

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт ядерных исследований Российской академии наук

На правах рукописи

Фиткевич Максим Дмитриевич

**Двумерная дилатонная гравитация с
динамической границей**

01.04.02 – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
кандидат физ.-мат. наук
Левков Дмитрий Геннадиевич

Москва – 2020

Содержание

Введение	4
Глава 1. Классическая модель КГХС с границей	15
1.1. Введение к главе	15
1.2. Обзор модели КГХС	17
1.3. Модель с динамической границей	25
1.4. Точные аналитические решения	33
1.5. Критические явления	46
1.6. Заключение к главе	51
Глава 2. Квазиклассическая модель РСТ с границей	53
2.1. Введение к главе	53
2.2. Модель РСТ с согласованными граничными условиями	55
2.3. Описание процесса испарения	59
2.4. Возвращение к информационному парадоксу	68
2.5. Заключение к главе	72
Глава 3. Квазиклассическая S-матрица для гравитационного рассеяния	75
3.1. Введение к главе	75
3.2. Классические решения в модели с точечной частицей	76
3.3. Амплитуда рассеяния	78
3.4. Интерпретация результата	83
3.5. Заключение к главе	85
Заключение	86

Приложение А. Вывод уравнений	88
А.1. Модель КГХС	88
А.2. Модель РСТ	91
А.3. Сохранение энергии	94
Приложение Б. Уравнения для точечной частицы	95
Б.1. Условия сшивки и уравнение движения частицы	95
Б.2. Метод регуляризации	96
Б.3. Вычисление эффективного действия	97
Приложение В. Энтропия запутывания в КфТП	103
Литература	105

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования

Регистрация гравитационных волн в экспериментах LIGO и VIRGO [1] и прямое наблюдение силуэта горизонта событий с помощью интерферометра Event Horizon Telescope [2] предоставляют нам убедительные свидетельства того, что множество массивных астрофизических объектов является чёрными дырами, предсказанными общей теорией относительности. Успех упомянутых экспериментов связан, в частности, с тем, что мы хорошо научились предсказывать наблюдаемые свойства чёрных дыр как классических объектов.

Квантовые свойства чёрных дыр известны хуже. Такой разрыв иногда связывается с проблемами квантования общей теории относительности, которая является неперенормируемой [3]. Её ультрафиолетовое пополнение может быть осуществлено в рамках различных подходов, таких как теория струн, петлевая квантовая гравитация или теория поля с нарушенной лоренцевой симметрией [4, 5], но все эти построения ещё далеки от завершения. По этой причине к гравитации имеет смысл относиться до определённого масштаба как к эффективной теории поля. А именно, при малых переданных импульсах и малых флуктуациях метрики допустимо пользоваться методами квантовой теории поля на фоне классического искривлённого пространства-времени, квантуя слабые возмущения гравитационного поля наравне с остальными полями [6].

В рамках данного подхода Стивен Хокинг предсказал, что чёрная дыра должна излучать как абсолютно чёрное тело с температурой $T_H = M_{\text{Pl}}^2/8\pi M$, зависящей от её массы M [7]. Как следствие, квантовые чёрные дыры испаряются таким образом вплоть до масс порядка планковской, когда пертурбативное приближение для флуктуаций метрики перестанет работать. Без знания квантовой гравитации нельзя сказать с определённой уверенностью, что происходит даль-

ше, но наиболее ожидаемым исходом является быстрый распад планковской микродыры [8].

Экспериментальная проверка этого процесса возможна в классе моделей мира на бране, где гравитация становится сильной при энергиях выше нескольких ТэВ. В этом случае можно надеяться обнаружить продукты распада чёрных микродыр, рожденных космическими лучами [9] либо в ускорительных экспериментах [10]. Второй оптимистический вариант - присутствие во Вселенной реликтовых чёрных дыр малой массы [11]. К сожалению, результаты наблюдений пока не подтверждают ни один из вышеприведённых сценариев. Поэтому мы вынуждены изучать квантовые чёрные дыры теоретически с позиции согласования квантовой механики и теории гравитации.

Теоретические построения Хокинга вызывают явное беспокойство, поскольку из их экстраполяции на весь процесс испарения следует вывод о невозможности построения фундаментальной квантовой теории, включающей в себя постулат унитарной эволюции [12]. Рассматривая коллапс материи, изначально находившейся в чистом квантовом состоянии с факторизуемой матрицей плотности $\hat{\rho}_{\text{in}} = |\psi_{\text{in}}\rangle\langle\psi_{\text{in}}|$, мы обнаружим, что большая часть информации должна бесследно пропасть внутри чёрной дыры, в то время как излучение Хокинга находится в смешанном конечном состоянии, описываемым термальной матрицей плотности $\hat{\rho}_{\text{out}} = \sum_n e^{-E_n/T_{\text{H}}} |n\rangle\langle n|$. Данное противоречие получило название *информационного парадокса* [13, 14].

В дальнейшем предлагались весьма различные гипотезы о том, как может быть разрешен данный парадокс. Хокинг выдвинул первую гипотезу, что детерминированное уравнение Шрёдингера является приблизительным описанием, применимым лишь для слабых гравитационных полей, а на самом деле квантовая информация теряется [15, 16, 17]. Однако построение самосогласованной неунитарной квантовой теории оказывается весьма непростым делом. Согласно аргументу Бэнкса-Пескина-Сасскинда такие теории страдают от на-

рушения закона сохранения энергии в экстремальной форме [18]. Это послужило одним из доводов в пользу сохранения свойства унитарной эволюции.

Вторая гипотеза заключалась в том, что в конце испарения возникают *остатки* (remnants) - (мета)стабильные частицеподобные объекты планковской массы с бесконечным числом внутренних состояний [19, 20, 21]. Долгое время жизни остатков прямо следует из требования унитарности, поскольку, чтобы вернуть обратно энтропию, равную энтропии всего предыдущего излучения Хокинга S_H , требуется родить единомоментно множество мягких квантов с энергией каждого $\sim M_{Pl} \cdot e^{-S_H}$. Гигантское подавление мод распада в небольшое число частиц требует в этом случае объяснения, равно как и проблема нарушения термодинамического равновесия с обычным веществом из-за энтропийного усиления процессов рождения остатков благодаря бесконечному числу их сортов. Кроме того, гипотеза остатков создаёт проблемы для интерпретации площади горизонта как термодинамической энтропии [22].

Третья «квантово-консервативная» гипотеза заключается в рассмотрении процесса образования и испарения чёрной дыры на равных основаниях с обычным рассеянием частиц, описываемым с помощью унитарной S-матрицы [23, 24, 25]. В таком случае информация оказывается заключённой в тонких корреляциях между всеми квантами на больших временных масштабах. Кажущаяся термальность излучения Хокинга не запрещает его пребывания в чистом квантовом состоянии как целого [26]. Пропоненты последней точки зрения критиковали ряд предположений, стоящих за изначальным выводом Хокинга, такие как пренебрежение обратным влиянием квантовых полей на метрику и/или сугубо классическое понимание пространства-времени. Сейчас эта точка зрения является доминирующей благодаря открытию АдС/КфТП-соответствия, устанавливающего эквивалентность квантовой гравитации в пространстве Анти-де-Ситтера (АдС) и явно унитарной суперконформой теории Янга-Миллса [27, 28, 29]. В этом случае испарение чёрной дыры

в пространстве АдС имеет дуальное описание как явно унитарной эволюции. Используя подход АдС/КфТП, можно вычислить энтропию запутывания, характеризующую «квантовую чистоту» состояния хокинговского излучения, и проследить за тем, как это излучение становится чистым в конце испарения [30].

Несмотря на важные шаги, включающие создание голографической картины чёрной дыры со степенями свободы вблизи горизонта и выдвигание принципа комплементарности [31], полноценного понимания механизма сохранения квантовой информации нет до сих пор. Даже наоборот, появились новые формулировки информационного парадокса, например, парадокс «огненной стены» (firewall), уничтожающей любое тело, пересекающее горизонт событий. А именно, были приведены аргументы [32, 33], что из предположения чистоты излучения Хокинга и локальности квантовой теории поля вблизи горизонта следует существование завесы излучения, распространяющейся вдоль горизонтов событий старых чёрных дыр. Наличие «огненной стены» явно нарушает принцип эквивалентности. Впрочем, предположение о локальности может оказаться неверным в настоящей теории квантовой гравитации. Это можно продемонстрировать в рамках как теории струн [34], так и петлевой квантовой гравитации [35, 36].

Следует подчеркнуть, что информационный парадокс имеет опосредованное отношение к проблеме неперенормируемости гравитации, так как излучение Хокинга содержит в основном мягкие кванты. В то же время, для своего решения парадокс требует учёта непертурбативных эффектов [37].

Таким образом, для анализа проблемы потери информации по-прежнему остаются весьма важны упрощенные модели гравитации, такие как двумерные модели дилатонной гравитации [38, 39, 40], изучавшиеся с данной целью на протяжении нескольких десятилетий. В двумерии тензор Эйнштейна тождественно равен нулю, $G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/2 = 0$, поэтому для существования решений

в присутствии полей материи необходимо «оснастить» гравитационный сектор дополнительным полем дилатона ϕ , взаимодействующим с метрикой $g_{\mu\nu}$. Нас интересуют представители данного класса моделей.

Преимуществами моделей двумерной гравитации являются их перенормируемость и отсутствие динамических степеней свободы, за исключением материальных полей. Как и в высокоразмерных теориях, в моделях дилатонной гравитации могут существовать чёрные дыры, которые испаряются при учёте квантовых поправок. Это позволяет использовать их для попыток решения информационного парадокса.

В частности, на ранних этапах оказалось весьма плодотворным исследование моделей Каллана-Гиддингса-Харви-Стромнджера (КГХС), Руссо-Саскинда-Торласиуса (РСТ), а также их различных модификаций [41, 42, 43, 44, 45], включающих модели с динамической границей пространства-времени, введённой для лучшей определённости задачи рассеяния [46, 47, 48, 49, 50, 51]. Вполне вероятно, что ряд по-настоящему важных результатов нам только еще предстоит в этой области получить.

Цели и задачи работы

Целью исследования является поиск путей к решению информационного парадокса в модели КГХС со скалярным полем f в качестве материи. Для существования классического режима отражения мы дополнительно регуляризовали модель, введя физическую границу на линии постоянного дилатона, как показано на Рис. 1. Благодаря этому топология решений становится похожей на существующую в высокоразмерных теориях гравитации.

Граница автоматически отсекает область пространства-времени в модели КГХС, где гравитация становится сильной, что должно улучшить применимость квазиклассических подходов. Для учёта влияния границы на динамику требуется добавить к действию дополнительное слагаемое по типу граничного члена Гиббонса-Хокинга, вид которого конкретизируется в дальнейшем. В

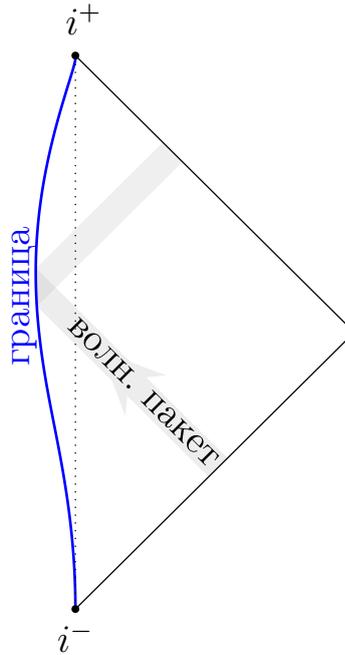


Рис. 1. Диаграмма Пенроуза для решения с материей в модели с отражающей границей.

рамках данной модели мы стремимся решить следующие задачи.

Во-первых, это построение точных классических решений в модели КГХС с границей в качестве первого шага на пути к точному описанию процесса испарения чёрных дыр, исследование критического режима поведения на грани возникновения чёрных дыр, а также изучение проблемы интегрируемости модели, что является существенным для решения задачи квантования.

Во-вторых, построение квазиклассического описания модели КГХС с границей и с контрчленом РСТ на однопетлевом уровне, то есть модели РСТ с границей, с целью описания процесса испарения в теории со слабой связью. При этом возникает трудность, связанная с правильным выбором граничного члена для эффективного однопетлевого действия модели РСТ. После решения данной проблемы станет возможным получить и проанализировать решения, описывающие испаряющиеся чёрные дыры.

В-третьих, это квазиклассическое вычисление S -матричных элементов для эксклюзивных гравитационных переходов, включающих образование и распад чёрной дыры. Ожидается, что если конечное состояние $|\Psi_{\text{out}}\rangle$ суще-

ственно отличается от хокинговского, то имеет место экспоненциальное подавление амплитуды рассеяния. В таком случае континуальный интеграл для $\langle \Psi_{\text{out}} | \hat{S} | \Psi_{\text{in}} \rangle$ можно вычислять с помощью комплексных квазиклассических методов - подобно тем, что используются для описания процесса туннелирования в обычной квантовой механике. Для решения задачи требуется научиться находить правильные туннельные решения для модели с простой материей в виде первично-квантованной частицы.

Методы исследования

В данной работе используются аналитические методы математической физики. А именно методы нахождения точных решений интегрируемых уравнений, метод анзаца Бете, метод эффективного действия, лагранжевы методы описания гравитации, а также комплексный квазиклассический метод для описания экспоненциально подавленных переходов.

Положения, выносимые на защиту

1. Получен широкий класс точных классических решений в модели КГХС с границей. Приведён конструктивный способ нахождения этих решений, использующий математическую аналогию со спиновой цепочкой Годена.
2. Изучены критические явления на пороге образования чёрных дыр в классической модели КГХС с границей. С помощью этих решений показано, что эта модель не является интегрируемой, то есть не обладает полным набором интегралов движения, гладких на фазовом пространстве.
3. Выведен граничный член в однопетлевой модели РСТ с границей, удовлетворяющий условию самосогласованности Весса-Зумино.
4. Изучены квазиклассические решения, описывающие образование и испарение чёрных дыр в однопетлевой модели РСТ с границей в случае гладкого распределения коллапсирующей материи в начальном состоянии. Показано, что эти решения являются сингулярными и не могут

давать вклад в амплитуду перехода между начальным состоянием материи и конечным состоянием излучения Хокинга. Показано, что остатки (remnants) не возникают в данных решениях. Таким образом, информация теряется в модели РСТ с границей на однопетлевом уровне.

5. В модели КГХС с границей с помощью комплексного квазиклассического метода вычислена непертурбативная амплитуда рассеяния точечной частицы. Показано, что при низких энергиях частица тривиально отражается от границы с вероятностью $O(1)$. При энергиях M выше порога образования чёрных дыр КГХС вероятность отражения частицы экспоненциально подавлена, $\mathcal{P} \propto \exp(-S_{\text{ВН}})$, где $S_{\text{ВН}}(M)$ - термодинамическая энтропия чёрной дыры с массой M . Этот ответ позволяет интерпретировать отражение частицы при высоких энергиях как двустадийный процесс, включающий образование и распад промежуточной чёрной дыры.

Научная новизна работы

Все положения, выносимые на защиту, являются новыми. А именно:

1. Впервые получены точные решения, описывающие рассеяние гладких волновых пакетов в модели КГХС с границей. При высоких энергиях эти решения описывают образование чёрных дыр.
2. Получено самосогласованное эффективное действие для однопетлевой модели РСТ, включающей динамическую границу.
3. Впервые получены квазиклассические решения в модели РСТ с границей для случая гладких волновых пакетов материи в начальном состоянии. Показано, что эти решения не описывают формирование остатков (remnants).

4. Комплексный квазиклассический метод впервые применён для нахождения амплитуды рассеяния частицы в модели КГХС с границей. Обобщение данного метода на случай более реалистичной материи может позволить явно проверить унитарность гравитационного рассеяния.

Теоретическая и практическая значимость

В главе 1 представлен конструктивный способ построения точных гладких решений в модели КГХС с границей. Данный класс решений является более предпочтительным для анализа квантовых аспектов дилатонной гравитации.

В главе 3 предложен комплексный квазиклассический метод для вычисления амплитуд гравитационного рассеяния. На примере точечной массивной частицы в модели КГХС с границей показано, что данный метод приводит к ответу совместному с унитарностью, а потому может сыграть значимую роль при решении информационного парадокса.

В целом, представленная работа расширяет и углубляет существующее поле исследований двумерной дилатонной гравитации.

Основные публикации по теме диссертации

Результаты исследования были опубликованы в журналах списка ВАК [52, 53, 54, 55],

- Fitkevich Maxim, Levkov Dmitry, Zenkevich Yegor. Exact solutions and critical chaos in dilaton gravity with a boundary // JHEP. 2017. Т. 04. С. 108.
- Fitkevich M.D. Model of Dilaton Gravity with Dynamical Boundary: Results and Prospects // Phys. Atom. Nucl. 2020. Т. 82, № 12. С. 1610–1615.
- Fitkevich Maxim, Levkov Dmitry, Zenkevich Yegor. Dilaton gravity with a boundary: from unitarity to black hole evaporation // JHEP. 2020. Т. 06. С. 184.
- Fitkevich Maxim, Levkov Dmitry, Sibiryakov Sergey. Semiclassical S-matrix and black hole entropy in dilaton gravity // JHEP. 2020. Т. 08. С. 142.

а также в трудах конференций Quarks от 2016 и 2018 гг. [56, 57],

- Fitkevich Maxim. Signatures of chaos and non-integrability in two-dimensional gravity with dynamical boundary // EPJ Web Conf. 2016. Т. 125. С. 05004.
- Fitkevich Maxim. Failure of mean-field approximation in weakly coupled dilaton gravity // EPJ Web Conf. 2018. Т. 191. С. 07004.

Апробация работы

Результаты работы докладывались на следующих российских и международных семинарах и конференциях:

1. 17-ая международная московская школа физики (42-ая Зимняя Школа ИТЭФ), Москва, 11-18 февраля 2014 г.
2. Конференция фонда Династия “Молодые ученые России”, Москва, 14-15 апреля 2014 г.
3. Международная конференция “18th International Seminar on High Energy Physics” (Quarks-2014), Суздаль, Россия, 2-8 июня 2014 г.
4. Международная конференция “19th International Seminar on High Energy Physics” (Quarks-2016), Пушкин, Россия, 29 мая - 4 июня 2016 г.
5. “Молодёжная конференция по теоретической и экспериментальной физике”, Москва, Россия, 20-23 ноября 2017 г.
6. Международная конференция “20th International Seminar on High Energy Physics” (Quarks-2018), Валдай, Россия, 27 мая - 2 июня 2018.
7. 7-ая международная конференция “Higher Spin Theory and Holography-7”, Москва, Россия, 4-6 июня 2018 г.
8. Летняя школа “Gravity@Prague”, Прага, Чехия, 10-14 сентября 2018 г.

Также были проведены доклады по материалам диссертации на научных семинарах ИЯИ РАН (Москва), ИТЭФ (Москва) и МФТИ (Долгопрудный).

Степень достоверности

Статьи [52, 53, 54, 55] были опубликованы в международно признанных изданиях, где прошли процедуру рецензирования.

Личный вклад автора

Все результаты, представляемые в диссертации, получены автором либо при его непосредственном участии.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и приложений. В первой главе исследуется классическая модель КГХС с границей. Во второй главе рассматривается однопетлевая модель РСТ с границей. В третьей главе проводится квазиклассическое вычисление амплитуды рассеяния точечной частицы в модели КГХС с границей. Объем текста составляет 112 страниц, включает в себя 23 рисунка. В списке литературы 97 наименований.

Глава 1

Классическая модель КГХС с границей

1.1. Введение к главе

В настоящей главе мы представляем исследование классической динамики и точные решения в модели КГХС с динамической границей [52, 56]. Поле дилатона на пространстве-времени ограничено, $\phi < \phi_0$, что позволяет избавиться от проблем с сильной связью, поскольку сила гравитационного взаимодействия в модели КГХС определяется параметром e^ϕ . Для модели с границей существуют два режима поведения. Если энергия волнового пакета небольшая, то имеет место полное отражение, отсутствующее в изначальной модели КГХС. Данный режим важен для корректной постановки квантовой задачи рассеяния. При превышении некоторой пороговой энергии, величина которой зависит от формы и амплитуды волнового пакета, рождается чёрная дыра.

Во вступительном параграфе 1.2 приведён обзор классической модели КГХС. Рассматриваются вакуумные решения и решения, описывающие гравитационный коллапс. В параграфе также определяются используемые в дальнейшем обозначения и терминология.

В параграфе 1.3 формулируется модель КГХС с границей. Мы стартуем с лагранжевой формулировки, из которой выводятся как уравнения поля, так и граничные условия на поля дилатона и материи. Из граничных условий мы выводим единственное дифференциальное уравнение, управляющее движением границы. Данное уравнение обладает побочной конформной симметрией, связывающей физически различные решения, но сохраняющей форму самого уравнения. Решив уравнение границы при фиксированных начальных условиях, мы затем находим решение во всём пространстве-времени. Изучая свойства данных решений, мы обнаруживаем основные закономерности режимов полно-

го отражения и с образованием чёрной дыры.

В следующем параграфе 1.4 мы описываем класс точных решений, которые называем *солитонными*. Отметим, что предыдущие исследования опирались в основном на численные методы, либо на анализ решений с дельта-функциональными волновыми пакетами. Обнаружение аналитических решений, описывающих как полное отражение, так и коллапс, может оказаться полезным для изучения чёрных дыр КГХС. Каждый солитон задаётся набором из N пар чисел $\{s_n, v_n\}$, характеризующих особенности решения, где s_n - целые или полуцелые числа, а v_n - комплексные параметры. Мы анализируем структуру решений со степенными особенностями и используем аналогию со спиновой цепочкой Годена, дающую конструктивный способ построения решений. Параметры солитона должны быть фиксированы таким образом, чтобы удовлетворять условиям действительности решения и конечности энергии, что накладывает дополнительные соотношения на $\{s_n, v_n\}$ и сужает пространство физических решений.

