A.11) можно найти численно, используя значения  $\varphi$  и  $\varphi'$  при  $x = L$  и различных  $A$  — те самые, что используются в методе стрельбы.

Мы применяем формулу (A.11) следующим образом. При совсем малых  $A$  решения  $\varphi_A(x)$  остаются вблизи вакуума на рассматриваемом интервале, а у  $\theta_0(x)$  нет нулей:  $N_r = 0$ . Мы меняем  $A$  маленькими шагами в рамках метода стрельбы и грубо определяем значения  $A_*$ , соответствующие  $\partial_A \varphi(L) = 0$ . В этих точках число корней  $\theta_0$  меняется в соответствии с уравнением (A.11). Когда все солитоны найдены, мы выбираем из них стабильные, т.е. те, у которых  $N_r = 0$ .

Мы проверили описанную выше процедуру, сравнивая результаты с непосредственным решением уравнения на возмущения  $\hat{L}_\varphi \theta_0 = 0$  с помощью

последовательного алгоритма Приложения А.2. Мы получили то же самое количество корней  $\theta_0$ , что заодно подтвердило метод стрельбы.

## А.4 Нахождение фрактала солитонов с заданной точностью

Наш способ получения фрактала значений поля «правых» солитонов, который рассматривается в Разделе 1.6, достаточно прямолинеен. Мы разбиваем значения параметра  $a \in [0, 1]$  на маленькие сегменты размера  $\delta$ , ищем стабильные солитоны в каждом сегменте методом стрельбы и изображаем значения их полей точками на Рис. 1.7а,б. Изменяя размер сегментов  $\delta$ , мы получаем Рис. 1.9 и коэффициент в уравнении (1.26).

Однако для того, чтобы найти фрактал с фиксированным разрешением  $\delta$ , нам приходится искать солитоны различной длины  $L = lD$  при различных  $a$ . Оценим длину  $L$  солитонов, которые надо искать при заданном значении этого параметра. Вспомним, что разность между любыми двумя решениями растёт экспоненциально с  $x$ :  $\Delta\varphi \sim \Delta A \cdot \theta_0(x)$ . Возьмём интервал параметра стрельбы  $\Delta A = [\theta_{\max}(L)]^{-1}$ , где  $\theta_{\max}(L)$  — максимальное значение  $|\theta_0(x)|$  на участке  $0 < x < L$ . Два решения с параметрами  $A$  из такого интервала отличаются на  $\Delta\varphi \lesssim 1$ , поэтому окрестность  $\Delta A$  солитона содержит  $O(1)$  новых стабильных солитонов длины  $L$  или меньше, если они вообще существуют. Иными словами, для фиксированного  $\Delta a = \delta$  необходимо рассмотреть настолько большую длину солитонов  $L$ , чтобы выполнялось соотношение

$$\theta_{\max}(L) \geq \frac{1}{\Delta A} \geq \frac{e^{-\lambda_v D \cdot a_0}}{\delta \cdot \lambda_v D}, \quad (\text{A.12})$$

где в последнем выражении мы преобразовали  $\Delta A$  в  $\Delta a = \delta$  и использовали уравнение (1.25). Если неравенство (A.12) выполнено, то один из стабильных солитонов в интервале  $\Delta a = \delta$  будет иметь длину  $L$  или меньше.

На практике мы вычисляем  $\theta_0(x)$  для решения в центре каждого интервала размера  $\Delta a = \delta$  на отрезке параметров  $a$ . Мы продолжаем это решение до такой точки  $x = L$ , где неравенство (A.12) начинает выполняться, а затем ищем солитоны длины  $L$  внутри всего интервала.

## Приложение Б

### Численные методы получения осциллонов

В этом Приложении описывается метод численных симуляций точных уравнений поля, позволяющий получать и исследовать осциллоны для подтверждения предсказаний эффективной теории поля. Данный метод используется в Главах 2–4.

Мы решаем сферически-симметричное уравнение для скалярного поля  $\varphi(t, r)$  на однородной решётке с  $N_r + 1$  узлами  $r_j = j\Delta r$  в конечном объёме  $0 \leq r \leq L_r$ , где  $\Delta r = L_r/N_r$ . Значения поля  $\varphi_j = \varphi(t, r_j)$  определены на узлах решётки. В практических вычислениях физический размер решётки равен  $L_r = 750$  и  $375$  при  $d \geq 1$  и  $d < 1$ , соответственно. Кроме того, мы используем  $N_r = 16384$  узлов при  $d < 3$ ,  $N_r = 32768$  при  $d = 3$ , а также повторяем вычисления для вдвое меньшего  $N_r$ , чтобы контролировать точность дискретизации.

Сферически симметричное уравнение (2.1) в гамильтоновой форме имеет вид

$$\partial_t \varphi = \pi_\varphi, \quad \partial_t \pi_\varphi = R[\varphi], \quad \text{где} \quad R \equiv \partial_r^2 \varphi + \frac{d-1}{r} \partial_r \varphi - V'(\varphi). \quad (\text{Б.1})$$

Мы накладываем граничные условия Неймана  $\partial_r \varphi = 0$  на границах решётки  $r = 0$  и  $L_r$ . Дискретизация пространственных производных в уравнении (Б.1) производится с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ). А именно, мы записываем поле в виде  $\varphi(r) = \tilde{\varphi}_0 + \sum_k \tilde{\varphi}_k \cos(p_k r)$ , где  $\tilde{\varphi}_k$  — образ Фурье при дискретных импульсах  $p_k = \pi k/L_r$ , а затем вычисляем радиальные производные, действуя операторами  $\partial_r$  и  $\partial_r^2$  на это представление. Например, первая производная даётся суммой  $\partial_r \varphi(r_j) = -\sum_k p_k \tilde{\varphi}_k \sin(p_k r_j)$ , которую легко вычислить. Таким образом мы получаем правую часть  $R(r_j) = R^{(j)}$  уравнений (Б.1) с экспоненциально маленькой погрешностью  $\delta R^{(j)} \sim \exp(-\text{const}/\Delta r)$ . Действительно, все численные ошибки в процедуре БПФ связаны с обрезанием  $p_k < p_{\text{max}} \equiv \pi/\Delta r$  при больших импульсах, которое отбрасывает экспоненциально малые хвосты образов Фурье. На практике мы используем численную библиотеку FFTW3 [45].

Мы осуществляем эволюцию уравнения (Б.1) по времени, используя симплектический метод Рунге-Кутты-Найстрёма четвёртого порядка (РКН4) [43, 44]. В данном методе каждый шаг по времени состоит из четырёх последовательных преобразований  $\pi_\varphi \rightarrow \pi_\varphi + a_\lambda \Delta t R[\varphi]$ ,  $\varphi \rightarrow \varphi + b_\lambda \Delta t \pi_\varphi$ , где  $\lambda = 1 \dots 4$ , а параметры  $a_\lambda$  и  $b_\lambda$  приведены в [43, 44]; в частности,  $\sum a_\lambda = \sum b_\lambda = 1$ . Ошибки вычисления в методе РКН4 равны  $O(\Delta t^4)$ . При этом метод точно сохраняет симплектическую структуру гамильтоновой системы, что гарантирует стабильность на больших временах эволюции. В практических вычислениях мы используем  $\Delta t = 10^{-2}$ , а также вдвое большее время  $2\Delta t$  для контроля точности. Мы следим, что численные параметры удовлетворяют критерию устойчивости [44]  $\Delta t \lesssim 0.97 \Delta r$  метода РКН4.

Напомним, что мы модифицировали уравнение поля, добавив губку  $H(r)$  для поглощения исходящего излучения, см. уравнение (2.43). Этот новый член уравнения можно естественным образом встроить в процедуру РКН4, изменив преобразование импульса  $\pi_\varphi$  на

$$\pi_\varphi \rightarrow (1 + \frac{1}{2}a_\lambda H \Delta t)^{-1} \left\{ (1 - \frac{1}{2}a_\lambda H \Delta t) \pi_\varphi + a_\lambda \Delta t R[\varphi] \right\}.$$

Мы берём  $H = 0$  при  $r < R_s$  и  $H = H_0 \cdot (r - R_s)^2$  с  $H_0 = 10^{-6}$  вне этой сферы. При  $d \geq 1$  мы покрываем примерно половину решётки областью поглощения:  $R_s = 400$ . При  $d < 1$  излучённые линейные волны *растут* при больших  $r$ , так что мы сдвигаем губку ближе к центру:  $R_s = 50$ .

Наконец, мы вычисляем энергию  $E$  и заряд  $N$  осциллонов как интегралы (2.42), (2.16), дискретизованные во втором порядке. Стоит заметить, что в случае дробной размерности  $d$  мера объёма в подынтегральных выражениях содержит мягкую сингулярность  $r^{d-1}$ , которую мы явно учитываем при дискретизации. Мы ограничиваем интегрирование в  $E$  и  $N$  областью  $r < r_{\max}$ , где осциллоны преобладают над излучением. Величина  $r_{\max}$  определяется как радиус, при котором плотности энергии и заряда перестают экспоненциально спадать.

Описанный выше алгоритм остаётся стабильным даже при долгих симуляциях, продолжающихся до  $t = 2 \cdot 10^5$ . Мы оцениваем численные ошибки, изменяя расстояние между узлами решётки  $\Delta r$  и шаг по времени  $\Delta t$ . Такой подход подтвердил, что ошибки дискретизации экспоненциально мало чувствительны к  $\Delta r$  и пропорциональны  $(\Delta t)^4$ . Для используемых нами параметров решётки эти две погрешности примерно сравнимы. Как правило, относи-

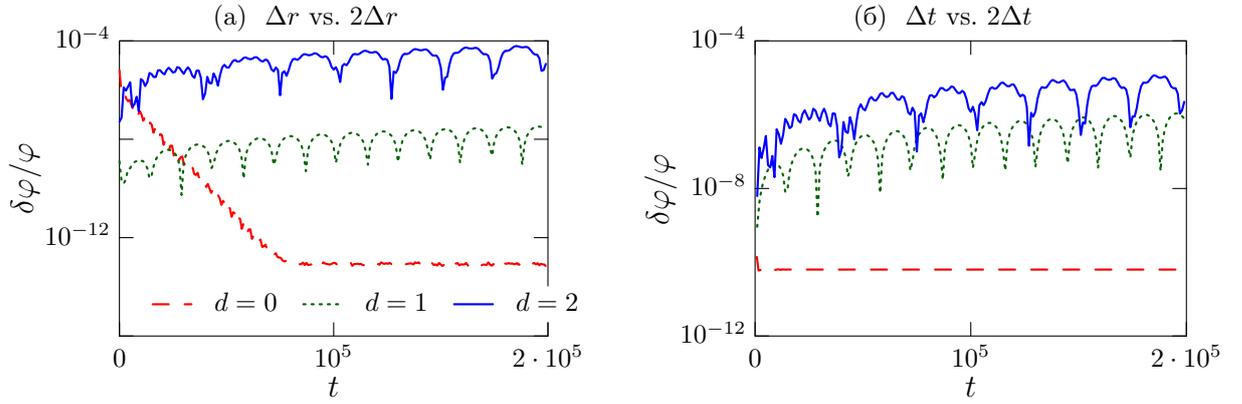


Рис. Б.1: Максимальная относительная разность  $\delta\varphi/\varphi \equiv \max_r |\delta\varphi|/\max_r |\varphi|$  между двумя численными осциллоными решениями с  $\omega = 0.99$  в модели (2.2), которые вычислены (а) на решётках с  $N_r = 16384$  и  $8192$ , т.е. при двух разных  $\Delta r$ ; (б) с двумя разными шагами по времени,  $\Delta t = 10^{-2}$  и  $2 \cdot 10^{-2}$ .

тельные ошибки всех вычисленных величин на несколько порядков ниже  $10^{-4}$  и достигают этого значения в худшем<sup>35</sup> случае  $d = 2$ , см. Рис. Б.1. Наконец, мы проверяем закон сохранения энергии<sup>36</sup>, который выполняется при  $d \geq 1$  и  $d = 0$  с точностями, превосходящими  $10^{-9}$  и  $5 \cdot 10^{-5}$  соответственно.

В завершение заметим, что заметные численные ошибки в параметрах  $\omega$  и  $N$  осциллонов связаны с тем, что эти объекты постоянно излучают, теряют энергию и взаимодействуют с излучёнными волнами. Чтобы уменьшить флуктуации, мы усредняем  $\omega$  и  $N$  по  $P > 1$  последовательным периодам осцилляций. Мы изображаем вариацию результатов при изменении  $P$  планками погрешностей на Рис. 2.5 и 2.7б. Численные ошибки на всех остальных рисунках меньше размера кружочков.

<sup>35</sup>Напомним, что мы переключаемся на вдвое большее количество узлов  $N_r$  и, следовательно, бóльшую точность в  $d = 3$  измерениях.

<sup>36</sup>Точнее говоря, мы проверяем дифференциальный закон  $\partial_t E = -J$ , где  $E$  — энергия в интервале  $0 \leq r \leq R_s$ , а исходящий поток  $J = -S_{d-1} r^{d-1} \partial_t \varphi \partial_r \varphi$  вычислен при  $r = R_s$ . Аналогичный закон в  $d = 0$  пространственных измерениях включает дополнительный поток  $J_0$ , приходящий из  $r = 0$ , см. Раздел 3.2.

## Приложение В

### Свойства осциллонов в эффективной теории

Здесь мы приведём подробный вывод нескольких свойств осциллонов, обсуждающихся в Главе 2.

#### В.1 Аналитическое решение при $d = 1$

В случае одного пространственного измерения механическое уравнение (2.27) для профиля осциллона имеет «закон сохранения», т.е. независимую от  $r$  величину

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\partial_r \chi)^2 + U_\omega(\chi) = \frac{2\psi^2}{\mu_I} (\partial_r \psi)^2 + \omega\psi^2 - h, \quad \partial_r \mathcal{E} = 0, \quad (\text{В.1})$$

где  $r = |x|$  и мы перешли от канонически нормированного поля  $\chi(r)$  обратно к  $\psi(r)$  с помощью соотношений (2.25) и (2.26). Напомним, что формфакторы  $\mu_I$  и  $h$  в уравнении (В.1) зависят от  $\psi^2$ . Нас интересуют локализованные решения с асимптотиками  $\psi \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow +\infty$ . Поэтому  $\mathcal{E} = 0$ . Используя выражение (В.1), мы находим

$$r = \int_{\psi}^{\psi_0} \frac{\psi' d\psi' \sqrt{2}}{\sqrt{\mu_I(h - \omega\psi'^2)}}, \quad (\text{В.2})$$

где амплитуда  $\psi_0$  в центре удовлетворяет уравнению  $h(\psi_0^2)/\psi_0^2 = \omega$ . В модели (2.2) мы используем выражения (2.17) и (2.19) для  $\mu_I$  и  $h$  и получаем решение (2.33).