В завершающей первой главу параграфе 1.5 мы изучаем критические явления [58, 59]. Мы обнаружили, что на пороге образования чёрных дыр конечный волновой пакет всегда содержит узкий пик, несущий фиксированную энергию и чувствительный к изменениям начальных данных. Количественно это выражается тем, что для определённых вариаций начальных данных интегралы движения, вычисленные на начальных состояниях, непрерывны, в то время как те же интегралы движения для конечных состояний имеют существенную особенность. Соответственно, это служит аргументом против интегрируемости модели КГХС с границей, иначе, существования полного набора сохраняющихся величин гладко покрывающих всё фазовое пространство.

1.2. Обзор модели КГХС

1.2.1. Действие и общее решение

Действие модели КГХС [41]

$$S_{\text{CGHS}} = \int_{\mathcal{M}} d^2x \sqrt{-g} \left[e^{-2\phi} (R + 4(\nabla_{\mu}\phi)^2 + 4\lambda^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\nabla_{\mu}f_i)^2 \right] \quad (1.1)$$

описывает взаимодействие метрики¹ $g_{\mu\nu}$ и поля дилатона ϕ с N безмассовыми скалярными полями f_i .

В модели КГХС присутствует единственный размерный параметр λ , задающий характерный энергетический масштаб. При этом параметр аналогичный массе Планка и стоящий перед всем действием безразмерен, а потому мы можем от него избавиться перемасштабированием полей ϕ и f_i . В данной главе мы будем рассматривать модель с $N = 1$ без потери общности, обобщение на случай нескольких скалярных полей делается тривиальным образом. Модель КГХС замечательна тем, что классические полевые уравнения, следующие из (1.1), решаются в квадратурах. С этой целью мы выбираем конформный вид метрики, где интервал равен

$$ds^2 = -e^{2\rho} dvdu . \quad (1.2)$$

Уравнение для безмассового скалярного поля принимает вид $\partial_v \partial_u f = 0$, откуда следует решение

$$f(v, u) = f_{\text{in}}(v) + f_{\text{out}}(u) , \quad (1.3)$$

независимо от конкретного выбора координат светового конуса. В Приложении А.1 мы выводим полевые уравнения для дилатона и метрики и находим их общее решение для произвольного конформного вида метрики.

¹ Выбор знаков в (1.1) соответствует сигнатуре $(-, +)$, т.е. $u^2 < 0$, если u^{μ} - времениподобный вектор; греческие индексы пробегают значения 0, 1; пространство-время \mathcal{M} топологически эквивалентно \mathbb{R}^2 .

Здесь же мы фиксируем оставшуюся калибровочную свободу условием $\rho \equiv \phi$. В соответствующей системе координат (v, u) , которую мы называем *квазикрускаловской*, уравнения для поля дилатона и метрики примут вид

$$\partial_v \partial_u e^{-2\phi} = -\lambda^2, \quad \partial_v^2 e^{-2\phi} = -\frac{1}{2}(\partial_v f_{\text{in}})^2, \quad \partial_u^2 e^{-2\phi} = -\frac{1}{2}(\partial_u f_{\text{out}})^2. \quad (1.4)$$

Общим решением данной системы является

$$e^{-2\rho} = e^{-2\phi} = -\lambda^2 v u + g(v) + h(u), \quad (1.5)$$

где функции $g(v)$ и $h(u)$ это первообразные второго порядка правых частей двух последних уравнений (1.4), $\partial_v^2 g = -(\partial_v f_{\text{in}})^2/2$, $\partial_u^2 h = -(\partial_u f_{\text{out}})^2/2$. Отсюда следует, что решение (1.5) определено с точностью до трех постоянных интегрирования, входящих в линейную часть $g(v) + h(u)$. В следующем параграфе мы покажем, что две постоянные связаны с координатным произволом, а потому от них можно избавиться.

1.2.2. Вакуумные решения

Сперва мы рассмотрим вакуумное решение, соответствующее плоскому пространству-времени. Так как скаляр Риччи $R = 8e^{-2\rho} \partial_v \partial_u \rho = 0$, мы имеем

$$\partial_v \partial_u \rho = 0, \quad \Rightarrow \quad e^{2\rho(v,u)} = \mathcal{A}(v)\mathcal{B}(u). \quad (1.6)$$

Осуществляя замену координат

$$\bar{v}' = \bar{v}'_0 + \int dv \mathcal{A}(v), \quad \bar{u}' = \bar{u}'_0 + \int du \mathcal{B}(u), \quad (1.7)$$

мы приходим к стандартному виду метрики Минковского $ds^2 = -d\bar{v}' d\bar{u}'$, так что в координатах $\bar{v}' = t' + r'$ и $\bar{u}' = t' - r'$ движение пробных частиц по инерции происходит вдоль прямых геодезических: $r'(t') = r'_0 + V t'$.

Теперь получим плоское решение в квазикрускаловских координатах. С помощью общего решения (1.5) находим

$$\frac{1}{4}e^{-2\phi} R = \partial_v g \partial_u h + \lambda^2(h - u \partial_u h) + \lambda^2(g - v \partial_v g). \quad (1.8)$$

Из формулы (1.8) следует, что множество точек с $e^{-2\phi} = 0$ соответствует сингулярности пространства-времени с $R \rightarrow \infty$.

Приравняем правую часть (1.8) к нулю и продифференцируем по v и u , получив условия $\partial_v^2 g = 0$, $\partial_u^2 h = 0$. Последние условия выполняются автоматически для скалярного поля f в вакууме. В таком случае $g(v) = g_0 + g_1 v$ и $h(u) = h_0 + h_1 u$, а условие нулевой кривизны сводится к

$$g_1 h_1 + \lambda^2 (g_0 + h_0) = 0. \quad (1.9)$$

Используя равенство (1.9), мы находим решение для плоского пространства-времени в квазикрускаловских координатах:

$$e^{-2\phi} = -\lambda^2 (v - v_0)(u - u_0), \quad (1.10)$$

где $v_0 = g_1/\lambda^2$, $u_0 = h_1/\lambda^2$. Произведём сдвигку $v - v_0 \mapsto v$, $u - u_0 \mapsto u$, чтобы решение (1.10) занимало квадрант (i) $v \geq 0$, $u \leq 0$ или (ii) $v \leq 0$, $u \geq 0$. Без потери общности достаточно рассмотреть область (i).

Найдём связь координат (1.7) с квазикрускаловскими. Наиболее общим преобразованием является

$$t' + r' = \bar{v}' = \bar{v}'_0 + \frac{e^{-\theta}}{\lambda} \ln(\lambda v), \quad t' - r' = \bar{u}' = \bar{u}'_0 - \frac{e^\theta}{\lambda} \ln(-\lambda u). \quad (1.11)$$

Фиксируем $\bar{v}'_0 = 0$, $\bar{u}'_0 = 0$, используя трансляционную симметрию, а затем определим новую систему координат

$$t + r = \bar{v} = \frac{1}{\lambda} \ln(\lambda v), \quad t - r = \bar{u} = -\frac{1}{\lambda} \ln(-\lambda u). \quad (1.12)$$

Можно показать, что преобразования

$$t' = \text{ch}(\theta t) - \text{sh}(\theta r), \quad r' = -\text{sh}(\theta t) + \text{ch}(\theta r) \quad (1.13)$$

представляют собой лоренцевские бусты с быстротой θ . Естественно фиксировать $\theta = 0$ и определить (\bar{v}, \bar{u}) как *асимптотически плоские координаты*,

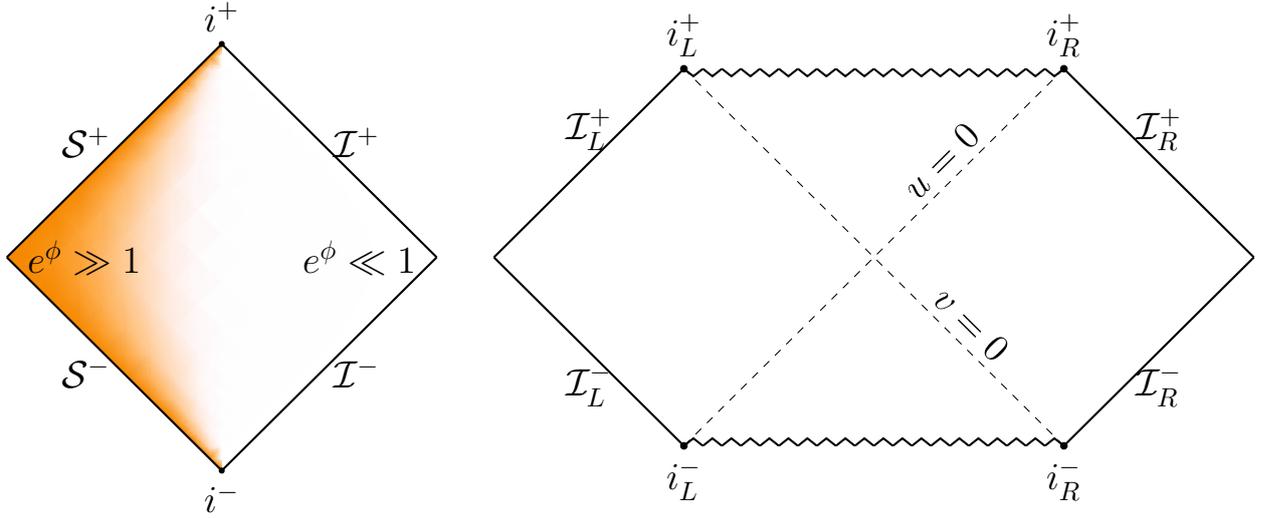


Рис. 1.1. На рисуне слева представлена диаграмма Пенроуза для пространства Минковского в модели КГХС. Цветом выделена область сильной связи, e^ϕ неограниченно растет по мере приближения к \mathcal{S}^\pm . Справа изображена диаграмма Пенроуза для вечной чёрной дыры.

поскольку $\rho(\bar{u}, \bar{v}) \rightarrow 0$ в окрестности бесконечностей \mathcal{I}^\pm для произвольных решений с материей².

Поскольку в координатах (1.12) решение (1.10) имеет вид

$$\phi = \frac{\lambda}{2}(\bar{u} - \bar{v}) = -\lambda r, \quad (1.14)$$

его называют *линейным дилатонным вакуумом*. На Рис. 1.1 слева представлена соответствующая диаграмма Пенроуза похожая по структуре на возникающую в сферически-редуцированной гравитации Эйнштейна, но отличающаяся наличием двух типов бесконечностей. Вблизи \mathcal{I}^\pm гравитация работает в режиме слабой связи, так как параметр гравитационного взаимодействия e^ϕ стремится к нулю. При $r \rightarrow -\infty$ имеет место сильная связь, существенно меняющая на квантовом уровне поведение системы вблизи \mathcal{S}^\pm .

Теперь рассмотрим самое общее вакуумное решение в модели КГХС:

$$e^{-2\rho} = e^{-2\phi} = \frac{M}{2\lambda} - \lambda^2 v u, \quad (1.15)$$

² Говоря точнее, $\rho(\bar{v}, \bar{u}) \sim (O(\bar{v}) + O(\bar{u}))e^{\lambda(\bar{u}-\bar{v})}$ при $\bar{v} \rightarrow +\infty$ и/или $\bar{u} \rightarrow -\infty$, если выполнено условие $(\partial_{\bar{v}} f_{\text{in}})^2 \sim (\partial_{\bar{u}} f_{\text{out}})^2 \sim O(1)$.

где мы избавились от ненужных постоянных интегрирования с помощью координатных сдвигов $u - g_1/\lambda^2 \mapsto u$ и $v - h_1/\lambda^2 \mapsto v$. Единственный параметр решения³ равен $M = 2\lambda(g_0 + h_0) + 2g_1h_1/\lambda$. Очевидно, в случае $M > 0$ решение (1.15) описывает вечную чёрную дыру. Линия $M = 2\lambda^3vu$ пространственноподобна и определяет положение сингулярностей. Горизонты событий будущего и прошлого представлены линиями $u = 0$ и $v = 0$ на Рис. 1.1 справа. Заметим, что скаляр кривизны $R = 2e^{2\phi}M\lambda$ на горизонте событий всегда равен $4\lambda^2$.

Параметр M соответствует АДМ-массе чёрной дыры, что можно доказать, рассматривая поведение геодезических на бесконечности. Мы увидим это позже, рассмотрев решения с безмассовым скалярным полем, для которого можно определить обычное понятие энергии в асимптотически плоском пространстве-времени.

1.2.3. Решения с материей

С помощью тождественных преобразований решение (1.5) можно представить в форме

$$e^{-2\phi} = \frac{\mathcal{M}(v, u)}{2\lambda} - \lambda^2 \left(v - \frac{\partial_u h(u)}{\lambda^2} \right) \left(u - \frac{\partial_v g(v)}{\lambda^2} \right), \quad (1.16)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(v, u) &= \mathcal{E}_{\text{in}}(v) - \mathcal{E}_{\text{out}}(u) + 2\partial_v g(v)\partial_u h(u)/\lambda, \\ \mathcal{E}_{\text{in}}(v) &= 2\lambda(g(v) - v\partial_v g(v)), \quad \mathcal{E}_{\text{out}}(u) = -2\lambda(h(u) - u\partial_u h(u)). \end{aligned} \quad (1.17)$$

³ Для моделей двумерной дилатонной гравитации существует свой аналог теоремы Биркгофа, утверждающий о единственности данного однопараметрического семейства решений в вакууме [60].

Выделим явным образом линейные части в функциях

$$g(v) = g_0 + g_1 v + \frac{1}{2} \int_0^v dv' \int_{v'}^{+\infty} dv'' (\partial_v f_{\text{in}}(v''))^2, \quad (1.18)$$

$$h(u) = h_0 + h_1 u - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^u du' \int_{-\infty}^{u'} du'' (\partial_u f_{\text{out}}(u''))^2. \quad (1.19)$$

Рассмотрим асимптотику решения (1.16) в окрестности времениподобной бесконечности прошлого i^- , то есть при $v \rightarrow 0$, $u \rightarrow -\infty$, $vu = \text{const}$,

$$e^{-2\phi} \simeq \frac{M_-}{2\lambda} - \lambda^2 v \left(u - \frac{\partial_v g(0)}{\lambda^2} \right). \quad (1.20)$$

Оно представляет белую дыру (1.15) с параметром $M_- = 2\lambda(g_0 + h_0 + g_1 h_1/\lambda^2)$ и горизонтом событий прошлого при $v = 0$.

Фиксируем постоянные интегрирования в (1.18), (1.19) таким образом, что $g_1 = h_0 = h_1 = 0$, а $g_0 = M_-/2\lambda$. Тогда асимптотика решения (1.16) в окрестности пространственноподобной бесконечности i^0 , то есть при $v \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow -\infty$, причем $v/u = \text{const}$,

$$e^{-2\phi} \simeq \frac{M_0}{2\lambda} - \lambda^2 vu \quad (1.21)$$

соответствует решению (1.15) с параметром $M_0 = \mathcal{E}_{\text{in}}(+\infty)$.

И, наконец, вблизи бесконечности будущего i^+ , при $v \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow 0$, $vu = \text{const}$, мы аналогично получим асимптотику

$$e^{-2\phi} \simeq \frac{M_+}{2\lambda} - \lambda^2 \left(v - \frac{\partial_u h(0)}{\lambda^2} \right) u, \quad (1.22)$$

которая выглядит как чёрная дыра с параметром $M_+ = \mathcal{E}_{\text{in}}(+\infty) - \mathcal{E}_{\text{out}}(0)$ и горизонтом событий будущего при $u = 0$. Во всех вышеприведённых выкладках интегралы в (1.18), (1.19) должны сходиться.

Теперь определим асимптотическую энергию скалярного поля f как величину

$$E = \int_{t=\text{const}} dr T_{tt} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dr ((\partial_t f)^2 + (\partial_r f)^2), \quad (1.23)$$

где координаты (t, r) определены через (1.12).

Время t берется достаточно большим, чтобы поверхность Коши для поля f прошла через асимптотически плоскую область, где можно пренебречь кривизной метрики. Подстановка $\partial_t f = \partial_{\bar{v}} f + \partial_{\bar{u}} f$ и $\partial_r f = \partial_{\bar{v}} f - \partial_{\bar{u}} f$ в формулу (1.23) с последующим взятием пределов $t \rightarrow \mp\infty$ даёт энергии влетающего и вылетающего волновых пакетов:

$$E_{\text{in}} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{v} (\partial_{\bar{v}} f_{\text{in}})^2 = -2\lambda \int_0^{+\infty} dv' v' \partial_v^2 g(v') = \mathcal{E}_{\text{in}}(v) \Big|_0^{+\infty}, \quad (1.24)$$

$$E_{\text{out}} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{u} (\partial_{\bar{u}} f_{\text{out}})^2 = 2\lambda \int_{-\infty}^0 du' u' \partial_u^2 h(u') = \mathcal{E}_{\text{out}}(u) \Big|_{-\infty}^0. \quad (1.25)$$

В последних равенствах мы проинтегрировали по частям и выразили полную энергию через функции (1.17). Энергии (1.24), (1.25) остаются конечными при условии сходимости интегралов в (1.18) и (1.19).

Всё это позволяет нам интерпретировать параметр M , входящий в решение (1.15) как АДМ-массу чёрной дыры. Из приведённых выкладок следует, что $M_- + E_{\text{in}} = M_0 = M_+ + E_{\text{out}}$, то есть, поглощая количество энергии E_{in} , измеренное удалённым наблюдателем, чёрная дыра увеличивает свою массу на величину $M_0 - M_-$; и наоборот, испуская из себя поле с энергией E_{out} чёрная дыра теряет массу $M_0 - M_+$.

В модели КГХС классические решения с ненулевой энергией всегда имеют сингулярности. Проще всего это увидеть на примере гравитационного коллапса поля f , описываемого решением с $g_0 = h(u) = 0$,

$$e^{-2\phi} = \frac{\mathcal{E}_{\text{in}}(v)}{2\lambda} - \lambda^2 v \left(u - \frac{\partial_v g(v)}{\lambda^2} \right), \quad (1.26)$$

для которого белая дыра в начале отсутствует. При сколь угодно малой энергии влетающего волнового пакета f_{in} на линии

$$e^{-2\phi} = 0, \quad \Leftrightarrow \quad U_{\text{sing}}(v) = g(v)/\lambda^2 v \quad (1.27)$$

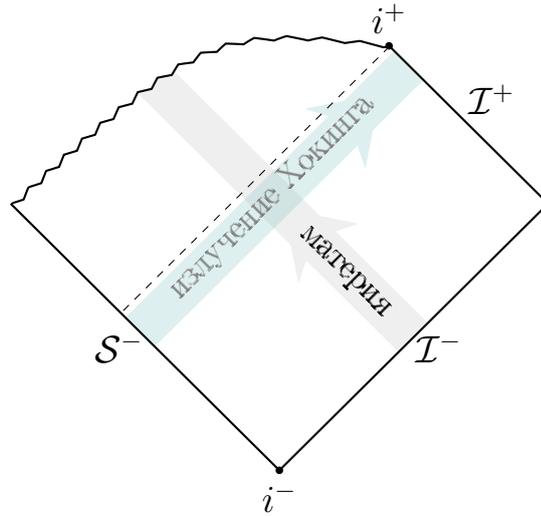


Рис. 1.2. Диаграмма Пенроуза для решения с материей (1.26). Изображен волновой пакет материи, образующий чёрную дыру. Пунктиром отмечено положение горизонта событий при $u = 0$. Сингулярность изображена ломанной линией. Также схематически представлено излучение Хокинга, квантовым образом порождаемое чёрной дырой.

возникает сингулярность $R \rightarrow \infty$. Решение (1.26) представлено на Рис. 1.2.

Отсюда мы заключаем, что при попытке решения задачи гравитационного рассеяния мы столкнёмся с рядом трудностей. Задача рассеяния корректно ставится для состояний, представляющих собой волновые пакеты на фоне асимптотически плоского пространства-времени, то есть для пакетов, летящих справа налево в качестве начальных состояний и слева направо в качестве конечных. Но из-за вейль-инвариантности волнового уравнения между ними отсутствует какое-либо классическое взаимодействие. Кроме того, не существует режима рассеяния при низких энергиях, как в трехмерной гравитации. Проблемы усугубляются наличием области сильной связи, в которой параметр гравитационного взаимодействия e^ϕ ничем не ограничен, и непонятно, как ставить граничные условия вблизи \mathcal{S}^- на Рис. 1.2, где модель КГХС находится в непертурбативном режиме.

1.3. Модель с динамической границей

1.3.1. Действие для границы

Модель КГХС удобна с точки зрения точной решаемости, но в свете проблем, перечисленных в конце предыдущего параграфа, для продвижения вперед её нужно как-то модифицировать. В моделях сферически редуцированной многомерной гравитации $r = 0$ представляет собой отражающую времениподобную границу. Последнее наблюдение привело нас к идее ввести подобную границу в модели КГХС *ad hoc* с условием Дирихле на поле дилатона

$$\phi \Big|_{\partial\mathcal{M}} = \phi_0 . \quad (1.28)$$

Опишем предлагаемую модель с динамической границей на лагранжевом языке. Формально, введение границы $\phi = \phi_0$ означает, что мы интегрируем поля в действии (1.1) на многообразии с краем \mathcal{M} , определённом через неравенство $\phi < \phi_0$. При этом требуется, чтобы энергия сохранялась и была ограниченной снизу. Также желательно существование решения в виде линейного дилатонного вакуума.

Как мы покажем далее, требуемые условия удовлетворены, если к действию (1.1) добавить следующее граничное слагаемое:

$$S_{\text{CGHS},b} = 2 \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau e^{-2\phi} (K + 2\lambda) + \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau \Lambda \cdot (\phi - \phi_0) , \quad (1.29)$$

где мы ввели собственное время вдоль границы $\tau = \int dy \sqrt{|h|}$ с индуцированной метрикой $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$, внешнюю кривизну $K = h^{\mu\nu} \nabla_\mu n_\nu$ и внешнюю нормаль $n^\mu = \partial^\mu \phi / \sqrt{(\partial\phi)^2}$.