Основная идея аналитического вычисления заряда  $N$  и энергии  $E$  одномерных осциллонов состоит в замене переменной интегрирования в формулах (2.15) и (2.23) с  $r$  на  $\psi$ . Выражая затем  $\partial_r \psi$  из уравнения (В.2), получим

$$N = 2 \int_0^\infty dr \psi^2(r) = 2^{3/2} \int_0^{\psi_0} \frac{\psi^3 d\psi}{\sqrt{\mu_I(h - \omega\psi^2)}} \quad (\text{В.3})$$

и аналогичное выражение для  $E$ . Подставив формфакторы в модели (2.2), мы получаем<sup>37</sup> выражения (2.34), (2.35) из раздела 2.4.1 основного текста.

<sup>37</sup>Дальнейшая замена переменных  $\psi^2 = (2 - 2\omega)(1 - u^2)$  упрощает интегралы.

## В.2 Критерий Вахитова–Колоколова

В данном Приложении мы докажем критерий Вахитова–Колоколова (2.40), нарушение которого сигнализирует о нестабильности осциллонов относительно длинноволновых линейных возмущений. Мы будем работать в главном порядке эффективной теории и использовать энергетическое рассуждение работ [40, 96]. Следует отметить, что построенная нами эффективная теория — довольно необычна. Она включает неканонический градиентный член для  $\theta$  и нелинейную зависимость заряда  $N$  от второго, канонически нормализованного, поля  $\chi$ , см. выражения (2.11) и (2.26). Поэтому применимость критерия Вахитова–Колоколова к нетопологическим солитонам этой теории не является очевидной.

Итак, выясним, действительно ли осциллонное решение  $\chi = \chi(\mathbf{x})$  и  $\theta = \omega t$  минимизирует энергию  $E$  при фиксированном заряде  $N$ , или же это просто нестабильный экстремум. Добавим малые возмущения  $\delta\chi(\mathbf{x})$  и  $\delta\theta(\mathbf{x})$  к полям осциллона таким образом, чтобы заряд  $N$  в уравнении (2.15) остался неизменным:

$$\delta N = 0 \approx \int d^d \mathbf{x} \frac{dI}{d\chi} \delta\chi = (\nu | \delta\chi), \quad (\text{B.4})$$

где мы опустили члены высших порядков по  $\delta\chi$ , ввели  $\nu(\mathbf{x}) = dI/d\chi = \sqrt{\mu_I}$  в соответствии с уравнением (2.25) и определили вещественное скалярное произведение  $(f|g) = \int d^d \mathbf{x} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x})$ . Здесь и далее в этом Приложении будем предполагать, что все коэффициенты, например,  $\mu_I(\mathbf{x}) \equiv \mu_I(\chi(\mathbf{x}))$ , вычисляются на осциллонном решении  $\chi(\mathbf{x})$ . Отметим, что  $\nu(\mathbf{x})$  имеет конечную норму при конечном заряде  $N$ , поскольку при  $|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty$ , где поле мало, выполняется  $\nu^2 = \mu_I \propto \psi^2(\mathbf{x})$  см. асимптотики (2.15) и (2.29).

При фиксированном  $N$  вариации энергии и  $F \equiv E - \omega N$  совпадают. Получим:

$$\delta E = \delta F \approx \frac{1}{2}(\delta\chi | \hat{L}_\chi | \delta\chi) + \frac{1}{2}(\delta\theta | \hat{L}_\theta | \delta\theta), \quad (\text{B.5})$$

где мы использовали выражения (2.23), (2.25) и (2.26) и ввели дифференциальные операторы  $\hat{L}_\chi = -\Delta - U''_\omega(\chi(\mathbf{x}))$  и  $\hat{L}_\theta = -\partial_i \mu_\theta^{-1} \partial_i$ ; штрихи обозначают производные по  $\chi$ . Поскольку  $\mu_\theta \geq 0$  по определению (2.10), оператор  $\hat{L}_\theta$  положительно–определён. Это значит, что осциллоны стабильны, если  $\hat{L}_\chi$  тоже определён положительно в подпространстве (B.4) возмущений, ортогональных к  $\nu$ .

Заметим, что по крайней мере одно собственное значение  $\hat{L}_\chi$  является отрицательным, и единственный вопрос состоит в том, сохраняется ли оно после проекции на подпространство (В.4). Действительно, продифференцировав по  $r$  уравнение профиля (2.27), получим  $(\partial_r \chi | \hat{L}_\chi | \partial_r \chi) = -(d-1)(\partial_r \chi | r^{-2} | \partial_r \chi) < 0$  в  $d > 1$  измерениях. Из этого же рассуждения при  $d = 1$  следует, что  $\partial_x \chi(x)$  является собственным вектором с нулевым собственным значением:  $\hat{L}_\chi | \partial_x \chi) = 0$ . Но у этой функции есть корень,  $\partial_x \chi = 0$  при  $x = 0$ , откуда по осцилляционной теореме следует, что существует собственный вектор с ещё меньшим — отрицательным — собственным значением  $\hat{L}_\chi$ . Таким образом, в пространстве любой размерности  $d \geq 1$  оператор  $\hat{L}_\chi$  имеет отрицательное собственное значение. В дальнейшем мы будем использовать ортонормированный базис собственных векторов  $\hat{L}_\chi$  с собственными значениями  $w_n$ :  $\hat{L}_\chi | n) = w_n | n)$ , где  $w_0 < 0$ .

В ортогональном к вектору  $|\nu\rangle$  подпространстве (В.4) задача на собственные значения  $\hat{L}_\chi$  имеет вид:

$$\hat{L}_\chi |\delta\chi) - C |\nu) = w |\delta\chi). \quad (\text{В.6})$$

Здесь  $w$  — новое собственное значение, а множитель  $C = (\nu | \hat{L}_\chi | \delta\chi) / (\nu | \nu)$  гарантирует, что левая часть уравнения ортогональна  $|\nu\rangle$ . Уравнение (В.6) может быть решено в полном ортонормированном базисе собственных векторов  $\hat{L}_\chi$ :  $|\delta\chi) = \sum_n \delta\chi_n | n)$ , где  $\delta\chi_n = C (n | \nu) / (w_n - w)$ . Отметим, что собственное значение  $w$  входит в выражение для собственного вектора  $|\delta\chi)$ .

Собственные значения  $w$  в подпространстве (В.4) можно найти, накладывая условие  $(\nu | \delta\chi) = 0$ . Мы получаем уравнение

$$G(w) \equiv \sum'_n (n | \nu)^2 / (w_n - w) = 0. \quad (\text{В.7})$$

Здесь следует отметить, что  $\hat{L}_\chi$  имеет нулевые векторы  $\partial_i \chi(\mathbf{x})$ , соответствующие сдвиговой симметрии. Однако они не дают вклад в уравнение (В.7), поскольку  $(\partial_i \chi | \nu) = 0$  как интеграл от полной производной. Более того, в случае общего положения у  $\hat{L}_\chi$  нет других нулевых мод. В уравнении (В.7) и далее мы суммируем по всем собственным модам  $\hat{L}_\chi$ , кроме нулевых; мы обозначаем это, добавляя к суммам штрихи.

По построению функция  $G(w)$  растёт,  $\partial_w G > 0$ , и имеет полюса при значениях  $w = w_n$ , совпадающих со спектром оператора  $\hat{L}_\chi$  в полном пространстве. В частности,  $G \rightarrow -\infty$  при стремлении  $w$  к  $w_0 < 0$  сверху. Мы

закключаем, что решение уравнения (B.7) существует при  $w < 0$  если  $G(0) > 0$ , т.е.

$$0 < G(0) = \sum'_n \frac{(\nu|n)(n|\nu)}{w_n} = (\nu|\hat{L}_\chi^{-1}|\nu), \quad (\text{B.8})$$

где неоднозначность определения  $\hat{L}_\chi^{-1}$ , возникающая из-за присутствия нулевых мод, исчезает после взятия матричного элемента с  $|\nu\rangle$ . Напомним, что условие (B.8) гарантирует наличие отрицательного собственного значения  $w < 0$  оператора  $\hat{L}_\chi$  в подпространстве (B.4), т.е. означает нестабильность осциллона  $\chi(\mathbf{x})$ .

Чтобы упростить выражение (B.8), продифференцируем уравнение профиля (2.27) по частоте осциллона  $\omega$ . Это даёт  $\hat{L}_\chi \partial_\omega \chi = dI/d\chi = \nu(\mathbf{x})$  или, обращая,  $\hat{L}_\chi^{-1}|\nu\rangle = |\partial_\omega \chi\rangle$ . Подставляя последнее равенство в уравнение (B.8) и выражая результат через  $dN/d\omega$ , получим неравенство, обратное к критерию (2.40), т.е. условие нестабильности осциллонов.

## В.3 Эффективное действие второго порядка

### В.3.1 Общие положения

При построении эффективной теории поля мы раскладываем уравнение (2.46) в ряд Тейлора по быстроосциллирующим возмущениям  $\delta I$  и  $\delta\theta$ , после чего усредняем результат по периоду. Напомним, что такой подход связан с тем, что интеграл по времени в действии обнуляет смешивание между быстрыми и медленными переменными, например,  $\int dt \bar{I} \partial_t \delta\theta \approx \int dt \bar{I} \langle \partial_t \delta\theta \rangle = 0$ . В дальнейшем мы будем активно пользоваться этим упрощением.

При этом, усреднение величины  $\Phi \Delta \Phi$  вызывает сложности, поскольку поле  $\Phi$  само быстро осциллирует с  $\bar{\theta}$ . Поэтому прежде чем раскладывать лагранжиан по  $\delta I$  и  $\delta\theta$ , мы его преобразуем: проинтегрируем по частям, выразим  $\partial_t \delta I$  и  $\partial_t \delta\theta$  из точных уравнений на возмущения (2.47), а затем добавим и вычтем слагаемое  $\Phi \Delta \bar{\Phi}/2$ , где  $\bar{\Phi} \equiv \Phi(\bar{I}, \bar{\theta})$ . Это даст

$$\mathcal{S} = \int dt d^d \mathbf{x} \left[ \bar{I} \partial_t \bar{\theta} + \frac{1}{2} \Phi \Delta \bar{\Phi} - h + \frac{1}{2} \Omega \delta I + \frac{\Delta \Phi}{2} (\Phi - \bar{\Phi} - \partial_I \Phi \delta I - \partial_\theta \Phi \delta \theta) \right], \quad (\text{B.9})$$

где все величины без черты по-прежнему зависят от  $I = \bar{I} + \delta I$  и  $\theta = \bar{\theta} + \delta\theta$ .

Во втором порядке ЭТП мы сохраняем квадраты  $\delta I$  и  $\delta\theta$  и пренебрегаем более высокими степенями. Скобка в последнем члене уравнения (В.9) уже по ним квадратична; поэтому мы можем заменить  $\Delta\Phi$  перед ней на  $\Delta\bar{\Phi}$ . Раскрывая подынтегральное выражение, мы получим  $\mathcal{S} \approx \mathcal{S}_{\text{eff}}^{(1)} + \mathcal{S}_{\text{eff}}^{(2)}$ , где

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\text{eff}}^{(1)} &= \int dt d^d \mathbf{x} \left[ \bar{I} \partial_t \bar{\theta} - \bar{h} + \frac{1}{2} \bar{\Phi} \Delta \bar{\Phi} \right], \\ \mathcal{S}_{\text{eff}}^{(2)} &= \frac{1}{2} \int dt d^d \mathbf{x} \left[ \Delta \bar{\Phi} \partial_{\bar{I}} \bar{\Phi} \delta I + \Delta \bar{\Phi} \partial_{\bar{\theta}} \bar{\Phi} \delta \theta \right].\end{aligned}$$

Последний шаг состоит в том, чтобы усреднить каждый член по периоду. После этого  $\mathcal{S}_{\text{eff}}^{(1)}$  совпадает с действием (2.10), (2.11) в главном порядке. Поправка  $\mathcal{S}_{\text{eff}}^{(2)}$  принимает вид (2.52) после подстановки решений (2.49) уравнений на возмущения и использования формул (2.48).<sup>38</sup>

Теперь подставим в эффективное действие второго порядка стационарную конфигурацию вида  $\bar{\theta} = \omega t$  и  $\bar{I} = \bar{I}(\mathbf{x})$ . Именно этот частный случай важен для описания осциллонов. Удобно ввести обозначения

$$A(\bar{I}, \bar{\theta}) = \mathcal{I} [\partial_{\bar{I}} \bar{\Phi} \partial_{\bar{\theta}} \bar{\Phi}] , \quad B(\bar{I}, \bar{\theta}) = (\partial_{\bar{I}} \bar{\Phi})^2 - \langle (\partial_{\bar{I}} \bar{\Phi})^2 \rangle . \quad (\text{В.10})$$

Отметим, что некоторые комбинации высших производных  $\bar{\Phi}$  могут быть выражены через эти величины: например, используя тождество  $\mathcal{I}[\partial_{\bar{\theta}} f] = f - \langle f \rangle$ , получим  $\mathcal{I}[\partial_{\bar{I}}^2 \bar{\Phi} \partial_{\bar{\theta}} \bar{\Phi}] = \partial_{\bar{I}} A - B/2$ . Источники (2.48) выражаются через  $A$  и  $B$  следующим образом:

$$j_I = B \Delta \bar{I} + \frac{1}{2} \partial_{\bar{I}} B (\partial_i \bar{I})^2 , \quad \mathcal{I}[j_{\theta}] = A \Delta \bar{I} + \frac{1}{2} (2 \partial_{\bar{I}} A - B) (\partial_i \bar{I})^2 . \quad (\text{В.11})$$