Вклад с внешней кривизной представляет собой член Гиббонса-Хокинга-Йорка, необходимый для сокращения нормальных производных вариации метрики на границе для самосогласованности граничных условий [61, 62]. Второй вклад, представляющий собой отрицательную массу границы $m_b = -4\lambda e^{-2\phi_0}$,

необходим для существования решения в форме линейного дилатонного вакуума. Мы также ввели множитель Лагранжа $\Lambda(\tau)$ для фиксации условия Дирихле (1.28). С учётом отсутствия явного взаимодействия поля материи f с границей выбор дополнительного слагаемого (1.29) оказывается единственным⁴.

Если переопределить поля, $\phi \mapsto \phi - \phi_0$, $f \mapsto e^{\phi_0} f$, мы получим перед действием общий фактор $e^{-2\phi_0}$, играющий роль квазиклассического параметра. Условием отсутствия сильной связи является $e^{\phi_0} \ll 1$.

Варьируя полное действие

$$S = S_{\text{CGHS}} + S_{\text{CGHS},b} \quad (1.30)$$

по отношению к значениям полей на границе, мы получаем два дополнительных уравнения:

$$\nabla_n f \Big|_{\partial\mathcal{M}} = 0, \quad \nabla_n \phi \Big|_{\partial\mathcal{M}} = \lambda, \quad (1.31)$$

представляющих собой условия Неймана на скалярное поле материи и дилатон; было введено обозначение $\nabla_n := n^\mu \nabla_\mu$. Первое из условий Неймана (1.31) получается после интегрирования по частям вариации действия по полю f на многообразии с границей. Вывод второго граничного условия приведён в Приложении А.1.3. Из него также следует, что $R \Big|_{\partial\mathcal{M}} = 0$, то есть пространство вблизи границы плоское.

1.3.2. Вакуумные решения

Начнем с вопроса о существовании вакуумных решений (1.15) в модели с границей. Первое из условий (1.31) выполняется автоматически, второе верно только для решения с $M = 0$, поскольку

$$\nabla_n \phi \Big|_{\phi=\phi_0} = \lambda \sqrt{1 - \frac{M}{2\lambda e^{-2\phi_0}}}. \quad (1.32)$$

⁴ В статье [63] приводится граничное слагаемое с условием неймановского типа на метрику, но в двумерии оно оказывается идентичным приведенному выше.

Таким образом, граничным условиям (1.31) удовлетворяет только линейный дилатонный вакуум с границей в состоянии покоя на линии $r = -\phi_0/\lambda$ в плоских координатах или $U(v) = -e^{-2\phi_0}/\lambda^2 v$ в квазикрускаловских координатах.

Поскольку для решений (1.15) с $M \neq 0$ граничные условия (1.31) на линии $\phi = \phi_0$ не выполняются, мы будем считать её сингулярностью. При $M > 2\lambda e^{-2\phi_0}$ линия $\phi = \phi_0$ оказывается пространственноподобной, а соответствующее решение представляет собой чёрную дыру в модели КГХС с границей (в случае $M = 2\lambda e^{-2\phi_0}$ сингулярность находится точно на горизонте событий). Решения с времениподобной сингулярной границей возникнуть в процессе эволюции не могут.

Нужно отметить, поскольку поле дилатона ограничено сверху значением ϕ_0 , из решения (1.15) следует, что в модели с границей существует минимальное значение массы чёрной дыры⁵

$$M_{\text{cr}} = 2\lambda e^{-2\phi_0} . \quad (1.33)$$

Отсюда мы видим, что если энергия влетающих волновых пакетов меньше M_{cr} , то они не могут образовать чёрную дыру. Значит, должны существовать два режима, один из которых соответствует обычному регулярному отражению, а второй - коллапсу с формированием чёрной дыры с массой $M \geq M_{\text{cr}}$.

1.3.3. Условие отражения и уравнение границы

Для анализа двух динамических режимов нам требуется разрешить оба граничных условия (1.31). Пусть движение границы описывается функцией $u = U(v)$ в квазикрускаловских координатах. Из первого условия Неймана мы получаем закон отражения для безмассового скалярного поля

$$\partial_v \phi \cdot \partial_u f_{\text{out}} + \partial_u \phi \cdot \partial_v f_{\text{in}} = 0 \quad \Rightarrow \quad f_{\text{out}}(U(v)) = f_{\text{in}}(v) + \text{const} , \quad (1.34)$$

используя тождество $\phi(v, U(v)) = \phi_0$.

⁵ На данный факт обратили внимание в [64].

Из второго условия Неймана мы получаем дифференциальное уравнение

$$\partial_v U(v) = \frac{e^{2\phi_0}}{\lambda^2} (\partial_v g(v) - \lambda^2 U(v))^2, \quad (1.35)$$

управляющее движением границы. Вывод уравнения (1.35) приведён в Приложении А.1.3.

Посредством замены переменной $e^{-2\phi_0} \partial_v (\ln \psi) = \partial_v g - \lambda^2 U$, мы приводим уравнение (1.35) к виду

$$\partial_v^2 \psi(v) = e^{2\phi_0} \partial_v^2 g(v) \psi(v), \quad (1.36)$$

напоминающему стационарное уравнение Шредингера с нулевой энергией.

Интересно отметить, что уравнение (1.36) сохраняет свою форму при конформных преобразованиях

$$\begin{aligned} v \mapsto w(v), \quad \psi(v) \mapsto \tilde{\psi}(w) &= \left(\frac{dv}{dw} \right)^{-1/2} \psi(v), \\ \partial_v^2 g \mapsto \partial_w^2 \tilde{g} &= \left(\frac{dv}{dw} \right)^2 \partial_v^2 g - \frac{e^{-2\phi_0}}{2} \{v; w\}, \end{aligned} \quad (1.37)$$

где $\{v; w\} = \partial_w^3 v / \partial_w v - 3(\partial_w^2 v)^2 / 2(\partial_w v)^2$ - это производная Шварца. Переменную ψ можно интерпретировать как примарное поле с конформным весом $h = -1/2$, а $-2\partial_v^2 g$ как тензор энергии-импульса с центральным зарядом $c = -24\pi e^{-2\phi_0}$. Однако симметрия (1.37) не делает модель КГХС с границей конформной теорией поля, так как не является калибровочной и связывает физически различные решения: подбором $w(v)$ можно получить любое нетривиальное решение из вакуумного.

При преобразовании Мёбиуса⁶

$$v \mapsto w(v) = \frac{\alpha v + \beta}{\gamma v + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad (1.38)$$

шварциан равен нулю, а потому безмассовое поле преобразуется в (1.37) как истинный скаляр: $f_{\text{in}}(v) \mapsto \tilde{f}_{\text{in}}(w) = f_{\text{in}}(v(w))$. В качестве простейшего примера

⁶ То есть при преобразовании группы $PSL(2, \mathbb{C})$ комплексной плоскости v .

преобразования (1.38) можно рассмотреть сдвиги асимптотического времени $t \mapsto \tilde{t} = t - t_0$, для которых $\tilde{\psi}(w) \propto \psi(we^{\lambda t_0})$.

Из уравнения (1.35), представленного в эквивалентном виде

$$\partial_v U(v) = e^{-2\phi_0} \left(\frac{\partial_v \psi(v)}{\lambda \psi(v)} \right)^2, \quad (1.39)$$

следует формула

$$d\tau = \frac{\partial_v \psi}{\lambda \psi} dv, \quad \Rightarrow \quad \psi(\tau) = \psi_0 \cdot e^{\lambda \tau}, \quad (1.40)$$

связывающая функцию ψ с собственным временем границы τ .

Сформулируем классическую задачу Коши для модели с границей. Её начальными условиями являются профиль влетающего волнового пакета $f_{\text{in}}(v)$ и нахождение границы в состоянии покоя, $U(v) \sim -e^{-2\phi_0}/\lambda^2 v$, при $v \rightarrow 0$, что эквивалентно $\psi \sim C_0 \cdot v$. Таким образом, для нахождения функции ψ достаточно решить уравнение (1.36) с начальным условием $\psi(0) = 0$ ($C_0 = \partial_v \psi(0)$ выбирается произвольно, поскольку функция ψ определена с точностью до мультипликативной константы).

Затем мы обращаем функцию $U(v) = \lambda^{-2} \partial_v (g(v) - e^{-2\phi_0} \ln \psi(v))$ и выражаем

$$f_{\text{out}}(u) = f_{\text{in}}(V(u)), \quad h(u) = e^{-2\phi_0} + \lambda^2 u V(u) - g(V(u)). \quad (1.41)$$

Подставляя в (1.5) найденную функцию $h(u)$, мы получаем полное решение задачи Коши.

1.3.4. Режим отражения и режим коллапса

Рассмотрим общие свойства решений в данной модели. При условии конечности энергии падающего волнового пакета, $\partial_v g = o(v^{-1})$, решение уравнения (1.36) имеет линейную асимптотику

$$\psi(v) \sim C v + D \quad (1.42)$$

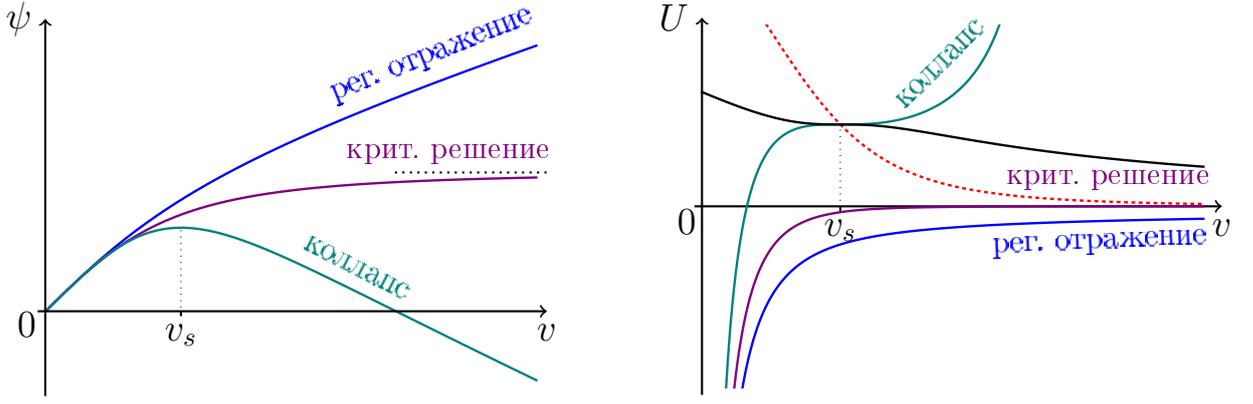


Рис. 1.3. Функции $\psi(v)$ (слева) и $U(v)$ (справа) при разных значениях энергии, построенные для решения (1.90). Для надкритического решения, описывающего коллапс, в точке пересечения $U(v)$ с видимым горизонтом (пунктирная красная линия), происходит бифуркация кривой $\phi = \phi_0$, так что из этой точки выходит сингулярность асимптотически приближающаяся к $g(v)/\lambda^2 v$. Горизонт событий находится при $u = 0$.

с соответствующей ей поведением $U(v) \sim e^{-2\phi_0}/\lambda^2 v$ при $v \rightarrow +\infty$. Функция $U(v)$ всегда только возрастает, согласно уравнению (1.39). Эти наблюдения понадобятся нам в дальнейшем.

В зависимости от поведения функции $\psi(v)$ мы имеем три динамических режима. По мере роста энергии падающего волнового пакета значение C в выражении (1.42) уменьшается от $C_0 > 0$ до некоторого $C_{\min} < 0$. При этом функция $\psi(v)$ вогнутая, поскольку $\partial_v^2 g \leq 0$, как показано на Рис. 1.3 слева.

Первый режим соответствует $C > 0$ с монотонно возрастающей $\psi(v)$. В этом случае функция $U(v)$ непрерывна и, так как обе её плоские асимптотики в начале и конце гладко сшиваются в промежуточной области, она описывает времениподобную границу, как показано на Рис. 1.3 справа. Граница полностью отражает скалярное поле в соответствии с законом (1.34). При этом его энергия сохраняется, $E_{\text{in}} = E_{\text{out}}$, что показывается в Приложении А.3.

Для второго режима с $C = 0$ мы имеем $\psi \rightarrow \psi_0$ при $v \rightarrow +\infty$. Прибли-

женным решением уравнения (1.36) является

$$\psi(v) \approx \psi_0 + e^{2\phi_0}\psi_0 \int_v^{+\infty} dv' \int_{v'}^{+\infty} dv'' \partial_v^2 g(v''). \quad (1.43)$$

Используя его, мы получаем асимптотику

$$U(v) \approx -\frac{e^{2\phi_0}}{\lambda^2} \partial_v g(v)(g(+\infty) - g(v)) = o(v^{-1}), \quad (1.44)$$

из которой следует, что разность энергий начального и конечного волновых пакетов

$$\lim_{\substack{v'' \rightarrow +\infty \\ v' \rightarrow 0}} (\mathcal{E}_{\text{out}}(U(v''), U(v')) - \mathcal{E}_{\text{in}}(v'', v')) = M_{\text{cr}}. \quad (1.45)$$

Таким образом, в данном режиме решение стремится к метрике критической чёрной дыры при $v \rightarrow +\infty$.

Третий режим с $C < 0$ соответствует образованию чёрной дыры с горизонтом событий. В этом случае $\psi(v)$ имеет максимум при некотором $v = v_s$, соответствующий точке перегиба $U(v)$. В точке $v = v_s$ граница пересекает кривую

$$U_a(v) = \frac{\partial_v g(v)}{\lambda^2}. \quad (1.46)$$

Уравнение (1.46) определяет положение видимого горизонта в двумерной дилатонной гравитации [43]. Последний определяется в высокоразмерной гравитации как граница множества ловушечных поверхностей, то есть световых конусов, с уменьшающимся радиусом сечения. Вспомнив интерпретацию поля дилатона как радиуса сферы в редуцированной гравитации, мы получаем условие на видимый горизонт $\partial_v \phi \cdot \partial_u \phi = 0$, откуда и следует (1.46).

Теперь мы покажем, что в момент пересечения границы с видимым горизонтом возникает пространственноподобная сингулярность. А именно, мы рассмотрим непосредственную окрестность точки пересечения $S = (v_s, U(v_s))$, разложив решение (1.5) вблизи неё в ряд Тейлора.

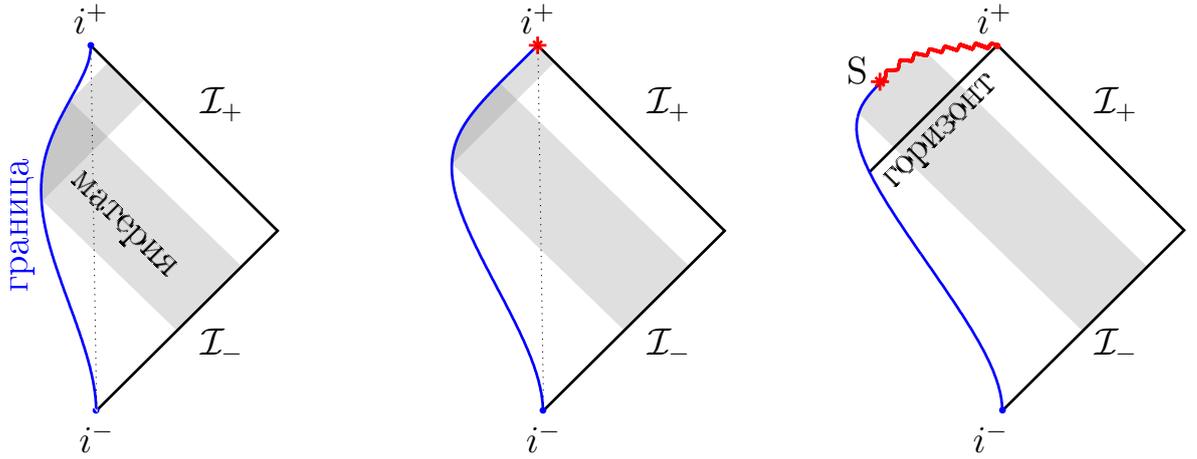


Рис. 1.4. Диаграммы Пенроуза для решения (1.70) при значениях параметров $b = \lambda^{-1}$ и $M_{\text{cr}} = 2\lambda$. Слева направо: показаны режимы полного отражения при $a = -0.2\lambda^{-1}$, критическое решение при $a = 0$ и образование чёрной дыры при $a = 0.2\lambda^{-1}$. Пилообразная линия - сингулярность чёрной дыры.

Используем разложения

$$g(v) \sim g_1(v - v_s) + \frac{g_2}{2}(v - v_s)^2, \quad U(v) \sim \frac{g_1}{\lambda^2} + \frac{e^{2\phi_0} g_2^2}{3\lambda^2}(v - v_s)^3, \quad (1.47)$$

где мы приняли $g(v_s) = 0$ без потери общности, для вычисления функции $h(u)$ при помощи (1.41), а затем подставим всё в (1.5). Мы получаем решение

$$e^{-2\phi(v,u)} \approx e^{-2\phi_0} - \frac{\partial_v^2 g(v_s)}{2d^{2/3}} \left((u_s - u)^{2/3} - d^{2/3}(v - v_s)^2 \right), \quad (1.48)$$

которое нужно решить как уравнение $\phi(v, \tilde{U}(v)) = \phi_0$ на неизвестную функцию $\tilde{U} \neq U$. Это даёт две ветви $\phi = \phi_0$, известную времениподобную (1.47) при $v < v_s$ и пространственноподобную

$$\tilde{U}(v) \sim \frac{g_1}{\lambda^2} - \frac{e^{2\phi_0} g_2^2}{3\lambda^2}(v - v_s)^3 \quad (1.49)$$

при $v > v_s$, представляющую собой сингулярность чёрной дыры, поглощающую поля материи. Поскольку физическое многообразие задаётся условием $\phi < \phi_0$, всё, что выше этих двух ветвей, следует исключить из решения.

Из общего решения следует, что $E_{\text{out}} = E_{\text{in}} - M_{\text{ВН}}$, где

$$M_{\text{ВН}} = 2\lambda \exp\left\{-2 \lim_{v \rightarrow +\infty} \phi(v, 0)\right\} \quad (1.50)$$

- масса чёрной дыры в конце гравитационного коллапса.

1.4. Точные аналитические решения

1.4.1. Анализ структуры решений со степенными особенностями

В начале поиска точных решений уравнения (1.36) разумно сделать некоторые предположения о форме искомой функции $\psi(v)$. А именно, следуя основной идее метода Пенлеве [65], мы предполагаем такую форму функции $\partial_v^2 g(v)$, для которой $\psi(v)$ имеет только степенные особенности в комплексной плоскости v .

Согласно примечательной теореме (Фукс, 1866), решение линейного ОДУ 2-го порядка представимо в виде ряда Фробениуса, если коэффициенты уравнения являются аналитическими функциями в точке $v = v_0$, либо v_0 есть регулярная особая точка [66]. В случае (1.36) условия теоремы Фукса означают, что разложение в ряд Лорана функции

$$\mathcal{T}(v) := e^{2\phi_0} \partial_v^2 g(v) = \sum_{j=-2}^{+\infty} \mathcal{T}_j \cdot (v - v_0)^j \quad (1.51)$$

должно начинаться с полюса второго порядка в особой точке $v = v_0$. Тогда мы имеем ряд Фробениуса для решения

$$\psi(v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n \cdot (v - v_0)^{n-s}, \quad (1.52)$$

где особая точка $v = v_0$ является полюсом, если s - целое, либо точкой ветвления, если s - полуцелое. Решения можно классифицировать, сопоставляя каждой особенности v_i её порядок s_i .

Подставляя ряды (1.52), (1.51) в уравнение (1.36), мы получаем цепочку рекуррентных алгебраических соотношений:

$$(n - s)(n - s - 1)\psi_n = \sum_{n-2=m+p} \mathcal{T}_m \cdot \psi_p. \quad (1.53)$$

При $n = 0$ возникает соотношение $s(s + 1)\psi_0 = \mathcal{T}_{-2}\psi_0$, откуда следует, что ψ_0 это свободный параметр, а коэффициент \mathcal{T}_{-2} фиксирован. Далее, взяв $n = 1$, мы получаем второе соотношение $(s - 1)s\psi_1 = \mathcal{T}_{-1}\psi_0 + \mathcal{T}_{-2}\psi_1$, откуда находим второй коэффициент $\psi_1 = -\mathcal{T}_{-1}\psi_0/2s$. Продолжая действовать аналогично, мы находим ψ_2, ψ_3 и т.д. до тех пор, пока не дойдем до $n = 2s + 1$, для которого соотношение (1.53) имеет вид:

$$0 \cdot \psi_{2s+1} = \sum_{\substack{m+p=2s-1 \\ m \neq -2}} \mathcal{T}_m \psi_p, \quad (1.54)$$

откуда следует, что ψ_{2s+1} является вторым свободным параметром решения. Вместе с ψ_0 они кодируют начальные данные $\psi(v_0), \psi'(v_0)$ общего решения уравнения (1.36). Пара уравнений (1.53) при $n = 0$ и $n = 2s + 1$ превращается в условия совместности на соответствующие коэффициенты разложения в ряд Лорана:

$$\mathcal{T}_{-2} = s(s + 1), \quad \sum_{\substack{m+p=2s-1 \\ m \neq -2}} \mathcal{T}_m \psi_p = 0, \quad (1.55)$$

которые должны быть выполнены в каждой особой точке $\mathcal{T}(v)$.

В качестве конкретного примера мы разберём случай простого полюса $s = 1$. Цепочка соотношений (1.53) приобретает вид:

$$n = 0 : \quad \mathcal{T}_{-2} = 2, \quad (1.56a)$$

$$n = 1 : \quad \psi_1 = -\frac{1}{2}\mathcal{T}_{-1}\psi_0, \quad (1.56b)$$

$$n = 2 : \quad \psi_2 = \left(\frac{1}{4}\mathcal{T}_{-1}^2 - \frac{1}{2}\mathcal{T}_0 \right) \psi_0, \quad (1.56c)$$

$$n = 3 : \quad \mathcal{T}_{-1}\psi_2 + \mathcal{T}_0\psi_1 + \mathcal{T}_1\psi_0 = 0, \quad (1.56d)$$

$$n = 4 : \quad \psi_4 = \frac{1}{4} \left(\mathcal{T}_{-1}\psi_3 + \left(\mathcal{T}_2 - \frac{1}{2}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_{-1} - \frac{1}{2}\mathcal{T}_0^2 + \frac{1}{4}\mathcal{T}_0\mathcal{T}_{-1}^2 \right) \psi_0 \right), \quad (1.56e)$$

.....