Подставив эти выражения в действие (2.52), получим поправку второго порядка ( $-F^{(2)}$ ) к лагранжиану

$$F^{(2)} = - \int d^d \mathbf{x} \left[ c_1 (\partial_i \bar{I})^4 + c_2 (\partial_i \bar{I})^2 \Delta \bar{I} + c_3 (\Delta \bar{I})^2 \right] , \quad (\text{В.12})$$

где формфакторы  $c_i$  зависят от  $\bar{I}$ :

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{1}{4\omega} \langle \partial_{\bar{I}} B (2 \partial_{\bar{I}} A - B) \rangle - \frac{\partial_{\bar{I}} \Omega}{8\omega^2} \langle (2 \partial_{\bar{I}} A - B)^2 \rangle , \\ c_2 &= \frac{1}{2\omega} \langle A \partial_{\bar{I}} B + 2B \partial_{\bar{I}} A - B^2 \rangle - \frac{\partial_{\bar{I}} \Omega}{2\omega^2} \langle 2A \partial_{\bar{I}} A - AB \rangle , \\ c_3 &= \frac{1}{\omega} \langle AB \rangle - \frac{\partial_{\bar{I}} \Omega}{2\omega^2} \langle A^2 \rangle .\end{aligned} \quad (\text{В.13})$$

<sup>38</sup>Мы также проинтегрировали по частям:  $\langle \mathcal{I}[f] g \rangle = -\langle f \mathcal{I}[g] \rangle$  если  $\langle f \rangle = \langle g \rangle = 0$ .

Отметим, что  $c_i$  квадратичны по  $A$  и  $B$  и поэтому содержат по четыре множителя  $\bar{\Phi}$  в каждом члене. Переходя к полю  $\psi(\mathbf{x}) = \sqrt{\bar{I}}$ , мы получим лагранжиан второго порядка (2.54) с коэффициентами

$$d_1 = 16\psi^4 c_1 + 8\psi^2 c_2 + 4c_3, \quad d_2 = 8(\psi^2 c_2 + c_3), \quad d_3 = 4\psi^2 c_3, \quad (\text{B.14})$$

где последняя формула совпадает с (2.55) после подстановки  $c_3$  и определений (B.10).

### В.3.2 Поправки в модели с плоским потенциалом

Теперь найдём формфакторы второго порядка  $c_i$  и  $d_i$  в модели (2.2). Нам будет удобно вместо  $\bar{\theta}$  использовать комплексную переменную  $z = -\exp(2i\bar{\theta})$ , что позволит вычислять средние по периоду как контурные интегралы по единичной окружности  $|z| = 1$ , см. сноску 18. Функция  $\Phi(\bar{I}, z)$  в выражении (2.18) имеет полюса при  $z = z_1$  и  $z = z_2$ ,

$$z_1 = 2/\bar{I} - 1, \quad z_2 = \bar{I}/(2 - \bar{I}) = z_1^{-1}, \quad (\text{B.15})$$

которые будут важны далее.

Подставляя выражение (2.18) для  $\Phi$  в определения (B.10), получим  $A = N_A \xi_A$  и  $B = N_A \xi_B$ , где мы выделили независящий от  $\theta$  множитель

$$N_A = [2\bar{I}(1 - \bar{I})(2 - \bar{I})]^{-1} \quad (\text{B.16})$$

и обозначили

$$\xi_A = \ln(1 - z_2/z) + \ln(1 - z/z_1), \quad \xi_B = -\frac{2}{\bar{I}(2 - \bar{I})} \left( \frac{z}{z_1 - z} + \frac{z_2}{z - z_2} \right). \quad (\text{B.17})$$

Примечательно, что  $\xi_B = \partial_{\bar{I}} \xi_A$ . Используя это свойство, можно выразить все средние по периоду в формфакторах (B.13) через величины  $\langle \xi_A^2 \rangle$  и  $\langle (\partial_{\bar{I}} \xi_A)^2 \rangle$ , а также их производные по  $\bar{I}$ . Например, третий коэффициент равен

$$c_3 = \frac{N_A^2}{2\omega^2} (\omega \partial_{\bar{I}} \langle \xi_A^2 \rangle + \langle \xi_A^2 \rangle), \quad (\text{B.18})$$

а остальные выглядят похожим образом; также следует помнить, что  $\Omega = 1 - \bar{I}$  в нашей модели. Вычисляя средние через контурные интегралы по  $z$ , получим

$$\langle \xi_A^2 \rangle = 2 \text{Li}_2(z_2^2) \quad \text{и} \quad \langle (\partial_{\bar{I}} \xi_A)^2 \rangle = \frac{2}{(1 - \bar{I})(2 - \bar{I})^2}, \quad (\text{B.19})$$

где  $\text{Li}_2(w) = -\int_0^w dw' \ln(1-w')/w'$  — дилогарифм.

Окончательный ответ для коэффициентов  $c_i$  имеет вид:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\ln(1-z_2^2) \partial_{\bar{I}} N_A^2}{\omega \bar{I} (2-\bar{I})} \left\{ \frac{2-2\bar{I}}{\bar{I}(2-\bar{I})} - \frac{1}{\omega} - \frac{\partial_{\bar{I}} N_A}{N_A} \right\} + \frac{(\partial_{\bar{I}} N_A)^2}{\omega^2} \text{Li}_2(z_2^2) \\
&\quad + \frac{N_A^2}{4\omega(1-\bar{I})(2-\bar{I})^2} \left\{ \frac{4-3\bar{I}}{(1-\bar{I})(2-\bar{I})} + 6 \frac{\partial_{\bar{I}} N_A}{N_A} + \frac{1}{\omega} \right\}, \\
c_2 &= \frac{2 \ln(1-z_2^2) N_A^2}{\omega \bar{I} (2-\bar{I})} \left\{ \frac{2-2\bar{I}}{\bar{I}(2-\bar{I})} - \frac{3\partial_{\bar{I}} N_A}{N_A} - \frac{1}{\omega} \right\} \\
&\quad + \frac{2N_A^2}{\omega(1-\bar{I})(2-\bar{I})^2} + \frac{\partial_{\bar{I}} N_A^2}{\omega^2} \text{Li}_2(z_2^2), \\
c_3 &= \frac{N_A^2}{\omega} \left\{ \frac{1}{\omega} \text{Li}_2(z_2^2) - \frac{4 \ln(1-z_2^2)}{\bar{I}(2-\bar{I})} \right\},
\end{aligned} \tag{B.20}$$

где  $z_2$  и  $N_A$  приведены в формулах (B.15), (B.16). Коэффициенты  $d_i$ , фигурирующие в действии (2.54), являются линейными комбинациями (B.14) коэффициентов  $c_i$ .

## Литература

- [1] Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. Пер. с англ. — М. : Мир, 1985.
- [2] Рубаков В.А. Классические калибровочные поля: бозонные теории. — М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014.
- [3] Manton N.S. and Sutcliffe P. Topological solitons. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. — Cambridge University Press, 2004. — ISBN: 978-0-521-04096-9.
- [4] Новокшённов В.Ю. Введение в теорию солитонов. — Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002.
- [5] Babelon O., Bernard D., and Talon M. Introduction to Classical Integrable Systems. — Cambridge University Press, 2007.
- [6] Мива Т., Джимбо М. и Датэ Э. Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечномерные алгебры. — М. : МЦНМО, 2005.
- [7] Malomed B.A., Oboznov V.A., and Ustinov A.V. “Supersolitons” in periodically inhomogeneous long Josephson junctions // Sov. Phys. JETP. — 1990. — Vol. 70. — P. 518.
- [8] Malomed Boris A. Superfluxons in periodically inhomogeneous long Josephson junctions // Phys. Rev. B. — 1990. — Vol. 41. — P. 2616.
- [9] Fogel M.B., Trullinger S.E., Bishop A.R., and Krumhansl J.A. Dynamics of sine-Gordon solitons in the presence of perturbations // Phys. Rev. B. — 1977. — Vol. 15. — P. 1578.
- [10] Currie J.F., Trullinger S.E., Bishop A.R., and Krumhansl J.A. Numerical simulation of sine-Gordon soliton dynamics in the presence of perturbations // Phys. Rev. B. — 1977. — Vol. 15. — P. 5567.
- [11] Scharf Rainer, Kivshar Yuri S., Sánchez Angel, and Bishop Alan R. Sine-Gordon kink-antikink generation on spatially periodic potentials // Phys. Rev. A. — 1992. — Vol. 45. — P. R5369.

- [12] Sánchez Angel, Scharf Rainer, Bishop Alan R., and Vázquez Luis. Sine-Gordon breathers on spatially periodic potentials // *Phys. Rev. A.* — 1992. — Vol. 45. — P. 6031.
- [13] Hai, Wenhua, Zhang, Zelan, and Fang, Jianshu. Chaotic solitons in Sine-Gordon system // *Eur. Phys. J. B.* — 2001. — Vol. 21, no. 1. — P. 103.
- [14] Kudryavtsev Alexander Evgenyevich. Solitonlike Solutions for a Higgs Scalar Field // *JETP Lett.* — 1975. — Vol. 22. — P. 82.
- [15] Bogolyubsky I. L. and Makhankov V. G. On the Pulsed Soliton Lifetime in Two Classical Relativistic Theory Models // *JETP Lett.* — 1976. — Vol. 24. — P. 12.
- [16] Zhang Hong-Yi, Amin Mustafa A., Copeland Edmund J., Saffin Paul M., and Lozanov Kaloian D. Classical Decay Rates of Oscillons // *JCAP.* — 2020. — Vol. 07. — P. 055. — 2004.01202.
- [17] Olle Jan, Pujolas Oriol, and Rompineve Fabrizio. Recipes for oscillon longevity // *JCAP.* — 2021. — Vol. 09. — P. 015. — 2012.13409.
- [18] Kolb Edward W. and Tkachev Igor I. Nonlinear axion dynamics and formation of cosmological pseudosolitons // *Phys. Rev. D.* — 1994. — Vol. 49. — P. 5040. — astro-ph/9311037.
- [19] Vaquero Alejandro, Redondo Javier, and Stadler Julia. Early seeds of axion miniclusters // *JCAP.* — 2019. — Vol. 04. — P. 012. — 1809.09241.
- [20] Buschmann Malte, Foster Joshua W., and Safdi Benjamin R. Early-Universe Simulations of the Cosmological Axion // *Phys. Rev. Lett.* — 2020. — Vol. 124. — P. 161103. — 1906.00967.
- [21] O’Hare Ciaran A. J., Pierobon Giovanni, Redondo Javier, and Wong Yvonne Y. Y. Simulations of axionlike particles in the postinflationary scenario // *Phys. Rev. D.* — 2022. — Vol. 105. — P. 055025. — 2112.05117.
- [22] Gleiser Marcelo. Pseudostable bubbles // *Phys. Rev. D.* — 1994. — Vol. 49. — P. 2978. — hep-ph/9308279.

- [23] Gleiser Marcelo, Graham Noah, and Stamatopoulos Nikitas. Long-Lived Time-Dependent Remnants During Cosmological Symmetry Breaking: From Inflation to the Electroweak Scale // *Phys. Rev. D.* — 2010. — Vol. 82. — P. 043517. — 1004.4658.
- [24] Copeland Edmund J., Gleiser M., and Muller H. R. Oscillons: Resonant configurations during bubble collapse // *Phys. Rev. D.* — 1995. — Vol. 52. — P. 1920. — hep-ph/9503217.
- [25] Dymnikova I., Koziel L., Khlopov M., and Rubin S. Quasilumps from first order phase transitions // *Grav. Cosmol.* — 2000. — Vol. 6. — P. 311–318. — hep-th/0010120.
- [26] Bond J. Richard, Braden Jonathan, and Mersini-Houghton Laura. Cosmic bubble and domain wall instabilities III: The role of oscillons in three-dimensional bubble collisions // *JCAP.* — 2015. — Vol. 09. — P. 004. — 1505.02162.
- [27] Amin Mustafa A., Easter Richard, and Finkel Hal. Inflaton Fragmentation and Oscillon Formation in Three Dimensions // *JCAP.* — 2010. — Vol. 12. — P. 001. — 1009.2505.
- [28] Amin Mustafa A., Easter Richard, Finkel Hal, Flauger Raphael, and Hertzberg Mark P. Oscillons After Inflation // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Vol. 108. — P. 241302. — 1106.3335.
- [29] Hong Jeong-Pyong, Kawasaki Masahiro, and Yamazaki Masahito. Oscillons from Pure Natural Inflation // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Vol. 98. — P. 043531. — 1711.10496.
- [30] Sang Yu and Huang Qing-Guo. Oscillons during Dirac-Born-Infeld preheating // *Phys. Lett. B.* — 2021. — Vol. 823. — P. 136781. — 2012.14697.
- [31] Zhou Shuang-Yong, Copeland Edmund J., Easter Richard, Finkel Hal, Mou Zong-Gang, and Saffin Paul M. Gravitational Waves from Oscillon Preheating // *JHEP.* — 2013. — Vol. 10. — P. 026. — 1304.6094.
- [32] Liu Jing, Guo Zong-Kuan, Cai Rong-Gen, and Shiu Gary. Gravitational Waves from Oscillons with Cuspy Potentials // *Phys. Rev. Lett.* — 2018. — Vol. 120. — P. 031301. — 1707.09841.