Видно, что уравнения (1.56a) и (1.56d) не определяют ψ_0 и ψ_3 , которые в данном случае оказываются свободными параметрами, а являются ограничениями

на структуру функции $\mathcal{T}(v)$. Используя (1.56b), (1.56c), мы можем переписать (1.56d) в форме условия связи (полюсного уравнения) на коэффициенты разложения:

$$\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_0 \mathcal{T}_{-1} - \frac{1}{4} \mathcal{T}_{-1}^3. \quad (1.57)$$

Проведя аналогичные вычисления для других s , мы получаем полюсные уравнения, приведённые в Таблице 1.1.

s	
$\frac{1}{2}$	$\mathcal{T}_0 = (\mathcal{T}_{-1})^2$
1	$\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_0 \mathcal{T}_{-1} - \frac{1}{4} (\mathcal{T}_{-1})^3$
$\frac{3}{2}$	$\mathcal{T}_2 - \frac{1}{4} (\mathcal{T}_0)^2 = \frac{2}{3} \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_{-1} - \frac{5}{18} \mathcal{T}_0 (\mathcal{T}_{-1})^2 + \frac{1}{36} (\mathcal{T}_{-1})^4$

Таблица 1.1. Полюсные уравнения для некоторых s .

Это полиномиальные уравнения порядка $2s+1$, имеющие $2s+1$ различных решений, одно из которых должно удовлетворять дополнительному условию действительности

$$\mathcal{T}(v) \leq 0, \quad v \geq 0 \quad (1.58)$$

для физического волнового пакета $f_{\text{in}}(v)$.

1.4.2. Солитонные решения

Теперь определим конструктивный способ задания решений с вышеописанными свойствами. Выберем положения N особых точек v_n и их порядок s_n в разложении в ряд Фробениуса. Рассмотрим следующий анзац для решения уравнения (1.36):

$$\psi(v) = \prod_{n=1}^N (v - v_n)^{-s_n} \cdot \prod_{m=1}^M (v - \tilde{v}_m), \quad (1.59)$$

где \tilde{v}_m - нули функции $\psi(v)$. Фиксируем $\tilde{v}_0 = 0$, чтобы было выполнено условие $\psi(0) = 0$.

Чтобы полностью определить решение, мы введем дополнительную функцию $W(v) = \partial_v(\ln \psi(v))$ и преобразуем уравнение (1.36) к эквивалентному виду:

$$\partial_v W(v) + W(v)^2 = \mathcal{T}(v). \quad (1.60)$$

Для анзаца (1.59) мы имеем функцию

$$W(v) = -\sum_{n=1}^N \frac{s_n}{v - v_n} + \sum_{m=1}^M \frac{1}{v - \tilde{v}_m}, \quad (1.61)$$

подставляя которую в уравнение (1.60), получаем $\mathcal{T}(v)$ в виде полинома второго порядка по $(v - v_n)^{-1}$ и $(v - \tilde{v}_m)^{-1}$. Из требования отсутствия полюсов при $v = \tilde{v}_m$ следуют уравнения на положения нулей \tilde{v}_m :

$$\sum_{\substack{m'=1 \\ m' \neq m}}^M \frac{1}{\tilde{v}_m - \tilde{v}_{m'}} = \sum_{n=1}^N \frac{s_n}{\tilde{v}_m - v_n}. \quad (1.62)$$

Приводя остальные слагаемые к общему знаменателю, мы имеем

$$\mathcal{T}(v) = \sum_{n=1}^N \left[\frac{\mathcal{T}_{-2}^n}{(v - v_n)^2} + \frac{\mathcal{T}_{-1}^n}{v - v_n} \right], \quad (1.63)$$

где

$$\mathcal{T}_{-2}^n = s_n(s_n + 1), \quad \mathcal{T}_{-1}^n = 2s_n \left[\sum_{\substack{n'=1 \\ n' \neq n}}^N \frac{s_{n'}}{v_n - v_{n'}} - \sum_{m=1}^M \frac{1}{v_n - \tilde{v}_m} \right]. \quad (1.64)$$

Напоминаем, что $(\partial_v f_{\text{in}}(v))^2 = -2e^{-2\phi_0} \mathcal{T}(v)$.

Решение с начальным волновым пакетом (1.63) мы будем в дальнейшем называть солитонным. Условия совместности, найденные в предыдущем параграфе, для такого решения выполняются автоматически. Из условия действительности (1.58) следует, что особенности решения v_n должны разбиваться в пары, располагаясь симметрично относительно действительной оси v , либо располагаться на ней при $v < 0$.

Более того, поскольку для решений с конечной энергией $\mathcal{T}(v) = o(v^{-2})$ при $v \rightarrow +\infty$, возникают условия

$$\sum_{n=1}^N \mathcal{T}_{-1}^n = 0, \quad \sum_{n=1}^N (s_n(s_n + 1) + v_n \mathcal{T}_{-1}^n) = 0. \quad (1.65)$$

Также из условия конечности энергии следует линейная асимптотика (1.42) при $v \rightarrow +\infty$, откуда получается формула на число нулей: $M = 1 + \sum s_n$.

На самом деле, для солитонного анзаца (1.59) имеет место более сильное ограничение на $\mathcal{T}(v)$: так как $\partial_v^2 \psi = O(v^{-3})$ и, следовательно, $\mathcal{T} = O(v^{-4})$, мы получаем дополнительное условие

$$\sum_{n=1}^N (2v_n s_n (s_n + 1) + v_n^2 \mathcal{T}_{-1}^n) = 0 \quad (1.66)$$

для некритических решений.

Условия на положения нулей (1.62) выглядят в точности как уравнения алгебраического анзаца Бете для спиновой цепочки Годена [67]. Данное наблюдение позволило установить любопытную аналогию между солитонами и квантовыми состояниями модели Годена [52]. Детали данного соответствия резюмированы в Таблице 1.2.

	Солитоны	Модель Годена
v_n	положения особенностей	параметры гамильтониана
s_n	порядок особенностей	представления спина \hat{s}_n
\tilde{v}_m	нули $\psi(v)$	параметры собственных состояний
$-2e^{-2\phi_0} \mathcal{T}$	начальный поток	собственное значение $\hat{\mathcal{T}}(v)$
\mathcal{T}_{-1}^n	коэффициент $\mathcal{T}(v)$	собственное значение $\hat{\mathcal{T}}_n$

Таблица 1.2. Аналогия между солитонами в модели КГХС с границей и собственными состояниями в модели Годена.

1.4.3. Примеры солитонных решений

Простые солитоны с сингулярностями порядка $1/2$ и 1 . Рассмотрим солитонные решения с двумя сингулярностями v_2 и v_1 порядка s . Для нахождения коэффициентов функции $\mathcal{T}(v)$ в этом случае достаточно воспользоваться лишь условиями конечности энергии (1.65):

$$\mathcal{T}_{-1}^1 + \mathcal{T}_{-1}^2 = 0, \quad 2s(s+1) + v_1\mathcal{T}_{-1}^1 + v_2\mathcal{T}_{-1}^2 = 0, \quad (1.67)$$

откуда следует, что $\mathcal{T}_{-1}^1 = -\mathcal{T}_{-1}^2 = 2s(s+1)/(v_2 - v_1)$. Для того, чтобы решение удовлетворяло условию действительности, сингулярности должны располагаться симметрично относительно действительной оси: $v_{2,1} = a \pm ib$. В итоге формула (1.63) даёт выражение

$$(\partial_v f_{\text{in}}(v))^2 = \frac{8s(s+1)e^{-2\phi_0}b^2}{((v-a)^2 + b^2)^2} \quad (1.68)$$

для волнового пакета с энергией $E = 2s(s+1)M_{\text{cr}}(1 + \frac{a}{b}\text{arcctg}(-a/b))$.

Рассмотрим простейший случай с $s = 1/2$. Очевидно, что функция ψ должна иметь два нуля $\tilde{v}_{1,0}$. Из системы уравнений (1.62) мы получаем связь $a\tilde{v}_1 - \tilde{v}_1\tilde{v}_0 + a\tilde{v}_0 = a^2 + b^2$, откуда вместе с условием $\psi(0) = 0$ следует

$$\tilde{v}_1 = a + \frac{b^2}{a}, \quad \tilde{v}_0 = 0. \quad (1.69)$$

Подставляя нули $\tilde{v}_{1,0}$ в анзац (1.59), мы получаем решение

$$\psi(v) = \frac{v(a^2 + b^2 - av)}{\sqrt{(v-a)^2 + b^2}}. \quad (1.70)$$

При $a < 0$ решение (1.70) описывает регулярное отражение, так как $\psi(v)$ монотонно возрастает при $v > 0$. Критическому решению соответствует $a = 0$, так как $\psi(v) \rightarrow \text{const}$ при $v \rightarrow +\infty$. Решение с $a > 0$ описывает образование черной дыры, поскольку появляется нуль $\tilde{v}_1 > 0$, свидетельствующий о возникновении сингулярности, см. параграф 1.3.4. Диаграммы Пенроуза для соответствующих режимов поведения данного решения показаны на Рис. 1.4.

Теперь рассмотрим случай $s = 1$. Зафиксировав $\tilde{v}_0 = 0$, из уравнений (1.62) мы получаем систему

$$2a\tilde{v}_2\tilde{v}_1 = (a^2 + b^2)(\tilde{v}_2 + \tilde{v}_1), \quad (2a - \tilde{v}_2)\tilde{v}_1^2 = (a^2 + b^2)(2\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2), \quad (1.71)$$

которая имеет решение

$$\tilde{v}_{2,1} = \frac{a^2 + b^2}{a \pm b/\sqrt{3}}. \quad (1.72)$$

Подставляя в анзац (1.59) и фиксируя поведение $\psi \sim v$ при $v \rightarrow 0$, получаем финальный ответ

$$\psi(v) = \frac{a^2 - \frac{b^2}{3}}{a^2 + b^2} \cdot \frac{v(v - \tilde{v}_1)(v - \tilde{v}_2)}{(v - a)^2 + b^2}. \quad (1.73)$$

Как и для предыдущего случая с $s = 1/2$, можно показать, что при $a < -b/\sqrt{3}$ данное решение описывает отражение, $a = -b/\sqrt{3}$ соответствует критическому решению, а $a > -b/\sqrt{3}$ описывает коллапс, см. Рис. 1.5.

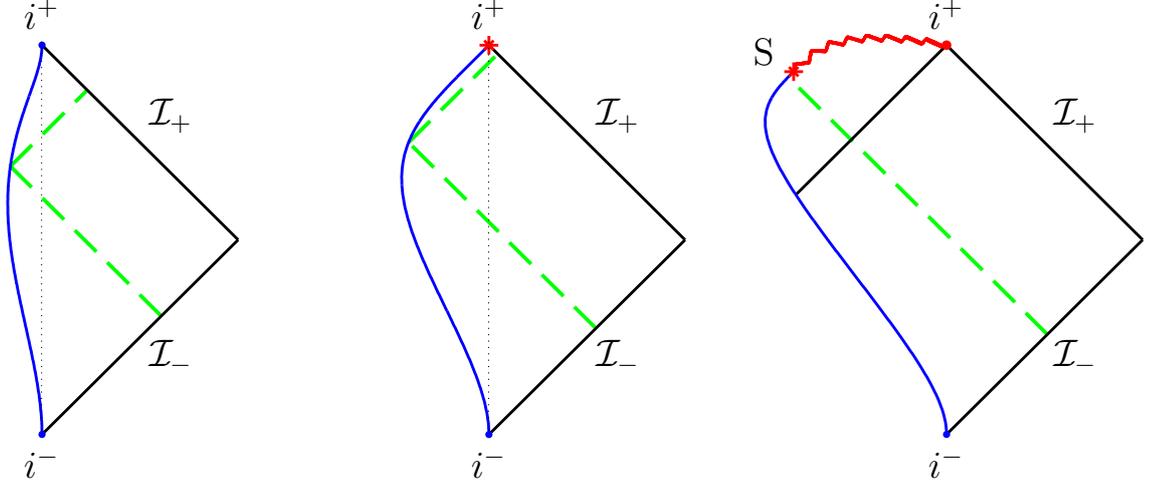


Рис. 1.5. Диаграммы Пенроуза для солитонного решения (1.73) при разных значениях параметров. Слева направо: полное отражение, критическое решение, образование чёрной дыры. Пилообразная линия - сингулярность чёрной дыры. Пунктирная линия показывает положение центра налетающего волнового пакета.

С дальнейшим ростом ранга солитона растёт и число нулей; получающееся из (1.62) алгебраическое уравнение $P_M(\tilde{v}) = 0$ не решается в радикалах, и

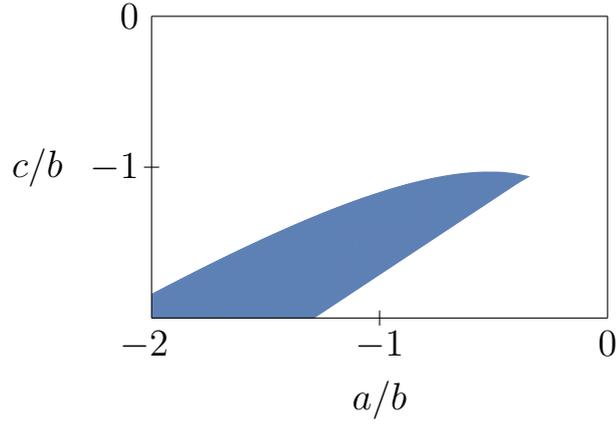


Рис. 1.6. Допустимая область на пространстве параметров, соответствующая функции (1.74), удовлетворяющей условию действительности.

получить явную аналитическую формулу для $\psi(v)$ становится невозможно. Но функцию $\psi(v)$ можно получить численно, решая уравнения для анзаца (1.63).

Трёхполюсный солитон. Рассмотрим решение с тремя сингулярностями, одна из которых лежит на действительной оси: $v_{2,1} = a \pm ib$ порядка $s = 1/2$ и $v_3 = c < 0$. Порядок сингулярности при $v = c$ должен быть целым, иначе ψ асимптотически ведёт себя как \sqrt{v} , что не соответствует локализованной плотности энергии. Пусть порядок третьей сингулярности $s = 1$. Используя условия (1.65), (1.66), получаем функцию

$$\mathcal{T}(v) = -\frac{3b^2}{((v-a)^2 + b^2)^2} + \frac{2((a-c)^2 + b^2)}{(v-c)^2((v-a)^2 + b^2)}, \quad (1.74)$$

которая выглядит как сумма простого солитона (1.70) и вклада от сингулярности на действительной оси. Поскольку данный вклад положителен, условие действительности существенно ограничивает область допустимых значений параметров a, b, c , изображенную на Рис. 1.6.

Функция $\psi(v)$ имеет три нуля. Принимая $\tilde{v}_0 = 0$, найдём два остальных, используя условия (1.62):

$$\frac{1}{\tilde{v}_2} + \frac{1}{\tilde{v}_1} = \frac{ac + a^2 + b^2}{c(a^2 + b^2)}, \quad \frac{1}{\tilde{v}_2 - c} + \frac{1}{\tilde{v}_1 - c} = \frac{1}{c} + \frac{3(a-c)}{(a-c)^2 + b^2}. \quad (1.75)$$

Решение системы даёт нам

$$\psi(v) = \frac{v(v - \tilde{v}_1)(v - \tilde{v}_2)}{(v - c)\sqrt{(v - a)^2 + b^2}}. \quad (1.76)$$

Можно убедиться, что функция (1.76) при допустимых значениях параметров a, b, c нулей при $v > 0$ не имеет, а потому описывает только регулярное (полное) отражение.

Однако если рассмотреть солитон с сингулярностями $v_{2,1} = a \pm ib$ порядка $s = 1$, то на пространстве параметров появится область, соответствующая образованию чёрной дыры.

Двойной солитон с сингулярностями порядка $1/2$. Рассмотрим решение с четырьмя сингулярностями порядка $s = 1/2$ расположенными симметрично относительно действительной оси: $v_{2,1} = a_1 \pm ib_1$, $v_{4,3} = a_2 \pm ib_2$. Решая уравнения (1.65), (1.66) мы получаем однопараметрическое семейство функций $\mathcal{T}(v)$, из которых полюсным уравнениям Таблицы 1.1 удовлетворяют лишь две:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(\pm)}(v) = & -\frac{3b_1^2}{((v - a_1)^2 + b_1^2)^2} - \frac{3b_2^2}{((v - a_2)^2 + b_2^2)^2} + \\ & + \frac{(a_1 - a_2)^2 + b_1^2 + b_2^2 \mp \sqrt{\Delta}}{((v - a_1)^2 + b_1^2)((v - a_2)^2 + b_2^2)}, \end{aligned} \quad (1.77)$$

где $\Delta = ((a_1 - a_2)^2 + b_1^2 + b_2^2)^2 + 12b_1^2b_2^2$. Единственному физическому решению отвечает $\mathcal{T}^{(+)}(v)$, так как вторая функция не удовлетворяет условию действительности (1.58).

Для полного определения функции

$$\psi(v) = \frac{v(v - \tilde{v}_1)(v - \tilde{v}_2)}{\sqrt{(v - a_1)^2 + b_1^2}\sqrt{(v - a_2)^2 + b_2^2}}, \quad (1.78)$$

нужно решить два уравнения (1.62) на положения двух неизвестных нулей:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{v}_2} + \frac{1}{\tilde{v}_1} &= \frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2}, \\ \frac{1}{\tilde{v}_1} + \frac{1}{\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2} &= \frac{\tilde{v}_1 - a_1}{(\tilde{v}_1 - a_1)^2 + b_1^2} + \frac{\tilde{v}_1 - a_2}{(\tilde{v}_1 - a_2)^2 + b_2^2}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

С помощью решения (1.78) можно продемонстрировать, как солитонные решения ведут себя при перемещении сингулярностей по комплексной плоскости v . Например, если мы рассмотрим слияние сингулярностей $a_1 \rightarrow a_2$, $b_1 \rightarrow b_2$, то функция $\mathcal{T}^{(-)}(v)$ превратится в тождественный нуль (нефизическое решение «аннигилировало»), а $\mathcal{T}^{(+)}(v)$ перейдёт в простой солитон с $s = 1$.

Если же мы рассматриваем случай пространственно разделённых солитонов, то есть в пределе $a_2/a_1 \gg 1$, получается функция

$$\mathcal{T}^{(\pm)}(v) \sim -\frac{3T_0^2}{((v - a_i)^2 + b_i^2)^2} + \frac{1 \mp 1}{(v - a_i)^2 + b_i^2}, \quad v \sim a_i, \quad (1.80)$$

представляющая сумму двух простых солитонов для физического решения, либо пару волновых пакетов с отрицательной энергией, нарушающих условие действительности.

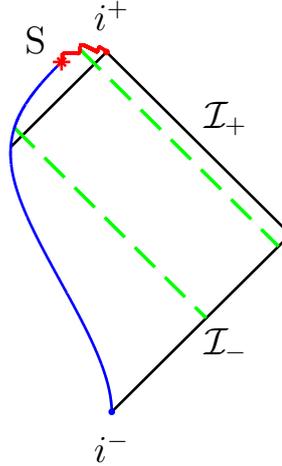


Рис. 1.7. Диаграмма Пенроуза, описывающая образование чёрной дыры из двойного солитона $\mathcal{T}^{(+)}(v)$ с сингулярностями порядка $s = 1/2$ и значениями параметров $a_1 = -0.1\lambda^{-1}$, $b_1 = \lambda^{-1}$, $a_2 = 0.2\lambda^{-1}$ и $b_2 = 10\lambda^{-1}$, $M_{\text{cr}} = 2\lambda$.

1.4.4. Несолитонные точные решения

В этом параграфе мы изучаем некоторые точные решения, не представимые в форме (1.59).

Решение с одним полюсом второго порядка в $\mathcal{T}(v)$. Рассмотрим решение с единственным полюсом второго порядка на действительной оси при $v = a$:

$$\mathcal{T}(v) = -\frac{r(1-r)}{(v-a)^2}, \quad (1.81)$$

причем по условию действительности $r(1-r) > 0$.

При $a \leq 0$ решение является регулярным в физической области $v > 0$. Если $a = 0$, то

$$(\partial_{\bar{v}} f_{\text{in}}(\bar{v}))^2 = 2r(1-r)e^{-2\phi_0}\lambda^2 \quad (1.82)$$

представляет из себя постоянный поток.

Если же $a < 0$, то поток начинается с нуля и выходит на константу (1.82), насыщаясь вблизи $\bar{v} = \ln(\lambda|a|)/\lambda$.

Постоянный поток. Случай $a = 0$ в уравнении (1.81) заслуживает отдельного рассмотрения. При $r \neq 1/2$ функция

$$\psi(v) = \psi_0(\lambda v)^{1-r} + \psi_1(\lambda v)^r \quad (1.83)$$

является общим решением уравнения (1.36). Для случая $r = 1/2$ мы имеем

$$\psi(v) = \psi'_0 \sqrt{\lambda v} (1 + \psi'_1 \ln(\lambda v)) . \quad (1.84)$$

Если $r(1-r) > 1/4$, то r - комплексное, и решение носит осциллирующий характер. Рассматривать его не имеет смысла, поскольку из-за бесконечного количества нулей $\psi(v)$, сгущающихся вблизи $v = 0$, ему нельзя сопоставить физическое решение, описывающее рассеяние или гравитационный коллапс.

Решение (1.83) вырождено в том смысле, что условия $\psi(0) = 0$ недостаточно для однозначного определения ψ . Пусть для определённости $r < 1/2$. Рассмотрим решение с ψ_1 либо ψ_0 равным нулю. Тогда мы получим одно из двух статических решений для границы:

$$U(v) = -\frac{(1-r)^2 e^{-2\phi_0}}{\lambda^2 v}, \quad U(v) = -\frac{r^2 e^{-2\phi_0}}{\lambda^2 v}. \quad (1.85)$$

В обоих случаях статическая граница отражает постоянный поток, так что вся система находится в равновесии. В пределе $r \rightarrow 0$ первое решение стремится к пространству Минковского, а второе решение

$$e^{-2\phi_0} = \frac{M_*}{2\lambda} - \lambda^2 v u + r(1-r)e^{-2\phi_0} \ln(-\lambda^2 v u) \quad (1.86)$$

с параметром $M_* = M_{\text{cr}}(1 - r^2 - r(1-r) \ln(r^2 e^{-2\phi_0}))$ - к критической чёрной дыре.

Теперь рассмотрим ситуацию, где оба ψ_0 и ψ_1 отличны от нуля. При $\psi_0\psi_1 > 0$ решение описывает отражение с времениподобной границей, поскольку $\psi(v)$ монотонно возрастает. При этом граница интерполирует между двумя асимптотиками (1.85), совершая движение по направлению к удалённому наблюдателю и доизлучая локализованный пакет с энергией M_* над основным фоновым потоком (1.82). При $\psi_0\psi_1 < 0$ решение описывает коллапс, когда граница в точке $v_s = |\psi_1 r / \psi_0 (1-r)|^{1/(1-2r)} / \lambda$ пересекается с сингулярностью чёрной дыры, начинающей бесконечный рост за счет налетающего постоянного потока.

Поток, выходящий на константу. Теперь вернемся к случаю с $a < 0$ и найдем решения удовлетворяющие $\psi \sim v$ при $v \rightarrow 0$. При $r < 1/2$ и $r = 1/2$ мы имеем, соответственно, решения

$$\begin{aligned} \psi(v) &= |\lambda a|^r (\lambda(v-a))^{1-r} - |\lambda a|^{1-r} (\lambda(v-a))^r, \\ \psi(v) &= \sqrt{1-v/a} \ln(1-v/a), \end{aligned} \quad (1.87)$$

описывающие полное отражение, поскольку функция $\psi(v)$ в обоих случаях монотонно возрастает. Решением при $r = 1/2 + \kappa$ является

$$\begin{aligned} \psi(v) &= \frac{\lambda}{\kappa} \sqrt{a^2 - av} [\cos(\kappa \ln(\lambda|a|)) \sin(\kappa \ln(\lambda(v-a))) + \\ &\quad - \sin(\kappa \ln(\lambda|a|)) \cos(\kappa \ln(\lambda(v-a)))] , \end{aligned}$$

где $\kappa > 0$. Данное решение имеет нули при $\tilde{v}_k = a(1 - e^{\pi k/\kappa})$, $k \in \mathbb{Z}$. Перед первым нулем v_1 функция $\psi(v)$ имеет максимум, соответствующий возникновению сингулярности чёрной дыры.

Решение с одним полюсом четвёртого порядка в $\mathcal{T}(v)$. Рассмотрим решение с одним полюсом четвёртого порядка при $v = a < 0$:

$$\mathcal{T}(v) = -\frac{b^2}{(v-a)^4}. \quad (1.88)$$

Функция (1.88) описывает локализованный волновой пакет с полной энергией $E = b^2 M_{\text{cr}}/6a^2$ и максимумом при $\bar{v} = \ln(\lambda|a|)/\lambda$.

Решение уравнения (1.36) в этом случае легко найти, используя формулу приближения ВКБ, которая для «потенциала» (1.88) оказывается точной:

$$\psi(v) = \frac{1}{\sqrt[4]{-\mathcal{T}(v)}} \left(C_1 e^{i \int dv \sqrt{-\mathcal{T}(v)}} + C_2 e^{-i \int dv \sqrt{-\mathcal{T}(v)}} \right). \quad (1.89)$$

С учётом граничного условия $\psi(0) = 0$ получаем частное решение

$$\psi(v) = (v-a) \frac{a}{b} \left(\cos \left[\frac{b}{a} \right] \sin \left[\frac{b}{v-a} \right] + \sin \left[\frac{b}{a} \right] \cos \left[\frac{b}{v-a} \right] \right). \quad (1.90)$$

Решение с $b < \pi|a|$ описывает регулярное отражение, поскольку $\psi(v)$ монотонно возрастает, решение с $b = \pi|a|$ является критическим, поскольку $\psi(v)$ выходит на константу при $v \rightarrow +\infty$, решение с $b > \pi|a|$ описывает образование чёрной дыры, так как $\psi(v)$ имеет нуль при $v > 0$.

Решение с дельта-функциональным пределом. Преобразования Мёбиуса (1.38) сохраняют полюсную структуру решений, в том числе солитонов. Применяя (1.37), получаем

$$\mathcal{T}(v) \mapsto \tilde{\mathcal{T}}(w) = \frac{\mathcal{T}(v(w))}{(\alpha - \gamma w)^4}, \quad \psi(v) \mapsto \tilde{\psi}(w) = (\alpha - \gamma w)\psi(v(w)). \quad (1.91)$$

Воспользуемся этим преобразованием для построения новых решений. Рассмотрим в качестве исходного (1.81) с $\psi_0 = -\psi_1 = 1$ и выберем преобразование

Мёбиуса с такими параметрами, чтобы отобразить $0 \mapsto a - ib$, $\infty \mapsto a + ib$ и $1 \rightarrow 0$ на комплексной плоскости v . Выбрасывая нефизический общий множитель, мы получаем решение

$$\psi(v) = i \frac{(a^2 + b^2 - (a + ib)v)^{1+2r} - (a^2 + b^2 - (a - ib)v)^{1+2r}}{((v - a)^2 + b^2)^r} \quad (1.92)$$

для гладкого волнового пакета

$$(\partial_v f_{\text{in}}(v))^2 = \frac{8r(r + 1)e^{-2\phi_0}b^2}{((v - a)^2 + b^2)^2} \quad (1.93)$$

где r - произвольное число.

Данное решение имеет бесконечное количество нулей

$$\tilde{v}_{n, n \neq 0} = \frac{a^2 + b^2}{a + b \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi n}{1+2r}\right)}, \quad \tilde{v}_0 = 0, \quad (1.94)$$

в зависимости положения которых решение (1.92) описывает либо регулярное отражение (если нет нулей при $v > 0$), либо образование чёрной дыры (если есть хотя бы один нуль при $v > 0$).

Решение (1.92) интересно тем, что является гладким приближением к дельта-функциональному волновому пакету. А именно (1.93) стремится к

$$(\partial_v f_{\text{in}}(v))^2 = \frac{2\pi M_{\text{cr}} r}{\lambda b^3} \delta(v - a) \quad (1.95)$$

в пределе $r \sim \lambda b \rightarrow 0$.

1.5. Критические явления

1.5.1. Финальный импульс

Интересен вопрос о поведении решений достаточно близких к критическим, то есть при $0 < C \ll 1$ в уравнениях. Пример такого решения приведён на Рис. 1.8, где показана граница в асимптотически плоских координатах, имеющая характерное пологое «плато». На этой стадии эволюции скорость

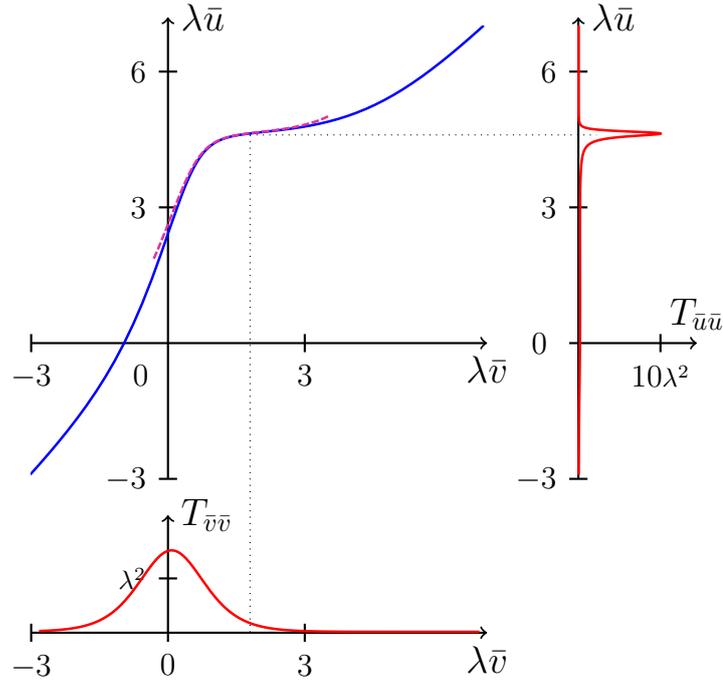


Рис. 1.8. Почти критическое решение (1.70) с параметрами $e^{-2\phi_0} = \lambda b = 1$ и $\lambda a = -10^{-2}$, выбранными так с целью лучшей визуализации. Показаны движение границы в асимптотически плоских координатах \bar{v}, \bar{u} , а также графики для плотностей энергии влетающего и вылетающего волновых пакетов. Виден узкий финальный импульс, отражающийся от пологого «плато». Пунктиром отмечено решение по теории возмущений (1.99).

границы близка к скорости света. При отражении от этого «плато» в потоке энергии появляется узкий и высокий пик. Мы покажем, что в пределе $C \rightarrow +0$ энергия этого пика или финального импульса стремится к критической массе M_{cr} , а его ширина - к нулю. При этом, его внутренняя структура оказывается крайне чувствительной к малым возмущениям налетающего волнового пакета, что говорит о неинтегрируемости модели с границей.

Найдем решение вблизи финального импульса, построив теорию возмущений с малым параметром $C \rightarrow +0$. Тогда

$$\psi(v) \sim Cv + 1 + \psi^{(1)}(v) + \psi^{(2)}(v) + \dots, \quad \psi^{(i)}(v) \rightarrow 0, \quad v \rightarrow +\infty, \quad (1.96)$$

причём в окрестности финального импульса $Cv \sim \psi^{(1)}(v)$. Подставив формаль-

ный ряд (1.96) в уравнение (1.36), мы получаем

$$\psi^{(1)}(v) = e^{2\phi_0} \int_v^{+\infty} dv' \int_{v'}^{+\infty} dv'' \partial_v^2 g(v'') = e^{2\phi_0} (g(v) - g(\infty)), \quad (1.97)$$

$$\begin{aligned} \partial_v \psi^{(2)}(v) &= -e^{2\phi_0} \int_v^{+\infty} dv' \partial_v^2 g(v') (Cv' + \psi^{(1)}(v')) = e^{2\phi_0} v \partial_v g(v) C + \\ &+ e^{2\phi_0} (g(v) - g(\infty)) (e^{2\phi_0} \partial_v g(v) - C) + e^{4\phi_0} \int_v^{+\infty} dv' (\partial_v g(v'))^2. \end{aligned} \quad (1.98)$$

С помощью (1.97), (1.98) находим приближенное решение для траектории движения границы

$$-\lambda U(v) e^{2\phi_0} \sim C - C^2 \lambda v - 2C e^{2\phi_0} (g(v) - g(\infty)) + \frac{e^{4\phi_0}}{\lambda} \int_v^{+\infty} dv' (\partial_v g(v'))^2, \quad (1.99)$$

которое описывает движение границы достаточно хорошо до тех пор, пока $Cv \ll 1$. Задержка финального импульса определяется через отклонение границы на стадии «плато» от состояния равновесия. Пренебрегая малыми по сравнению с C поправками в уравнении (1.99), мы получаем оценку

$$\Delta \bar{u} = -\frac{1}{\lambda} \ln(-\lambda U(v')) - \frac{2\phi_0}{\lambda} - \bar{v}' \sim -\ln C, \quad (1.100)$$

где $v' = e^{\lambda \bar{v}'} / \lambda$ это характерное положение «плато».

Скорость границы приближается к световой, поскольку $\partial_{\bar{v}} \bar{u} \sim \lambda v' C$ в соответствии с решением (1.99). Соответственно, со стороны вылетающего волнового пакета ширина «плато» уменьшится до $\Delta \bar{u} \sim -v C \ln C$. В пределе $C \rightarrow 0$ финальный импульс становится бесконечно узким, а плоскость энергии в нем неограниченно растет согласно приближенной формуле

$$(\partial_{\bar{u}} f_{\text{out}}(\bar{u}))^2 \Big|_{\bar{u} \approx \bar{u}(v)} \simeq -\frac{2C^2 \partial_v^2 g(v)}{\left(C + \frac{e^{2\phi_0}}{\lambda} \partial_v g(v)\right)^4}, \quad (1.101)$$

следующей из решения (1.99).

Полная энергия финального импульса при этом стремится к массе критической чёрной дыры. Действительно,

$$E_{\text{out}} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{u} (\partial_{\bar{u}} f_{\text{out}}(\bar{u}))^2 = \int_0^{+\infty} dv (\partial_v f_{\text{in}}(v))^2 \frac{-\lambda U(v)}{\partial_v U(v)}. \quad (1.102)$$

Подставляя в (1.102) приближенное решение (1.99), (1.101), получаем

$$E_{\text{f.p.}} \simeq \int_0^{+\infty} dv \frac{-2C \partial_v^2 g(v)}{\left(C + \frac{e^{2\phi_0}}{\lambda} \partial_v g(v)\right)^2} = M_{\text{cr}} \left(1 - \frac{C}{C + \frac{e^{2\phi_0}}{\lambda} \partial_v g(0)}\right), \quad (1.103)$$

что и требовалось доказать.

Подведем итог вышесказанному. Для решений с полным отражением и энергией чуть меньшей необходимой для образования чёрной дыры мы имеем универсальное поведение. Если рассматривать движение в асимптотически плоских координатах (\bar{v}, \bar{u}) , налетающий волновой пакет вынуждает границу отклониться от состояния равновесия, передавая её некоторое количество энергии. Затем, по истечению большого времени $\propto \ln C$, граница резко начинает движение обратно к положению равновесия, ускоряясь почти до световой скорости и сообщая энергию порядка M_{cr} затухающей части начального волнового пакета. Таким образом, формируется узкий пик в распределении энергии конечного волнового пакета. В пределе $C \rightarrow 0$ его задержка становится бесконечно большой, и формируется критическая чёрная дыра с массой M_{cr} .

1.5.2. Чувствительность к начальным данным

Наличие бесконечного множества точных решений из параграфа 1.4 может навести на мысль, что модель КГХС с границей является интегрируемой, то есть существует некоторый полный набор гладких на фазовом пространстве сохраняющихся величин $\{\mathcal{I}_k\}$, параметризующих пространство решений. Тем не менее, это не так.

Для влетающих волновых пакетов можно рассматривать произвольные функционалы вида

$$\mathcal{I}_k[f_{\text{out}}] = \int d\bar{v} D[f_{\text{in}}](\bar{v}), \quad (1.104)$$

которые могут быть вычислены на произвольной поверхности Коши и тривиально сохраняются. Нас интересует отображение $f_{\text{in}} \mapsto f_{\text{out}}$ и связь между $\mathcal{I}_k[f_{\text{in}}]$ и $\mathcal{I}_k[f_{\text{out}}]$.

Покажем, что данная зависимость не является регулярной вблизи критических решений. Рассмотрим возмущенный волновой пакет f_{in} , характеризующийся модуляцией с амплитудой γ и частотой ω :

$$\partial_v f_{\text{in}} \sim \frac{A}{v^2} \cos(\omega \ln(\lambda v)), \quad Cv \sim \partial_v g, \quad (1.105)$$

причем возмущение локализовано в отражающейся от «плато» части пакета. Очевидно, что предел $\omega \rightarrow 0$ совпадает с невозмущенным решением $\sim Av^{-2}$.

Оценим для отражённого волнового пакета интеграл движения

$$\mathcal{I}_3(C, \omega) = \int d\bar{u} (\partial_{\bar{u}} f_{\text{out}})^3 = \mathcal{I}_3^0 + \Delta\mathcal{I}_3, \quad (1.106)$$

где мы явно выделили часть, зависящую от величины модуляции пакета:

$$\Delta\mathcal{I}_3 = \int_0^\infty dv \frac{C^2 (\partial_v f_{\text{in}}(v))^3}{\left(C + \frac{e^{2\phi_0}}{\lambda} \partial_v g(v)\right)^4}. \quad (1.107)$$

Подставляя в $\Delta\mathcal{I}_3$ выражение (1.105), получаем $\Delta\mathcal{I}_3(e^{\frac{6\pi n}{\omega}} C, \omega) = e^{-\frac{2\pi n}{\omega}} \Delta\mathcal{I}_3(C, \omega)$, так что $\Delta\mathcal{I}_3 = C^{-1/3} \mathcal{J}(\omega \ln C)$; функция \mathcal{J} имеет период 6π . Мы видим, что функционал \mathcal{I}_3 имеет существенно особую точку при $C = \omega = 0$, то есть в зависимости от способа взятия двойного предела мы сможем получить любое значение \mathcal{I}_3 , что схематически представлено на Рис. 1.9.

Таким образом, структура финального импульса при $C \rightarrow +0$ оказывается чувствительна к небольшим возмущениям начальных данных, что напоминает поведение классических хаотических систем. Поскольку отображение

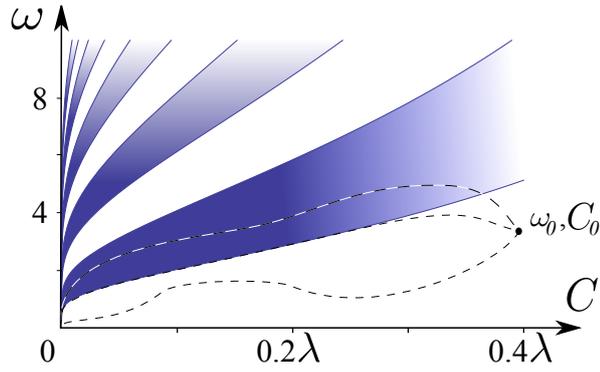


Рис. 1.9. Схематическое изображение функционала $\Delta\mathcal{I}_3$ для волнового пакета с модуляцией (1.105), $A^2 = 12e^{-2\phi_0}/\lambda^2$ на плоскости (C, ω) . Цветом выделены области, где $\Delta\mathcal{I}_3 < 0$.

$\mathcal{I}_k(\mathcal{I}_m)$ не является регулярным, невозможно подобрать полный набор сохраняющихся величин, который бы гладко покрывал фазовое пространство решений. Это говорит о неинтегрируемости модели с границей.

1.6. Заключение к главе

Мы изучили классическую модель КГХС с отражающей границей на линии $\phi = \phi_0$, играющей роль, аналогичную началу координат в сферически-симметричном секторе высокоразмерной гравитации. В модели существует нижний предел на возможную массу чёрных дыр $M_{\text{ст}} = 2\lambda e^{-2\phi_0}$. Если сделать критическую массу достаточно большой, то мы избежим необходимости иметь дело с сильной связью.

Динамика модели определяется единственным дифференциальным уравнением, следующим из граничных условий, для которого было найдено большое количество точных решений, описывающих как гравитационный коллапс, так и полное отражение - режим, отсутствовавший в изначальной классической модели КГХС. Обнаружение аналитических решений, описывающих распространение протяженных волновых пакетов, может оказаться существенным шагом вперёд для решения квантовой задачи рассеяния квазиклассическими методами.

Мы также уделили внимание критическим явлениям, то есть особенностям поведения системы на пороге формирования чёрных дыр. Мы показали, что этот режим отражения от границы несовместен с существованием полного набора интегралов движения, гладких на фазовом пространстве. Если ввести набор сохраняющихся величин для влетающих и вылетающих волновых пакетов и рассмотреть их отображение вблизи критических решений, то оно оказывается сингулярным. Таким образом, это свойство интересно в контексте квантового хаоса вблизи горизонта [68, 69].

Глава 2

Квазиклассическая модель РСТ с границей

2.1. Введение к главе

Вторая глава посвящена проблеме квантовомеханического испарения чёрных дыр в дилатонной гравитации. Рождение частиц чёрной дырой и их обратное влияние на метрику можно учесть с помощью конформной аномалии следа тензора энергии-импульса: $\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle = (N/24\pi)R$ для N скалярных полей. При этом, вкладом полей дилатона, метрики и калибровочных духов можно пренебречь при условии наличия большого количества полей $N \gg 1$, а также малости квазиклассического параметра $Ne^{2\phi_0} \ll 1$. Соответствующие квазиклассические поправки к полевым уравнениям можно получить из действия Лиувилля-Полякова [70]:

$$S_{\text{PL}} = -\frac{N}{96\pi} \int d^2x \sqrt{-g(x)} R(x) \int d^2y \sqrt{-g(y)} \mathcal{G}(x-y) R(y), \quad (2.1)$$

где $\mathcal{G}(x)$ - это функция Грина оператора Д'Аламбера. Действие (2.1) представляет собой однопетлевой вклад от N скалярных полей, получившийся после отынтегрирования флуктуаций в квадратичном порядке на фоне метрики $g_{\mu\nu}$, см. Рис. 2.1.

Мы рассмотрим модель Руссо-Сасскинда-Торласиуса (РСТ) [45, 71], описываемую действием

$$S_{\text{RST}} = S_{\text{CGHS}} - \frac{N}{48\pi} \int d^2x \sqrt{-g} \phi R, \quad (2.2)$$

отличающимся от (1.1) наличием локального контрчлена, призванного сохранить свойство точной решаемости в присутствии действия Лиувилля-Полякова.

В параграфе 2.2 эффективное действие Лиувилля-Полякова обобщается

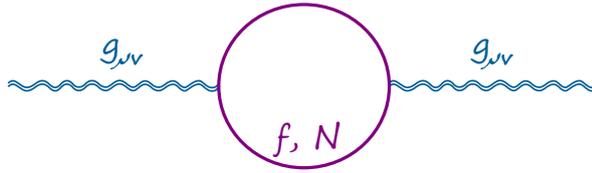


Рис. 2.1. Вклад скалярных полей в конформную аномалию.

на модель с границей при $\phi = \phi_0$. Для этого мы применяем условие самосогласованности Весса-Зумино с целью фиксации вида граничного слагаемого для модели РСТ. Из полученного действия выводятся полевые уравнения и граничные условия, из которых следуют общее решение, законы отражения и уравнение границы.