- [33] Lozanov Kaloian D. and Amin Mustafa A. End of inflation, oscillons, and matter-antimatter asymmetry // *Phys. Rev. D.* — 2014. — Vol. 90. — P. 083528. — 1408.1811.
- [34] Sang Yu and Huang Qing-Guo. Stochastic Gravitational-Wave Background from Axion-Monodromy Oscillons in String Theory During Preheating // *Phys. Rev. D.* — 2019. — Vol. 100, no. 6. — P. 063516. — 1905.00371.
- [35] Cotner Eric, Kusenko Alexander, Sasaki Misao, and Takhistov Volodymyr. Analytic Description of Primordial Black Hole Formation from Scalar Field Fragmentation // *JCAP.* — 2019. — Vol. 10. — P. 077. — 1907.10613.
- [36] Kou Xiao-Xiao, Tian Chi, and Zhou Shuang-Yong. Oscillon Preheating in Full General Relativity // *Class. Quant. Grav.* — 2021. — Vol. 38. — P. 045005. — 1912.09658.
- [37] Fodor Gyula, Forgacs Peter, Horvath Zalan, and Lukacs Arpad. Small amplitude quasi-breathers and oscillons // *Phys. Rev. D.* — 2008. — Vol. 78. — P. 025003. — 0802.3525.
- [38] Fodor Gyula, Forgacs Peter, Horvath Zalan, and Mezei Mark. Computation of the radiation amplitude of oscillons // *Phys. Rev. D.* — 2009. — Vol. 79. — P. 065002. — 0812.1919.
- [39] Fodor Gyula, Forgacs Peter, Horvath Zalan, and Mezei Mark. Radiation of scalar oscillons in 2 and 3 dimensions // *Phys. Lett. B.* — 2009. — Vol. 674. — P. 319. — 0903.0953.
- [40] Zakharov V. E. and Kuznetsov E. A. Solitons and collapses: two evolution scenarios of nonlinear wave systems // *Phys. Usp.* — 2012. — Vol. 55, no. 6. — P. 535–556. — Access mode: <https://ufn.ru/en/articles/2012/6/a/>.
- [41] Kasuya S., Kawasaki M., and Takahashi Fuminobu. I-balls // *Phys. Lett. B.* — 2003. — Vol. 559. — P. 99. — hep-ph/0209358.
- [42] Kawasaki Masahiro, Takahashi Fuminobu, and Takeda Naoyuki. Adiabatic Invariance of Oscillons/I-balls // *Phys. Rev. D.* — 2015. — Vol. 92, no. 10. — P. 105024. — 1508.01028.

- [43] McLachlan Robert I. Explicit Symplectic Splitting Methods Applied to PDEs // Lectures in Applied Mathematics. — 1993. — Vol. 29. — P. 325.
- [44] Regan Helen M. Von Neumann Stability Analysis of Symplectic Integrators Applied to Hamiltonian PDEs // Journal of Computational Mathematics. — 2002. — Vol. 20. — P. 611.
- [45] Frigo M. and Johnson S. G. The Design and Implementation of FFTW3 // IEEE Proc. — 2005. — Vol. 93. — P. 216.
- [46] Mikeska H J. Solitons in a one-dimensional magnet with an easy plane // Journal of Physics C: Solid State Physics. — 1977. — Vol. 11, no. 1. — P. L29.
- [47] Kumar P. and Samalam V. K. Solitons in an easy-plane ferromagnetic chain // Journal of Applied Physics. — 1982. — Vol. 53, no. 3. — P. 1856.
- [48] Kawasaki Tatu. Dynamics of Solitons in an Easy-Plane Ferromagnetic Chain: A Discrete Lattice Model // Progress of Theoretical Physics. — 1986. — Vol. 75, no. 3. — P. 534.
- [49] Whitlock Nicholas K. and Bouchoule Isabelle. Relative phase fluctuations of two coupled one-dimensional condensates // Phys. Rev. A. — 2003. — Vol. 68. — P. 053609.
- [50] Gritsev Vladimir, Polkovnikov Anatoli, and Demler Eugene. Linear response theory for a pair of coupled one-dimensional condensates of interacting atoms // Phys. Rev. B. — 2007. — Vol. 75. — P. 174511.
- [51] Schweigler Thomas, Kasper Valentin, Erne Sebastian, Mazets Igor, Rauer Bernhard, Cataldini Federica, Langen Tim, Gasenzer Thomas, Berges Jürgen, and Schmiedmayer Jörg. Experimental characterization of a quantum many-body system via higher-order correlations // Nature. — 2017. — Vol. 545. — P. 323.
- [52] Vasenko S., Likharev K., and Semenov V. Static properties of distributed inhomogeneous Josephson junctions // Sov. Phys. JETP. — 1981. — Vol. 54. — P. 766.
- [53] McLaughlin D. W. and Scott A. C. Perturbation analysis of fluxon dynamics // Phys. Rev. A. — 1978. — Vol. 18. — P. 1652.

- [54] Levkov D. G., Maslov V. E., and Nugaev E. Ya. Chaotic solitons in driven sine-Gordon model // *Chaos Solitons and Fractals*. — 2020. — Vol. 139. — P. 110079. — 2004.13052.
- [55] Levkov D. G., Maslov V. E., Nugaev E. Ya., and Panin A. G. An Effective Field Theory for large oscillons // *JHEP*. — 2022. — Vol. 12. — P. 079. — 2208.04334.
- [56] Levkov D. G. and Maslov V. E. Analytic description of monodromy oscillons // *Phys. Rev. D*. — 2023. — Vol. 108. — P. 063514. — 2306.06171.
- [57] Zaslavsky G.M. *The Physics of Chaos in Hamiltonian Systems*. — Imperial College Press, 2007. — ISBN: 9781860947957.
- [58] Wysin G, Bishop A R, and Kumar P. Soliton dynamics on an easy-plane ferromagnetic chain // *Journal of Physics C: Solid State Physics*. — 1984. — Vol. 17, no. 33. — P. 5975.
- [59] Strogatz Steven H. *Nonlinear Dynamics And Chaos*. — Perseus Books, 1994. — ISBN: 9780201543443.
- [60] Arnol'd Vladimir. Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian // *Russ. Math. Surv.* — 1963. — Vol. 18. — P. 9.
- [61] Arnol'd V.I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. — Springer New York, 1989. — ISBN: 978-1-4757-2063-1.
- [62] Moser J. On Invariant Curves of Area-Preserving Mapping of an Annulus // *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl.* — 1962. — Vol. II. — P. 1.
- [63] Arnold V.I. *Ordinary Differential Equations*. — MIT Press, 1978. — ISBN: 9780262510189.
- [64] Adler R.L., Konheim A.G., and McAndrew M.H. Topological entropy // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1965. — Vol. 114. — P. 309.
- [65] Ott Edward. Strange attractors and chaotic motions of dynamical systems // *Rev. Mod. Phys.* — 1981. — Vol. 53. — P. 655.

- [66] Campbell David K., Schonfeld Jonathan F., and Wingate Charles A. Resonance structure in kink-antikink interactions in  $\phi^4$  theory // *Physica D.* — 1983. — Vol. 9. — P. 1.
- [67] Anninos Peter, Oliveira Samuel, and Matzner Richard A. Fractal structure in the scalar  $\lambda(\varphi^2 - 1)^2$  theory // *Phys. Rev. D.* — 1991. — Vol. 44. — P. 1147.
- [68] Levkov D.G., Panin A.G., and Sibiryakov S.M. Complex trajectories in chaotic dynamical tunneling // *Phys. Rev. E.* — 2007. — Vol. 76. — P. 046209. — nlin/0701063.
- [69] Theiler James. Estimating fractal dimension // *J. Opt. Soc. Am. A.* — 1990. — Vol. 7, no. 6. — P. 1055.
- [70] Sarkar N. and Chaudhuri B. B. An efficient differential box-counting approach to compute fractal dimension of image // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics.* — 1994. — Vol. 24, no. 1. — P. 115.
- [71] Ott Edward. *Chaos in Dynamical Systems.* — 2 ed. — Cambridge University Press, 2002.
- [72] Singer S.F. *Symmetry in Mechanics: A Gentle, Modern Introduction.* — Birkhäuser, 2004. — ISBN: 9780817641450.
- [73] Yamashita Mamoru. Multisolitons and Soliton Lattices in Sine-Gordon System with Variable Amplitude: Attractive Interaction between Solitons // *Progress of Theoretical Physics.* — 1985. — Vol. 74, no. 3. — P. 622.
- [74] Scharf Rainer and Bishop A. R. Soliton chaos in the nonlinear Schrödinger equation with spatially periodic perturbations // *Phys. Rev. A.* — 1992. — Vol. 46. — P. R2973.
- [75] Gray C. G. and Taylor Edwin F. When action is not least // *American Journal of Physics.* — 2007. — Vol. 75, no. 5. — P. 434.
- [76] Kolb Edward W. and Tkachev Igor I. Axion miniclusters and Bose stars // *Phys. Rev. Lett.* — 1993. — Vol. 71. — P. 3051. — hep-ph/9303313.
- [77] Piette B. and Zakrzewski W. J. Metastable stationary solutions of the radial d-dimensional sine-Gordon model // *Nonlinearity.* — 1998. — Vol. 11. — P. 1103.