В параграфе 2.3 демонстрируется существование режима регулярного отражения и режима коллапса с образованием чёрной дыры. При этом рассматривается случай гладких начальных волновых пакетов. Показано, что физические решения, описывающие процесс испарения чёрных дыр, не могут быть определены однозначным образом из начальных данных задачи Коши.

В параграфе 2.4 мы интерпретируем полученные квазиклассические решения в контексте проблемы потери информации. Приведены аргументы, что из-за сингулярности в конце испарения они не могут быть седловыми решениями для квазиклассических вычислений амплитуд или корреляционных функций. Показано, что в модели РСТ с границей также не могут возникнуть остатки (remnants) без значительных нарушений граничных условий, что ограничивает применимость квазиклассических методов.

2.2. Модель РСТ с согласованными граничными условиями

2.2.1. Эффективное действие

Выведем эффективное действие для однопетлевой модели РСТ с границей $\phi = \phi_0$. Во-первых, к классическому действию (2.2) необходимо добавить граничное слагаемое

$$S_{\text{RST},b} = 2 \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau \left[(e^{-2\phi} - Q^2\phi)K + 2\lambda(e^{-2\phi} + Q^2/2) + \Lambda \cdot (\phi - \phi_0) \right], \quad (2.3)$$

включающее член Гиббонса-Хокинга с внешней кривизной K , отрицательную «массу» границы $m_b = -2\lambda(2e^{-2\phi_0} + Q^2)$, необходимую для существования решения в форме линейного дилатонного вакуума, и множитель Лагранжа, фиксирующий положение границы на линии $\phi = \phi_0$.

Во-вторых, действие Лиувилля-Полякова (2.1) представляется в явно локальном и ковариантном виде [72]

$$S_{\text{PL},\chi} = \int d^2x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2}(\nabla_\mu\chi)^2 + Q\chi R \right), \quad (2.4)$$

где было введено дополнительное поле χ , представляющее собой коллективный квантовомеханический вклад от полей f_i . Вариация действия (2.4) даёт следующее уравнение на χ :

$$\square\chi = -QR. \quad (2.5)$$

Таким образом, проинтегрировав по полю χ в функциональном интеграле, мы вновь получим (2.1). Для упрощения записи выражений мы ввели обозначение $Q^2 := N/48\pi$.

В-третьих, нам нужно определить вид граничного слагаемого, совместного с действием Лиувилля-Полякова (2.4). Для этого мы воспользуемся условием самосогласованности Весса-Зумино для квантовых аномалий [73, 74]. Очевидно, что

$$\delta_{\varepsilon_1}\delta_{\varepsilon_2}S_{\text{eff}} - \delta_{\varepsilon_2}\delta_{\varepsilon_1}S_{\text{eff}} = \delta_{[\varepsilon_1,\varepsilon_2]}S_{\text{eff}}, \quad (2.6)$$

где δ_ε - функциональная производная эффективного действия S_{eff} относительно преобразования ε .

Нас интересует конформная аномалия с соответствующей ей группой преобразований Вейля с $\delta_W g_{\mu\nu} = 2\omega(x)g_{\mu\nu}$. Из-за коммутативности условие (2.6) сводится к требованию симметричности второй функциональной производной эффективного действия $\delta_{W_1}\delta_{W_2}S_{\text{eff}}$ [75], что даёт следующее требование на вариацию

$$\delta_W S_{\text{eff}} = \frac{N}{24\pi} \left(\int d^2x \sqrt{-g} R\omega + 2 \int d\tau K\omega \right) \quad (2.7)$$

для любой совместной квантовой теории поля на пространстве с границей.

К локальному действию (2.4) возможно добавить только один граничный вклад

$$S_{\text{PL},b} = 2 \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau QK\chi, \quad (2.8)$$

который согласован с вариацией (2.7), следующей из условия Весса-Зумино [76]. Действительно, при вейлевских вариациях мы имеем

$$\delta_W(S_{\text{PL},\chi} + S_{\text{PL},b}) = 2Q^2 \int d^2x \sqrt{-g} R\omega + 4Q^2 \int d\tau K\omega, \quad (2.9)$$

где было учтено преобразование дополнительного поля $\delta_W\chi = 2Q\omega$.

В итоге, мы получаем эффективное действие однопетлевой модели PCT,

$$S = S_{\text{RST}} + S_{\text{PL},\chi} + S_{\text{RST},b} + S_{\text{PL},b}, \quad (2.10)$$

где классическое действие PCT S_{RST} , граничный член $S_{\text{PL},\chi}$ и однопетлевые поправки $S_{\text{RST},b}$, $S_{\text{PL},b}$ даются, соответственно, уравнениями (2.2), (2.4), (2.3) и (2.8).

Существует интересный факт, который служит дополнительной мотивацией для изучения модели PCT. Было показано, что модель двумерной гравитации Джакива-Тейтельбойма (ДТ) в плоском пределе имеет унитарную S-матрицу [77], а её евклидова версия соответствует некой матричной модели [78].

Также континуальные интегралы в моделях РСТ и ДТ связаны преобразованиями полей [54]

$$\hat{g}_{\mu\nu} = e^{-2\phi} g_{\mu\nu}, \quad \hat{\phi} = e^{-2\phi} + Q^2\phi, \quad \hat{f}_i = f_i \quad \hat{\chi} = \chi - 2Q\phi, \quad (2.11)$$

где поля с «крышками» относятся к модели ДТ.

К сожалению, соответствие между моделями РСТ и ДТ невозможно установить на всем пространстве-времени, поскольку преобразование полей (2.11) сингулярно на линии $\phi = \phi_{\text{cr}} = -\ln(Q^2/2)/2$. Проблему можно решить, введя в каждой модели границы на линиях $\phi = \phi_0 < \phi_{\text{cr}}$ и $\hat{\phi} = \hat{\phi}_0(\phi_0)$. Квантовое соответствие с таком случае удаётся установить уже глобально [54]. Ценой становится возможная потеря унитарности модели ДТ.

В Приложении А.2 мы выводим полевые уравнения модели РСТ и находим общее решение для конформного вида метрики (1.2). Решение для поля f это (1.3), а решением для дополнительного поля χ является

$$\chi(v, u) = 2Q\rho(v, u) + \chi_{\text{in}}(v) + \chi_{\text{out}}(u), \quad (2.12)$$

где произвольные функции $\chi_{\text{in}}(v)$ и $\chi_{\text{out}}(u)$ представляют собой квантовые части влетающих и вылетающих волновых пакетов. Данные функции преобразуются согласно закону

$$\tilde{\chi}_{\text{in}}(\tilde{v}) = \chi_{\text{in}}(v) + Q \ln \frac{d\tilde{v}}{dv}, \quad \tilde{\chi}_{\text{out}}(\tilde{u}) = \chi_{\text{out}}(u) + Q \ln \frac{d\tilde{u}}{du}. \quad (2.13)$$

при репараметризациях $(v, u) \mapsto (\tilde{v}(v), \tilde{u}(u))$ координат светового конуса.

Дополнительно фиксируя квазикрускаловское условие $\rho = \phi$, мы получаем решение для поля дилатона

$$\Omega := e^{-2\phi} + Q^2\phi = -\lambda^2 vu + g(v) + h(u). \quad (2.14)$$

Мы фиксируем вид функций

$$g(v) = \frac{1}{2} \int_0^v dv' \int_{v'}^{+\infty} dv'' \left(T_{vv}(v'') + \frac{Q^2}{(v'')^2} \right) - \frac{Q^2}{2} \ln(\lambda v) ,$$

$$h(u) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^u du' \int_{-\infty}^{u'} du'' \left(T_{uu}(u'') + \frac{Q^2}{(u'')^2} \right) - \frac{Q^2}{2} \ln(-\lambda u) \quad (2.15)$$

таким образом, чтобы решение (2.14) имело те же асимптотики, что и решение (1.5) в модели КГХС.

Мы ввели функции

$$T_{vv} = (\partial_v f_{\text{in}})^2 + (\partial_v \chi_{\text{in}})^2 + 2Q \partial_v^2 \chi_{\text{in}} , \quad (2.16)$$

$$T_{uu} = (\partial_u f_{\text{out}})^2 + (\partial_u \chi_{\text{out}})^2 + 2Q \partial_u^2 \chi_{\text{out}} , \quad (2.17)$$

представляющие собой суммарные потоки энергии полей f и χ .

Рассмотрим вакуумное решение с $f(v, u) = \chi(v, u) = 0$. Отметим, что $\chi_{\text{in}}(v)$ и $\chi_{\text{out}}(u)$ по отдельности не обязаны быть равными нулю. Так как потоки энергии $\bar{T}_{\bar{v}\bar{v}} = \bar{T}_{\bar{v}\bar{v}} = 0$ в асимптотически плоских координатах (1.12), то из преобразований (2.13) следует, что в квазикрускаловских координатах

$$\chi_{\text{in}}(v) = Q \ln(\lambda v) , \quad \chi_{\text{out}}(u) = Q \ln(-\lambda u) . \quad (2.18)$$

Первое выражение из (2.18) в дальнейшем считается начальным условием задачи Коши для поля χ .

2.2.2. Законы отражения и уравнение границы

Варьируя действие (2.10) по отношению к значениям полей на границе, мы находим граничные условия¹ (см. вывод в Приложении А.2.3)

$$\nabla_n \chi = 2QK , \quad \nabla_n \phi = \lambda + \frac{Q \nabla_n \chi}{2e^{-2\phi_0} + Q^2} . \quad (2.19)$$

¹ Исходные граничные условия РСТ $R = 0$, $\nabla_n \phi = \lambda$ были введены *ad hoc* и оказались самопротиворечивыми [44]. Это становится очевидным здесь, поскольку из $\phi_0 = \phi_{\text{cr}}$ прямо следует $\nabla_n \phi = \lambda + K$.

Поскольку кривизна R расходится при $\phi_{\text{cr}} = -\ln(Q^2/2)/2$, см. уравнение (A.30), границу следует привязать к линии $\phi = \phi_0 < \phi_{\text{cr}}$.

Из первого граничного условия (2.19) следует закон отражения

$$\chi_{\text{out}}(U(v)) = \chi_{\text{in}}(v) + Q \ln(\partial_v U(v)), \quad (2.20)$$

а также связь между потоками энергии

$$(\partial_v U(v))^2 T_{uu}(U(v)) = T_{vv}(v) + 2Q^2 \{U(v); v\}, \quad (2.21)$$

где $\{U(v); v\} = \partial_v^3 U(v)/\partial_v U(v) - 3(\partial_v^2 U(v))^2/2(\partial_v U(v))^2$ - это производная Шварца, связанная с динамическим эффектом Казимира - рождением частиц движущимся зеркалом [79]. Уравнение (2.21) можно рассматривать как динамическое конформное преобразование полей материи.

Дифференциальное уравнение на функцию $u = U(v)$, следующее из граничных условий (2.19), меняется на

$$\partial_v U(v) = \frac{e^{2\phi_0}}{\lambda^2 (1 + e^{2\phi_0} Q^2/2)^2} \left(\partial_v g(v) - \frac{Q^2}{2} \frac{\partial_v^2 U(v)}{\partial_v U(v)} - \lambda^2 U(v) \right)^2. \quad (2.22)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $U(v) = -e^{-2\phi_0}/\lambda^2 v$ является решением уравнения (2.22) с функцией $\partial_v g(v) = -Q^2/2v$, которая соответствует вакуумному начальному условию. Таким образом, линейный дилатонный вакуум является решением полевых уравнений и удовлетворяет граничным условиям модели РСТ.

2.3. Описание процесса испарения

2.3.1. Свойства квазиклассических решений

Сформулируем задачу Коши для модели РСТ. Начальными условиями являются гладкий волновой пакет поля $f_{\text{in}}(v)$, функция $\chi_{\text{in}}(v)$ для поля χ в вакууме (2.18) и условие, что граница начинает движение из положения равновесия, $U(v) \simeq -e^{-2\phi_0}/\lambda^2 v$ при $v \rightarrow 0$.

Затем мы находим функцию $V(u)$, обратную к решению уравнения (2.22), и используем её, чтобы выразить неизвестные функции

$$\begin{aligned} f_{\text{out}}(u) &= f_{\text{in}}(V(u)) , & \chi_{\text{out}}(u) &= Q \ln(\lambda V(u)/\partial_u V(u)) , \\ h(u) &= \Omega_0 + \lambda^2 V(u)u - g(V(u)) , \end{aligned} \quad (2.23)$$

подставляя которые в (1.3), (2.12) и (2.14), мы находим решение задачи Коши.

Полученное решение (2.14) определяет положение линии $\phi = \phi_0$. При малых амплитудах волнового пакета f_{in} граница времениподобна и отражает поля материи регулярным образом как показано слева на Рис. 2.2. Если же амплитуда f_{in} выше некоторого порога, то появится сингулярность - часть линии $\phi = \phi_0$, на которой граничные условия нарушаются, как показано справа на Рис. 2.2. Приведём аналитические рассуждения, доказывающие оба утверждения.

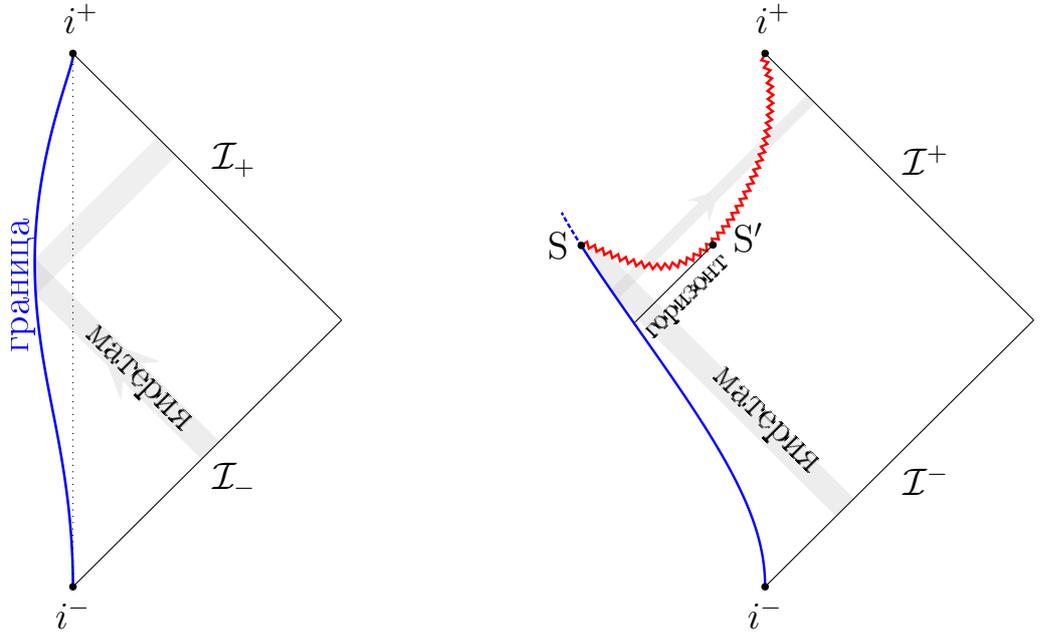


Рис. 2.2. Численное решение с волновым пакетом $(\partial_v f_{\text{in}})^2 = A \text{ch}^{-2}(\sigma(v - v_0))$ в модели РСТ с параметрами $\phi_0 = 0$, $Q = 0.5$, $\sigma = 8.5\lambda$, $\lambda v_0 = 0.7$, описывающее (слева) регулярное отражение при $A = 2.5\lambda^2$ и (справа) образование чёрной дыры при $A = 10\lambda^2$.

Для слабых возмущений, подставив анзац $U(v) = -e^{-\lambda\delta\bar{u}(\bar{v}) - 2\phi_0}/\lambda^2 v$ в уравнение (2.22) и отбрасывая слагаемые высших порядков по $\lambda\delta\bar{u}$, $\partial_{\bar{v}}\delta\bar{u} \ll 1$,

мы получаем линеаризованное уравнение

$$(Q^2 \partial_{\bar{v}}^2 + (e^{-2\phi_0} - Q^2/2) (\lambda \partial_{\bar{v}} + \lambda^2)) \delta \bar{u}(\bar{v}) = \partial_{\bar{v}} g_f (e^{\lambda \bar{v}} / \lambda) , \quad (2.24)$$

где

$$g_f(v) := g(v) + \frac{Q^2}{2} \ln(\lambda v) = \frac{1}{2} \int_0^v dv' \int_{v'}^{+\infty} dv'' (\partial_v f_{\text{in}}(v''))^2 . \quad (2.25)$$

Так как фундаментальные решения (2.24) $\delta \bar{u} \propto e^{ik\bar{v}}$ имеют $\Im m k > 0$, они описывают затухающие колебания² при $2/9 < e^{2\phi_0} Q^2$, либо аperiodическое движение. В обоих случаях граница возвращается к положению равновесия, что означает устойчивость вакуума РСТ относительно малых возмущений. В «глубоко квазиклассическом» режиме при $e^{-2\phi_0} \gg Q^2$, когда эффекты обратного влияния на метрику пренебрежимо малы, мы можем выбросить из (2.24) слагаемые $\propto Q^2$, что приводит к уравнению, описывающему малые возмущения в модели Главы 1.

Покажем теперь, что при достаточно большом влетающем потоке энергии возникает сингулярность чёрной дыры. Поскольку в этом случае правая часть уравнения (2.22) велика, функция $U(v)$ растёт и в какой-то момент пересекает линию $u = 0$. Видимый горизонт, определяемый (1.46), имеет асимптотику $-Q^2/2v$ при $v \rightarrow +\infty$, поэтому граница должна пересечь его в некоторой точке $S = (v_s, U(v_s))$.

Дальнейшее рассуждение повторяет приведённое в параграфе 1.3.4. Мы раскладываем решение (2.14) в ряд Тейлора вблизи точки S , используя разложения

$$U(v) \sim u_s + u_1(v - v_s) , \quad g(v) \sim g_1(v - v_s) + g_2(v - v_s)^2/2 . \quad (2.26)$$

Отбрасывая старшие порядки по $(v - v_s)$ в уравнении $\Omega(v, \hat{U}(v)) = \Omega_0$ на неизвестную функцию $\hat{U}(v) \sim u_s + \hat{u}_1(v - v_s)$, мы получаем квадратное уравнение

² Осциллирующее поведение границы было отмечено в [49].

$$(2\lambda^2 u_1 - g_2)\hat{u}_1^2 - 2(\lambda u_1)^2 \hat{u}_1 + g_2(u_1)^2 = 0 . \quad (2.27)$$

Первый корень $\hat{u}_1 = u_1$ соответствует части границы, двигающейся в соответствии с уравнением (2.22). Второй корень

$$\hat{u}_1 = \frac{g_2 u_1}{2\lambda u_1 - g_2} \quad (2.28)$$

при $g_2 < 0$ соответствует части линии $\phi = \phi_0$, представляющей собой пространственноподобную сингулярность, выходящую из точки S.

2.3.2. Точно решаемая деформация и процесс испарения

К сожалению, уравнение (2.22) не удаётся решить точно. Чтобы преодолеть эту трудность, мы рассмотрели следующую деформацию граничных условий, предложенную в [80],

$$\chi_{\text{out}}(U(v)) + \chi_{\text{in}}(v) = \text{const} . \quad (2.29)$$

Решения, следующие из условия (2.29), приближенно описывают решения в исходной модели, но следует понимать, что на квантовом уровне полученная деформация не является самосогласованной.

Граница в разрешимой деформации подчиняется уравнению

$$\partial_v U(v) = \frac{e^{2\phi_0}}{\lambda^2 (1 + e^{2\phi_0} Q^2/2)^2} \left(\partial_v g(v) + \frac{Q}{v} - \lambda^2 U(v) \right)^2 , \quad (2.30)$$

вывод которого представлен в Приложении А.2.3. Видно, что по структуре уравнение (2.30) выглядит точно так же как (1.35), а значит может быть решено точно теми же методами, что были изучены в параграфе 1.4.

Уравнение границы в точно решаемой деформации (А.38) с помощью подстановки $e^{-2\phi_0}(1 + e^{2\phi_0} Q^2/2)^2 W = \partial_v g + Q/v - \lambda^2 U$ принимает вид уравнения (1.60) с функцией

$$\mathcal{T}(v) = -\frac{e^{2\phi_0}}{2(1 + e^{2\phi_0} Q^2/2)^2} \left((\partial_v f_{\text{in}})^2 + \frac{Q^2}{v^2} \right) . \quad (2.31)$$

В качестве решения уравнения (1.60) выберем анзац

$$W(v) = \frac{k_+}{v} + \frac{1}{v - \tilde{v}} - \frac{1/2}{v - a - ib} - \frac{1/2}{v - a + ib}, \quad (2.32)$$

с вычетом $k_+ = (1 + e^{2\phi_0} Q^2/2)^{-1}$ в нуле, соответствующим фиксации линейного дилатонного вакуума в начале, аналогично выбору $W \sim v^{-1}$ при $v \rightarrow 0$ для модели КГХС с границей. Волновой пакет $f_{\text{in}}(v)$ задаётся посредством двух сингулярностей при $v_{2,1} = a \pm ib$, как для простых солитонов. Положение полюса при $v = \tilde{v}$ определяется из условия регулярности функции $\mathcal{T}(v)$ в данной точке: $(\tilde{v} - a)^2 + b^2 = (1 + e^{2\phi_0} Q^2/2)\tilde{v}(\tilde{v} - a)$, что даёт два корня:

$$\tilde{v}_{\pm} = \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-2\phi_0}}{Q^2} \right) a \pm \frac{|a|e^{-2\phi_0}}{Q^2} \sqrt{k_+^2 + \frac{2b^2 e^{2\phi_0} Q^2}{a^2}}. \quad (2.33)$$

Условию действительности $(\partial_v f_{\text{in}})^2 \geq 0$ удовлетворяет только решение с \tilde{v}_+ :

$$\begin{aligned} (\partial_v f_{\text{in}})^2 = & \frac{6e^{-2\phi_0} k_+^2 b^2}{[(v - a)^2 + b^2]^2} - \frac{4e^{-2\phi_0} k_+}{v} \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{1}{\tilde{v}_+} \right) + \\ & - \frac{4e^{-2\phi_0} k_+^2}{(v - a)^2 + b^2} \left[1 + \frac{(\tilde{v}_+ - a)v + a^2 - b^2 - a\tilde{v}_+}{(\tilde{v}_+ - a)^2 + b^2} + \frac{a^2 - b^2 - av}{k_+^2 (a^2 + b^2)} \right]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Решение (2.32) не может описывать регулярное отражение, так как $\tilde{v}_+ > 0$ при всех значениях параметров a, b , что указывает на неизбежное возникновение сингулярности. Решение, описывающее испаряющуюся чёрную дыру, показано на Рис. 2.3(а,б).

Сравнивая уравнения (2.22) и (2.30), мы видим, что одно получается из другого заменой $\partial_v^2 U / \partial_v U$ на $-2/v$, что допустимо в случае, когда граница пересекает горизонт задолго до того, как разница начинает играть существенную роль. Действительно, граница в таком случае движется согласно

$$U(v) \simeq \frac{g_1}{\lambda} - \frac{e^{-2\phi_0}}{\lambda^2 v}, \quad g_1 := \partial_v g_f(0). \quad (2.35)$$

Таким образом, вне непосредственной окрестности точки S, решения исходной модели и разрешимой деформации приблизительно совпадают, и мы можем

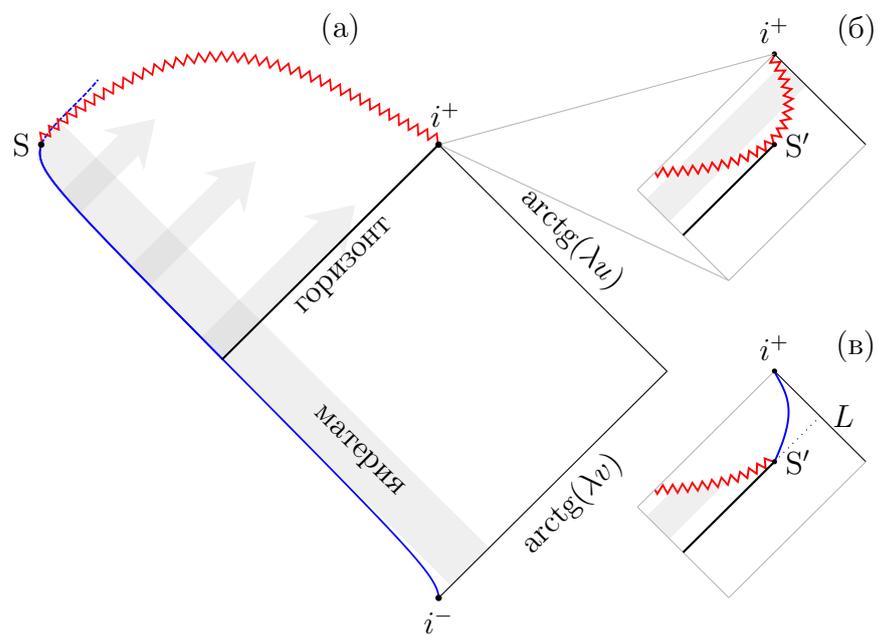


Рис. 2.3. (а) Образование чёрной дыры материей, отражающейся от границы и затем падающей в сингулярность. Показано решение (2.3.2) при $a = 0$, $b = \lambda^{-1}$, $\phi_0 = 0$ и $Q = 1$ в точно решаемой деформации. (б) Увеличенная часть диаграммы Пенроуза, показывающая финальную стадию испарения. (в) Скорректированная финальная стадия испарения с границей, подчиняющейся уравнению (2.22).

использовать последнюю в качестве обоснованного приближения при изучении гравитационного коллапса.

При помощи функции обратной к (2.35) мы находим

$$h(u) \approx -\frac{Q^2}{2} \ln \left(\frac{g_1}{\lambda} - \lambda u \right), \quad (2.36)$$

а затем и всё остальное решение

$$\Omega(v, u) \approx -\lambda^2 v u + g_f(v) - \frac{Q^2}{2} \ln (v(g_1 - \lambda^2 u)), \quad (2.37)$$

которое остаётся приблизительно верным в области достаточно далекой от зоны столкновения волнового пакета f_{in} с границей вблизи точки S.

Решение (2.37) описывает испарение чёрной дыры. Уравнение $\phi = \phi_0$ определяет две кривые - регулярную часть границы, описываемую функцией (2.35), и пространственноподобную сингулярность, начинающуюся в точке S на Рис. 2.3(а).

В некоторой точке $S' = (v_e, u_e)$ сингулярность $\phi = \phi_0$ становится времениподобной, что показано на Рис. 2.3(б). Положение точки S' определяется из условия пересечения линии $\phi = \phi_0$ с видимым горизонтом $u = \partial_v g(v)/\lambda^2$. Дифференцируя решение (2.37) по v , мы получаем

$$u_e \approx -\frac{Q^2}{2\lambda^2 v_e} + o(v_e^{-2}), \quad v_e \approx \frac{1}{g_1} \left[\exp \left(1 + \frac{E_{\text{in}} - 2\lambda\Omega_0}{\lambda Q^2} \right) - \frac{Q^2}{2} \right]. \quad (2.38)$$

Линия $u = u_e$ задаёт положение горизонта событий.

2.3.3. После конца испарения

Решение (2.37) не стремится к асимптотически плоскому, как это следует ожидать для физического процесса испарения. Действительно, мы имеем

$$U(v) \simeq -\frac{Q^2}{2\lambda^2 v} \ln(g_1 \lambda v) \quad (2.39)$$

для асимптотики линии $\phi = \phi_0$ при $v \rightarrow +\infty$. Видно, что граница не стремится к состоянию равновесия $U(v) \sim -e^{-2\phi_0}/\lambda^2 v$ и, поскольку граничные

условия на этой линии нарушены, она представляет собой времениподобную голую сингулярность.

Данное поведение нестабильно, так как граница постоянно излучает поток энергии

$$T_{\bar{u}\bar{u}} = \lambda^2 Q^2 \left(1 - \left(1 + \frac{g_1}{\lambda} e^{\lambda \bar{u}} \right)^{-2} \right), \quad (2.40)$$

который определяется при помощи формул (2.21), (2.35) в асимптотически плоских координатах (\bar{v}, \bar{u}) .

Поток (2.40) представляет собой излучение Хокинга: на больших временах $\bar{u} \rightarrow +\infty$ он выходит на значение $\lambda^2 Q^2 = \lambda^2 N/48\pi$, равное плотности энергии безмассового летящего вправо Бозе-газа

$$\varepsilon = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \frac{k}{e^{k/T_H} - 1} = \frac{\pi T_H^2}{12} \quad (2.41)$$

с температурой Хокинга $T_H = \lambda/2\pi$ для модели КГХС.

Это приводит к убеждению, что истинное физическое решение не может совпадать с (2.37) всюду. Именно, часть решения между времениподобной сингулярностью и линией $u = u_e$ определяется вылетающими волновыми пакетами полей f_{out} и χ_{out} , которые, в свою очередь, отражаются от части регулярной границы $U(v)$, скрытой под горизонтом событий чёрной дыры. При этом волновые пакеты f_{out} и χ_{out} формально проходят через область $\phi > \phi_0$, исключенную из физических решений, см. Рис. 2.3(б).

Данной патологии можно избежать, если рассматривать линию $u = u_e$ в качестве горизонта Коши, после которого излучение Хокинга (2.40) прекращается, а граница $\phi = \phi_0$ вновь удовлетворяет уравнению (2.22). Задав начальное значение $\partial_v U(v_e)$ и решив заново уравнение (2.22) для несингулярной границы, появляющейся в точке S' , мы получаем новое решение, которое приближается к асимптотически плоскому, см. Рис. 2.3(в). Для такого решения, склеенного из двух кусков, энергия сохраняется как и при регулярном отражении, что доказано в Приложении А.3.

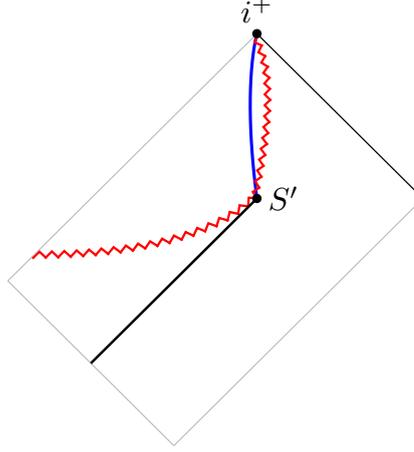


Рис. 2.4. Запрещённая ситуация с нарушением условия (2.43).

Хокинговская стадия испарения завершается при $u = u_e$. Используя формулы (2.36) и (A.41), мы находим полную энергию излучения Хокинга

$$\begin{aligned} E_{\text{H}} &\simeq \lambda Q^2 \left[\ln \left(1 - \frac{g_1}{\lambda^2 u_e} \right) + \left(1 - \frac{\lambda^2 u_e}{g_1} \right)^{-1} \right] = \\ &= E - M_{\text{cr}} - Q^2 \ln (Q^2 e^{2\phi_0}) + O(Q^2) . \end{aligned} \quad (2.42)$$

Определенной платой за улучшение ситуации становится неоднозначность «склеенного» решения, выражающаяся в произвольности параметра

$$\partial_v U(v_e) < -\frac{T_{vv}(v_e)}{2\lambda^2} \approx \frac{Q^2}{2\lambda^2 v_e^2} , \quad (2.43)$$

определяющего начальную скорость новой ветви границы, возникающей в конце испарения в точке S' . Как мы покажем далее, ограничение (2.43) приводит к невозможности образования остатков (remnants).

«Склеенное» решение не имеет сингулярностей за исключением дельта-функциональной, возникающей из-за негладкости полей на последнем луче $S'L$, называемой хлопком (thunderpop [45]). Хлопок может возникнуть и для решения без горизонта на пороге образования чёрной дыры, когда $U(v)$ пересекает видимый горизонт, но сингулярная ветвь $\phi = \phi_0$ времениподобна, что следует из непрерывной зависимости решения от начальных данных.

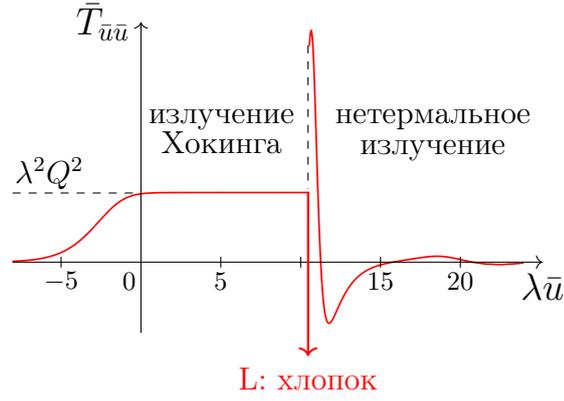


Рис. 2.5. Поток энергии $T_{\bar{u}\bar{u}}$ для решения, представленного на Рис. 2.3(в).

С помощью формул

$$\partial_v g(v_e) = \lambda^2 u_e, \quad \lim_{u \rightarrow u_e+0} \partial_u h(u) = \lambda^2 v_e \quad (2.44)$$

и (A.41) мы вычисляем полную энергию хлопка:

$$E_{\text{th-pop}} = 2\lambda u_e \partial_u h \Big|_{u_e-0}^{u_e+0} = -\lambda Q^2 \cdot \left(1 + \frac{Q^2}{2g_1 v_e}\right)^{-1} \approx -\lambda Q^2. \quad (2.45)$$

Используя уравнение (2.21) мы находим численно поток энергии после S'L. Полная картина представлена на Рис. 2.5.

Поскольку полная энергия сохраняется, из (2.42) и (2.45) следует, что энергия нетермальной части испарения порядка массы критической черной дыры. Заметим, что поток энергии при этом не оказывается положительно определенным, что постоянно встречается в исследованиях моделей с движущимися зеркалами.

2.4. Возвращение к информационному парадоксу

2.4.1. Сингулярность в конце испарения

Кажется вполне очевидным, что геометрия квазиклассических решений, полученных в предыдущем параграфе, почти гладкая: даже на сингулярностях, представляющих пространственноподобную часть границы $\phi = \phi_0$, кривизна R остается конечной, а поля всюду гладкие, кроме последнего луча с

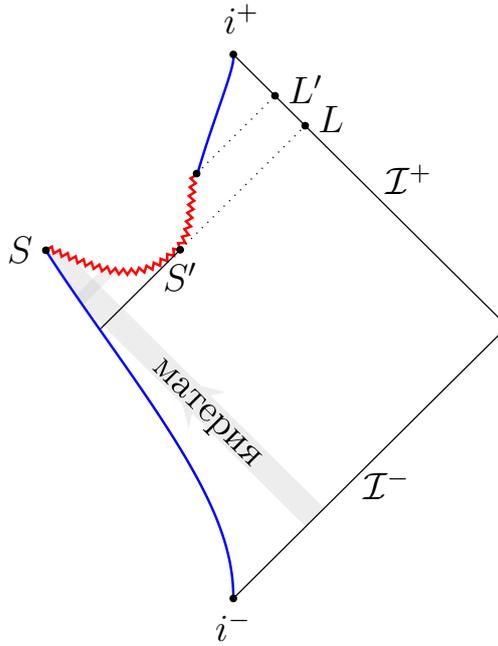


Рис. 2.6. Квантовая область вблизи регуляризованной сингулярности S' .

хлопком. Тем не менее, проблема всё равно возникает, если мы попытаемся использовать эти склеенные решения для вычисления эффективного действия. Действительно, совершенно неясно, как именно вычислять граничные вклады от углов на пересечениях различных кусков границы (точки S и S' на Рис. 2.6).

Можно попробовать регуляризовать границу вблизи конца испарения с помощью квадратичной функции $U_{\text{reg}}(v) = u_e + \text{const} \cdot (v - v_e)^2$ в точке S' . Это даёт внешнюю кривизну

$$K(\tau) \sim (3(\tau - \tau_0))^{-1}, \quad \tau \rightarrow \tau_0, \quad (2.46)$$

где τ - собственная длина границы при $\tau < \tau_0$ и собственное время при $\tau > \tau_0$. Очевидно, это даёт логарифмическую расходимость в действии. Если игнорировать вклады от S и S' , это приводит к добавлению произвольных контрчленов в данных точках, зависящих от полей модели РСТ. При этом, точка S' является видимой для удалённого наблюдателя. Таким образом, финальная точка испарения S' является настоящей сингулярностью решения.

Другим аспектом проблемы сингулярности модели РСТ является сам хлопок. Предположительно, это не более чем артефакт приближения среднего

поля, и в целом он безвреден. Однако существует распространенное представление [43, 81], что «разрывное конформное преобразование» либо мгновенное изменение граничных условий на последнем луче $S'S$ приводит к неинтегрируемой сингулярности по типу молнии (thunderbolt [82]).

Мы воспроизведем аргумент [43]. Для поля f_{in} в вакууме мы имеем

$$G_{\text{in}}(\bar{v}, \bar{v}') = \langle \hat{f}_{\text{in}}(\bar{v}) \hat{f}_{\text{in}}(\bar{v}') \rangle = -\frac{1}{4\pi} \ln |\bar{v} - \bar{v}'|. \quad (2.47)$$

С помощью закона отражения формула (2.47) преобразуется в корреляционную функцию для конечного состояния [83]:

$$G_{\text{out}}(\bar{u}, \bar{u}') = G_{\text{in}}(\bar{v}(\bar{u}), \bar{v}(\bar{u}')). \quad (2.48)$$

Для границы из двух несвязных кусков корреляционная функция (2.48) регулярна при $\bar{u}' \rightarrow \bar{u}_e + 0$ и $\bar{u}' \rightarrow \bar{u}_e - 0$, отличаясь от вакуумной (2.47) в окрестности произвольно малого размера ε . Такое поведение приводит к неинтегрируемой сингулярности в потоке энергии

$$\langle \bar{T}_{\bar{u}\bar{u}}(\bar{u}_e) \rangle = \lim_{\substack{\bar{u}'' \rightarrow \bar{u}_e + 0 \\ \bar{u}' \rightarrow \bar{u}_e - 0}} \partial_{\bar{u}''} \partial_{\bar{u}'} \langle \hat{f}_{\text{out}}(\bar{u}'') \hat{f}_{\text{out}}(\bar{u}') \rangle \sim \lim_{\substack{\bar{u}'' \rightarrow \bar{u}_e + 0 \\ \bar{u}' \rightarrow \bar{u}_e - 0}} \frac{1}{4\pi(\bar{u}'' - \bar{u}')^2}, \quad (2.49)$$

вычисленном с помощью метода расщепления точек [6]. Отсюда следует, что вблизи $S'L$ существуют возбуждения скалярного поля с произвольно большими импульсами. В то же время, однопетлевая модель РСТ предсказывает интегрируемую особенность - хлопок - на горизонте Коши $u = u_e$.

Поскольку точка S' представляет сингулярность однопетлевой модели РСТ, мы не можем использовать выражение (2.48) всюду в окрестности S' . Регуляризованный коррелятор, однако, приводит к конечному потоку энергии внутри интервала LL' . Ограничение на полную энергию, следующее из условия сшивки $\partial_u h$ на концах интервала LL' приводит к ограничению $\approx -\lambda^2 Q^2$, совпадающему с энергией дельта-функционального хлопка.

2.4.2. Отсутствие остатков

Сформулируем информационный парадокс в рамках модели РСТ с границей. Для этого мы введём энтропию запутывания квантовых полей, представляющую собой величину $S_{\text{ent}} = -\text{Tr} \hat{\rho}_\Sigma \ln \hat{\rho}_\Sigma$, где $\hat{\rho}_\Sigma$ - матрица плотности, описывающая смешанное состояние кватового поля, локализованного в области Σ .

В двумерной конформной теории поля существует геометрическая формула для энтропии запутывания полей внутри интервала $[u'', u']$ с его внешней частью $S(u'', u')$. В Приложении В мы вычисляем энтропию излучения Хокинга $S_{\text{H}} = S(-\infty, u_e - 0]$ и энтропию нетермального излучения после конца испарения $S_{\text{NT}} = S[u_e + 0, +\infty)$:

$$S_{\text{H}} = -\frac{N}{12} \ln \left. \frac{d\bar{v}}{d\bar{u}} \right|_{\bar{u}=\bar{u}_e-0}, \quad S_{\text{NT}} = -\frac{N}{12} \ln \left. \frac{d\bar{v}}{d\bar{u}} \right|_{\bar{u}=\bar{u}_e+0}. \quad (2.50)$$

Если полное конечное состояние чистое, то по определению энтропии запутывания $S_{\text{H}} = S_{\text{NT}}$, что автоматически выполняется для регулярной (гладкой) границы. Для случая несвязных кусков это условие означает, что излучение Хокинга полностью запутано с высокоэнтропийным остатком (remnant) - конечной стадией эволюции чёрной дыры.

Используя приближенное решение (2.37), мы получаем оценку для энтропии излучения Хокинга

$$S_{\text{H}} \approx \frac{4\pi}{\lambda} (E_{\text{in}} - M_{\text{cr}}) + O(Q^2), \quad (2.51)$$

что согласуется с энтропией $S = 2E/T_{\text{H}}$ одномерного идеального Бозе-газа с температурой $T_{\text{H}} = \lambda/2\pi$ и полной энергией $E_{\text{in}} - M_{\text{cr}}$. Таким образом, энтропия запутывания излучения Хокинга имеет максимально большое значение, равное термодинамической энтропии.

В литературе ранее приводились аргументы, что остатки могут возникать в модели КГХС [84]. Энтропия остатка большая, если граница улетает

в сторону от удаленного наблюдателя со скоростью $d\bar{u}/d\bar{v} \approx \exp(12S_{\text{H}})$, что следует из равенства $S_{\text{H}} = S_{\text{NT}}$ [20]. Однако в однопетлевой модели РСТ такое решение не существует, поскольку скорость границы в конце испарения ограничена величиной (2.43). Таким образом, потеря информации в таком подходе неизбежна, см. также [85].

Из приведенных рассуждений следует, что для унитарности испарения теория среднего поля не может быть верной по меньшей мере в конце испарения. Геометрии с остатками могут описываться решениями, не следующими из эффективной однопетлевой теории. Такими могут быть полевые конфигурации с сингулярными статическими границами, начинающимися в точке S' , и пребывающие в таком состоянии достаточное для излучения мягких квантов время.

2.5. Заключение к главе

Мы предложили лагранжеву формулировку однопетлевой модели РСТ, учитывающую наличие отражающей границы $\phi = \phi_0$. Мы вывели самосогласованное граничное условие для эффективного действия на однопетлевом уровне, используя условие Весса-Зумино. После этого мы заново рассмотрели квазиклассические решения, описывающие процесс испарения чёрных дыр. Из-за неустранимой сингулярности в конце испарения данные решения не удаётся использовать для вычисления эффективного действия. Путем вычисления энтропии запутывания для регуляризованных решений было также показано, что решить проблему потери информации в рамках одного только приближения среднего поля невозможно.

Можно предложить две точки зрения на возникшую проблему. Во-первых, может оказаться, что ввод границы $\phi = \phi_0$ делает модель плохо определённой на квантовом уровне примерно по той же причине, по которой оказыва-

ются неунитарными модели с первично квантованными частицами. Примером может служить парадокс Клейна [86], возникающий в теории релятивистского электрона, который заключается в появлении нефизических отрицательных вероятностей при превышении порога рождения электрон-позитронных пар. Решением парадокса Клейна становится рассмотрение вторично квантованного поля электронов наравне с полем фотонов. Аналогичная процедура, превращающая саму границу в квантовое поле могла бы привести к решению аналогичной проблемы в модели РСТ.