- [78] Gleiser Marcelo and Thorarinson Joel. A Class of Nonperturbative Configurations in Abelian-Higgs Models: Complexity from Dynamical Symmetry Breaking // Phys. Rev. D. — 2009. — Vol. 79. — P. 025016. — 0808.0514.
- [79] Amin Mustafa A. and Shirokoff David. Flat-top oscillons in an expanding universe // Phys. Rev. D. — 2010. — Vol. 81. — P. 085045. — 1002.3380.
- [80] Salmi Petja and Hindmarsh Mark. Radiation and Relaxation of Oscillons // Phys. Rev. D. — 2012. — Vol. 85. — P. 085033. — 1201.1934.
- [81] Amin Mustafa A. K-oscillons: Oscillons with noncanonical kinetic terms // Phys. Rev. D. — 2013. — Vol. 87. — P. 123505. — 1303.1102.
- [82] Sakstein Jeremy and Trodden Mark. Oscillons in Higher-Derivative Effective Field Theories // Phys. Rev. D. — 2018. — Vol. 98. — P. 123512. — 1809.07724.
- [83] Ollé Jan, Pujolàs Oriol, and Rompineve Fabrizio. Oscillons and Dark Matter // JCAP. — 2020. — Vol. 02. — P. 006. — 1906.06352.
- [84] Cyncynates David and Giurgica-Tiron Tudor. Structure of the oscillon: The dynamics of attractive self-interaction // Phys. Rev. D. — 2021. — Vol. 103, no. 11. — P. 116011. — 2104.02069.
- [85] Zhang Hong-Yi, Jain Mudit, and Amin Mustafa A. Polarized vector oscillons // Phys. Rev. D. — 2022. — Vol. 105. — P. 096037. — 2111.08700.
- [86] Kallosh Renata and Linde Andrei. Universality Class in Conformal Inflation // JCAP. — 2013. — Vol. 07. — P. 002. — 1306.5220.
- [87] Gleiser Marcelo and Sornborger Andrew. Longlived localized field configurations in small lattices: Application to oscillons // Phys. Rev. E. — 2000. — Vol. 62. — P. 1368–1374. — patt-sol/9909002.
- [88] Landau Lev D. and Lifshitz Evgeny M. Course of Theoretical Physics. Volume 1. Mechanics. — Butterworth-Heinemann, 1976. — ISBN: 978-0-7506-2896-9.
- [89] Coleman Sidney R. Q-Balls // Nucl. Phys. B. — 1985. — Vol. 262. — P. 263. — [Erratum: Nucl.Phys.B 269, 744 (1986)].

- [90] Nugaev E. Ya. and Shkerin A. V. Review of Nontopological Solitons in Theories with  $U(1)$ -Symmetry // J. Exp. Theor. Phys. — 2020. — Vol. 130, no. 2. — P. 301–320. — 1905.05146.
- [91] Adib Artur B., Gleiser Marcelo, and Almeida Carlos A. S. Long lived oscillons from asymmetric bubbles: Existence and stability // Phys. Rev. D. — 2002. — Vol. 66. — P. 085011. — hep-th/0203072.
- [92] Dmitriev A. S., Levkov D. G., Panin A. G., Pushnaya E. K., and Tkachev I. I. Instability of rotating Bose stars // Phys. Rev. D. — 2021. — Vol. 104. — P. 023504. — 2104.00962.
- [93] Dashen Roger F., Hasslacher Brosl, and Neveu Andre. The Particle Spectrum in Model Field Theories from Semiclassical Functional Integral Techniques // Phys. Rev. D. — 1975. — Vol. 11. — P. 3424.
- [94] Kosevich A.M. and Kovalev A.S. Self-localization of vibrations in a one-dimensional anharmonic chain // JETP. — 1975. — Vol. 40. — P. 891.
- [95] Fodor Gyula. A review on radiation of oscillons and oscillatons : Ph.D. thesis ; Wigner RCP, Budapest. — 2019. — 1911.03340.
- [96] Vakhitov N. G. and Kolokolov A. A. Stationary solutions of the wave equation in a medium with nonlinearity saturation // Radiophys. Quantum Electron. — 1973. — Vol. 16. — P. 783.
- [97] Tkachev I. I. An Axionic Laser in the Center of a Galaxy? // Phys. Lett. B. — 1987. — Vol. 191. — P. 41–45.
- [98] Levkov D. G., Panin A. G., and Tkachev I. I. Radio-emission of axion stars // Phys. Rev. D. — 2020. — Vol. 102, no. 2. — P. 023501. — 2004.05179.
- [99] Segur H. and Kruskal M. D. Nonexistence of Small-Amplitude Breather Solutions in  $\phi^4$  Theory // Phys. Rev. Lett. — 1987. — Vol. 58. — P. 747.
- [100] Gleiser Marcelo. d-dimensional oscillating scalar field lumps and the dimensionality of space // Phys. Lett. B. — 2004. — Vol. 600. — P. 126–132. — hep-th/0408221.

- [101] Silverstein Eva and Westphal Alexander. Monodromy in the CMB: Gravity Waves and String Inflation // Phys. Rev. D. — 2008. — Vol. 78. — P. 106003. — 0803.3085.
- [102] McAllister Liam, Silverstein Eva, and Westphal Alexander. Gravity Waves and Linear Inflation from Axion Monodromy // Phys. Rev. D. — 2010. — Vol. 82. — P. 046003. — 0808.0706.
- [103] Cicoli Michele, Conlon Joseph P., Maharana Anshuman, Parameswaran Susha, Quevedo Fernando, and Zavala Ivonne. String Cosmology: from the Early Universe to Today. — 2023. — 2303.04819.
- [104] Lozanov Kaloian D., Sasaki Misao, and Takhistov Volodymyr. Universal Gravitational Wave Signatures of Cosmological Solitons. — 2023. — 2304.06709.
- [105] Sagdeev R.Z., Usikov D.A., and Zaslavsky G.M. Nonlinear Physics - From the Pendulum to Turbulence and Chaos. — Harwood Academic Publishers, 1988.
- [106] NIST Handbook of Mathematical Functions / ed. by Oliver F.W., Lozier D.W., Boisvert R.F., and Clark C.W. — Cambridge University Press, 2010. — ISBN: 9780521140638.