Во-вторых, проблема может заключаться в самом квазиклассическом методе: есть ряд ситуаций, когда проблематично определить физически значимую полевою конфигурацию, дающую лидирующий вклад в континуальный интеграл

$$\mathcal{A} = \int \mathcal{D}\Phi_{\text{out}} \mathcal{D}\Phi_{\text{in}} \Psi_{\text{out}}^*[\Phi_{\text{out}}] \Psi_{\text{in}}[\Phi_{\text{in}}] \int_{\Phi(t_{\text{in}})=\Phi_{\text{in}}}^{\Phi(t_{\text{out}})=\Phi_{\text{out}}} \mathcal{D}\Phi e^{iS[\Phi]} \quad (2.52)$$

для амплитуды квантового перехода $\Psi_{\text{in}} \mapsto \Psi_{\text{out}}$ с промежуточной чёрной дырой. Полевые конфигурации Φ в интеграле (2.52) живут в асимптотически плоском пространстве-времени.

При наивном подходе, квазиклассические решения либо не имеют правильного асимптотического поведения (вечная чёрная дыра в модели КГХС при $t \rightarrow +\infty$), либо оказываются сингулярными («склеенные» решения в модели РСТ). Последнее может быть связано с неправильным способом разделения системы на квазиклассический фон и квантованные возмущения, поскольку в качестве фона по-прежнему берется коллапсирующее решение с вечной чёрной дырой в конце³.

³ Например, до сих пор неявно предполагалось, что допустимо рассматривать унитарную эволюцию полей материи, живущих вблизи горизонта, по причине условной классичности фонового пространства-времени. Тем не менее, вполне вероятно, что квантовое запутывание частиц с геометрией все-таки имеет место, и разделять гравитирующую систему на фон и возмущения так просто уже нельзя [87].

Для преодоления проблемы необходимо, чтобы квазиклассическое решение сразу учитывало испарение чёрных дыр. Будучи всюду регулярным, искомого решение должно обходить сингулярности каким-либо образом через комплексную область. Существенно, что полное решение является комплексным и не соответствует действительной геометрии с точки зрения внешнего наблюдателя [88].

Также очевидно, что эти решения должны быть аналитически связаны с обычными действительными решениями, описывающими при малых энергиях классическое отражение без образования чёрных дыр. Нетривиальным шагом, однако, становится определение критерия для выбора правильной физической ветки комплексных квазиклассических решений, дающей лидирующий вклад в континуальный интеграл (2.52).

Это оборачивается весьма нетривиальной задачей в дилатонной гравитации со скалярным полем в качестве материи, которая не была до сих пор решена. Тем не менее, значительного прогресса удаётся добиться, если заменить скалярное поле на массивную точечную частицу с единственной степенью свободы $r_*(t)$. Решению данной задачи посвящена последняя глава.

Глава 3

Квазиклассическая S-матрица для гравитационного рассеяния

3.1. Введение к главе

В третьей главе мы используем квазиклассический метод комплексных траекторий [89] для вычисления амплитуды квантовомеханического рассеяния точечной частицы в дилатонной гравитации с границей. Данный метод уже применялся к задаче гравитационного рассеяния с тонкими оболочками [90] и показал разумные результаты, см. также [91].

В параграфе 3.2 мы рассматриваем уравнения движения и их решения для модели КГХС с точечной частицей в качестве материи. Для энергии частицы меньше $M_{\text{сг}}$ решение описывает простой отскок от границы с единичной вероятностью, как это показано на Рис. 3.1. При больших энергиях классические решения описывают образование чёрной дыры.

В параграфе 3.3 мы даём определение S-матрицы и находим регуляризованные решения для нахождения её элементов в квазиклассическом приближении. Вычисляются модуль и фаза амплитуды рассеяния.

В параграфе 3.4 мы обсуждаем экспоненциальное подавление амплитуды рассеяния для частицы с энергией выше $M_{\text{сг}}$. Вероятность туннелирования оказывается равной $\mathcal{P} \approx e^{-S_{\text{ВН}}}$, где $S_{\text{ВН}}$ - термодинамическая энтропия промежуточной чёрной дыры.

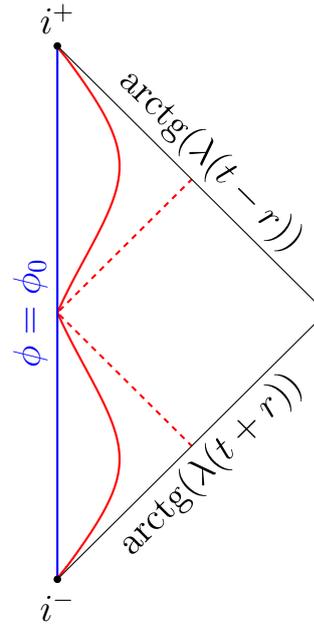


Рис. 3.1. Диаграмма Пенроуза для подкритического отражения в модели КГХС с границей $\phi = \phi_0$ и массивной ($m = 2\lambda/3$, сплошная линия) либо безмассовой ($m = 0$, пунктирная линия) частицей с полной энергией $M = \lambda$. Критическая масса $M_{\text{cr}} = 2\lambda$.

3.2. Классические решения в модели с точечной частицей

Рассмотрим массивную точечную частицу, описываемую действием

$$S_m = -m \int_{\mathcal{W}} d\tau \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}_*^\mu \dot{x}_*^\nu} . \quad (3.1)$$

Частица взаимодействует с гравитационной частью действия (1.30), за исключением скалярных полей $f_j \equiv 0$. Собственное время τ отсчитывается вдоль мировой линии массивной частицы \mathcal{W} , $x^\mu = x_*^\mu(\tau)$, а точка обозначает дифференцирование по τ .

Теорема Биркгофа гарантирует, что справа и слева от мировой линии частицы решение уравнений поля представляет собой либо пространство Минковского, либо метрику Шварцшильда [92]

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} , \quad \phi = -\lambda r , \quad f(r) = 1 - \frac{M}{2\lambda} e^{-2\lambda r} . \quad (3.2)$$

Для модели с границей существуют решение с $M > M_{\text{cr}}$, описывающее чёрную

дыру с горизонтом событий при

$$r_{\text{hor}} = \frac{1}{2\lambda} \ln \left(\frac{M}{2\lambda} \right), \quad (3.3)$$

и плоское решение с $M = 0$.

Введём функцию $r = r_*(\tau)$, описывающую движение частицы. Чтобы удовлетворить граничному условию (1.31), решение при $r < r_*(\tau)$ должно оставаться плоским,

$$ds^2 = -dT^2 + dr^2, \quad \phi = -\lambda r. \quad (3.4)$$

Мы ввели обозначение T для координатного времени во «внутренней» области, чтобы подчеркнуть его отличие от координатного времени $t = t(T)$ для удаленного наблюдателя, живущего во «внешней» области $r > r_*(\tau)$ с метрикой (3.2), $M \neq 0$.

Поскольку тензор энергии-импульса частицы локализован строго на мировой линии, производные метрики и дилатона претерпевают на ней скачок. В Приложении Б.1 мы выводим следующие условия сшивки

$$[n_*^\mu \nabla_\mu \phi] = \frac{m}{4} e^{2\phi(r_*)}, \quad [K_* - 2n_*^\mu \nabla_\mu \phi] = 0, \quad (3.5)$$

где квадратные скобки обозначают скачок величины в направлении возрастания r , в ту же сторону указывает нормаль к траектории частицы n_*^μ , K_* - внешняя кривизна мировой линии частицы.

Подставляя внутреннюю (3.4) и внешнюю (3.2) метрики в условия (3.5), мы находим уравнение движения частицы (см. вывод в Приложении Б.1)

$$\dot{r}_*^2 + V_{\text{eff}}(r_*) = 0, \quad V_{\text{eff}}(r) = 1 - \left(\frac{M}{m} + \frac{m}{8\lambda} e^{-2\lambda r} \right)^2, \quad (3.6)$$

записанное в форме закона сохранения энергии для нерелятивистской частицы в потенциале $V_{\text{eff}}(r)$, который растет монотонно до $1 - M^2/m^2 < 0$ при $r \rightarrow +\infty$.

Из уравнения (3.6) видно, что частица с энергией $M < M_{\text{cr}}$, летящая налево, всегда достигает границы в некоторый момент времени $t = t_0$. Затем частица отскакивает назад, изменяя только знак скорости, $\dot{r}_*(t_0 + 0) = -\dot{r}_*(t_0 - 0)$,

и продолжает движение в обратном направлении так, что имеет место симметрия решения относительно обращения времени $t - t_0 \mapsto t_0 - t$ в координатах Шварцшильда.

Если энергия частицы $M > M_{\text{cr}}$, то классическое решение становится резко асимметричным: частица асимптотически приближается к горизонту событий чёрной дыры, $r_*(t) \sim r_{\text{hor}} + e^{-2\lambda t}/M$ при $t \rightarrow +\infty$. Такая частица пересечёт горизонт событий за конечное собственное время. Вернуться обратно частица может только квантовомеханическим образом.

3.3. Амплитуда рассеяния

3.3.1. Определение гравитационной S-матрицы

S-матрица - это оператор эволюции в представлении взаимодействия, связывающий начальные и конечные квантовые состояния. Формально она определяется как

$$\hat{S} = \lim_{\substack{t_{\text{out}} \rightarrow +\infty \\ t_{\text{in}} \rightarrow -\infty}} \hat{U}_0(0, t_{\text{out}}) \hat{U}(t_{\text{out}}, t_{\text{in}}) \hat{U}_0(t_{\text{in}}, 0), \quad (3.7)$$

где \hat{U} и \hat{U}_0 это операторы эволюции для системы с включенным и выключенным взаимодействием соответственно. Эксклюзивный S-матричный элемент, соответствующий амплитуде перехода между состояниями $|\Psi_{\text{out}}\rangle$ и $|\Psi_{\text{in}}\rangle$, можно представить в виде континуального интеграла:

$$\mathcal{A} := \langle \Psi_{\text{out}} | \hat{S} | \Psi_{\text{in}} \rangle = \lim_{\substack{t_{\text{out}} \rightarrow +\infty \\ t_{\text{in}} \rightarrow -\infty}} \int \mathcal{D}\Phi \Psi_{\text{out}}^*[\Phi] \Psi_{\text{in}}[\Phi] e^{iS'[\Phi]}, \quad (3.8)$$

где переменные $\Phi = \{r_*, g_{\mu\nu}, \phi\}$ определены на контуре шварцшильдовского времени t , показанном на Рис. 3.2. Действие $S'[\Phi]$ включает в себя вклады $S(t_{\text{out}}, t_{\text{in}})$ для гравитационно взаимодействующей системы и $S_0(t_{\text{in}}, 0)$, $S_0(0, t_{\text{out}})$ для свободной эволюции частицы¹. Волновые функции $\Psi_{\text{out}}[\Phi]$, $\Psi_{\text{in}}[\Phi]$, опреде-

¹ Для существования предела при $t_{\text{out}, \text{in}} \rightarrow \pm\infty$ требуется добавить к гравитационному действию $S(t_{\text{out}}, t_{\text{in}})$ дополнительные члены Гиббонса-Хокинга на поверхностях $t = t_{\text{out}, \text{in}}$ и $r = r_\infty \gg r_*(t_{\text{out}, \text{in}})$.

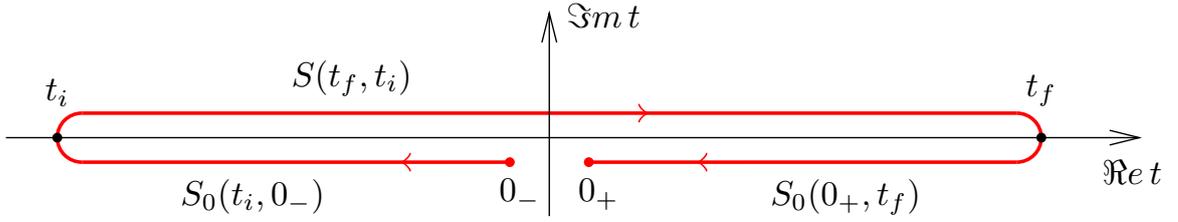


Рис. 3.2. Контур интегрирования по времени t для амплитуды рассеяния (3.8).

лёмные на концах контура при $t = 0_-$ и $t = 0_+$, описывают состояния первично квантованной свободной частицы. Последнее допущение представляется оправданным, поскольку гравитационное взаимодействие затухает экспоненциально быстро при $r \rightarrow +\infty$ и можно считать, что частица живет в плоском пространстве-времени при $t \rightarrow \pm\infty$.

Матричные элементы (3.8) предпочтительнее считать в базисе состояний плоских волн:

$$\Psi_{\text{in}} = \exp(ip_{\text{in}}r_*) , \quad \Psi_{\text{out}} = \exp(ip_{\text{out}}r_*) , \quad (3.9)$$

где r_* - положение частицы. Из закона сохранения энергии при этом следует $\mathcal{A} = A \delta(p_{\text{in}} + p_{\text{out}})$. Начальный и конечный импульс частицы при $t \rightarrow \pm\infty$ связаны с полной энергией M как $|p_{\text{out, in}}| = p := \sqrt{M^2 - m^2}$.

В квазиклассическом приближении $e^{2\phi_0} \ll 1$ действие S велико, поэтому интеграл (3.8) может быть вычислен методом перевала:

$$A = e^{iS_{\text{tot}}[\Phi_{\text{cl}}]} (1 + O(e^{2\phi_0})) , \quad (3.10)$$

где Φ_{cl} экстермизирует классические уравнения движения, а

$$\begin{aligned} S_{\text{tot}}[\Phi] &= S'[\Phi] - i \ln \Psi_{\text{in}} - i \ln \Psi_{\text{out}}^* = \\ &= S_0(t_{\text{in}}, 0_-) + S_{\text{int}}(t_{\text{out}}, t_{\text{in}}) + S_0(0_+, t_{\text{out}}) - i \ln \Psi_{\text{in}} - i \ln \Psi_{\text{out}}^* . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Мы ожидаем, что конфигурации Φ в континуальном интеграле (3.8) имеют тривиальную топологию подобную той, что имеет место при классическом рассеянии. Это означает, что седловые конфигурации Φ_{cl} должны включать в себя границу $\phi = \phi_0$ и быть асимптотически плоскими при $t \rightarrow \pm\infty$.

3.3.2. Регуляризованные решения

Нахождение квазиклассической амплитуды (3.10) элементарно в случае $M < M_{\text{cr}}$, когда нужно взять решения параграфа 3.2 и подставить их в (3.11), см. детали вычисления в Приложении Б.3. При $M > M_{\text{cr}}$ задача становится нетривиальной, поскольку возникают сингулярности классического решения, делающие прямое вычисление (3.11) невозможным.

Для преодоления проблемы был предложен метод ε -регуляризации комплексных траекторий [89, 90], идея которого заключается в следующем. Внесём внутрь (3.8) выражение

$$1 = \int_0^{+\infty} d\mathcal{T}_0 \delta(\mathcal{T}_{\text{int}}[\Phi] - \mathcal{T}_0) = \int_0^{+\infty} d\mathcal{T}_0 \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi i} e^{-\varepsilon(\mathcal{T}_{\text{int}}[\Phi] - \mathcal{T}_0)}, \quad (3.12)$$

где $\mathcal{T}_{\text{int}}[\Phi]$ - общековариантный функционал, положительно определённый для действительных полевых конфигураций Φ , принимающий конечные значения, если решение глобально асимптотически плоское, и расходящийся на решениях с вечными чёрными дырами; параметр $\varepsilon > 0$. Функционал $\mathcal{T}_{\text{int}}[\Phi]$ может служить мерой длительности гравитационного рассеяния.

Поскольку (3.12) представляет собой тождественную единицу, мы никак не меняем сами матричные элементы, а лишь выбрасываем конфигурации Φ с неправильным асимптотическим поведением. Таким образом, в континуальном интеграле (3.8) меняется только действие. Физически значимые седловые точки Φ_{cl} можно найти путем решения комплексных уравнений движения, следующих из модифицированного действия

$$S_\varepsilon[\Phi] = S[\Phi] + i\varepsilon(\mathcal{T}_{\text{int}}[\Phi] - \mathcal{T}_0). \quad (3.13)$$

При фиксированных ε и \mathcal{T}_0 квазиклассические решения экстремизируют (3.13). Дополнительное интегрирование по $d\varepsilon d\mathcal{T}_0$ дает седловое уравнение $\varepsilon = 0$. Таким образом, нужно выполнить все вычисления при $\varepsilon > 0$ для сходимости

континуального интеграла, а затем рассмотреть предел $\varepsilon \rightarrow +0$ для получения правильного квазиклассического ответа.

В качестве $\mathcal{T}_{\text{int}}[\Phi]$ можно выбрать функционал

$$\mathcal{T}_{\text{int}} = \int d^2x \sqrt{-g} \frac{f(\phi)}{\lambda^2} (\lambda^2 - (\nabla_\mu \phi)^2)^2, \quad (3.14)$$

где функция $f(\phi(r))$ имеет пространственную локализацию достаточно далеко от области взаимодействия. В Приложении Б.2 показано, что добавление (3.14) модифицирует классические уравнения так, что для решения без материи (3.2) массовый параметр приобретает мнимую часть:

$$M \mapsto M_\varepsilon, \quad \Im m M_\varepsilon \propto \varepsilon. \quad (3.15)$$

С помощью регуляризации (3.15) мы можем теперь определить контур шварцшильдовского времени для регуляризованных решений. Из уравнений (3.2) и (3.6) следует, что

$$t(r) = \int_{\mathcal{C}_r} dr \frac{\sqrt{f(r) - V_{\text{eff}}(r)}}{f(r)\dot{r}_*(r)}, \quad \dot{r}_*(r) = \mp \sqrt{-V_{\text{eff}}(r)}, \quad (3.16)$$

где знак $\dot{r}_*(r)$ определяется направлением движения частицы. Регуляризация (3.15) приводит к смещению положения горизонта (3.3) в верхнюю полуплоскость r , как показано на Рис. 3.3(а). Эквивалентно, исходный контур интегрирования \mathcal{C}_r в (3.16), пробегающий от $+\infty$ до $r_0 = -\phi_0/\lambda$, а затем обратно до $+\infty$ при $M < M_{\text{cr}}$, следует деформировать при вычислении (3.11) так, чтобы он обходил горизонт всегда снизу.

Для действительных решений подынтегральное выражение в (3.16) имеет полюс на действительной оси при $r = r_{\text{hor}}$, обход которого в обоих направлениях даёт полный сдвиг в мнимом времени

$$\Im m (t_{\text{out}} - t_{\text{in}}) = 2\pi \text{Res}(f(r))^{-1} \Big|_{r=r_{\text{hor}}} = \frac{\pi}{\lambda}. \quad (3.17)$$

Контур $t(\mathcal{C}_r)$ показан слева на Рис. 3.3.

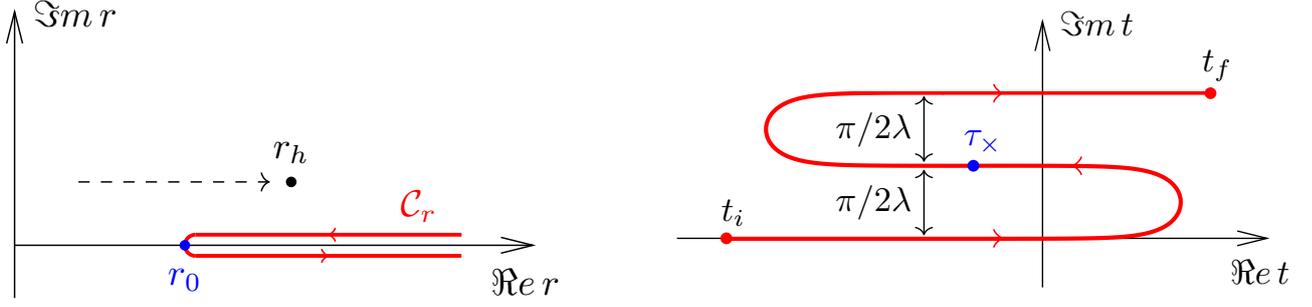


Рис. 3.3. Почти действительный контур \mathcal{C}_r (слева) и соответствующий ему контур в шварцшильдовском времени t (справа). Обратите внимание на симметрию относительно обращения $t - t_0 \mapsto t_0 - t$ для регуляризованного решения.

3.3.3. Результат вычисления

Таким образом, чтобы получить правильный ответ нам достаточно вычислить амплитуду $A(M)$ для отражающихся классическим образом решений, а затем осуществить аналитическое продолжение (3.15).

Здесь мы приводим результат вычисления, осуществлённого в Приложении Б.3,

$$\begin{aligned}
S_{\text{tot}} = & -\frac{M - M_{\text{cr}}}{\lambda} \ln \left(1 - \frac{M + i\varepsilon}{M_{\text{cr}}} \right) + \frac{p}{\lambda} \left(1 - \ln \frac{M_{\text{cr}}}{2\lambda} \right) + \\
& -\frac{p}{\lambda} \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{Mm^2}{8M_{\text{cr}}p^2} + \frac{p_0}{2p} \right) + \frac{2M_{\text{cr}}}{\lambda} \ln \left(\frac{4M_{\text{cr}}(p_0 + M) + m^2}{4M_{\text{cr}}(p_0 + M) - m^2} \right) + \\
& + \frac{M}{\lambda} \ln \left(\frac{4M^3 - 3m^2M + (4M^2 - m^2)p_0}{(p + M)^3} + \frac{m^2(4M^2 + m^2)}{4M_{\text{cr}}(p + M)^3} \right), \quad (3.18)
\end{aligned}$$

где $p_0 := \sqrt{(M + m^2/4M_{\text{cr}})^2 - m^2}$. Данное выражение справедливо при любых энергиях. В безмассовом пределе $m \rightarrow 0$ выживают слагаемые из первой строчки формулы (3.18). При любой энергии M сдвиг массы $i\varepsilon$, фиксирующий правильную ветвь логарифма, приводит к мнимому вкладу

$$\Im S_{\text{tot}} = \frac{\pi}{\lambda} (M - M_{\text{cr}}) \theta(M - M_{\text{cr}}). \quad (3.19)$$

Действительная и мнимая части (3.18), дающие, соответственно, фазу и модуль квазиклассической амплитуды рассеяния, представлены на Рис. 3.4.

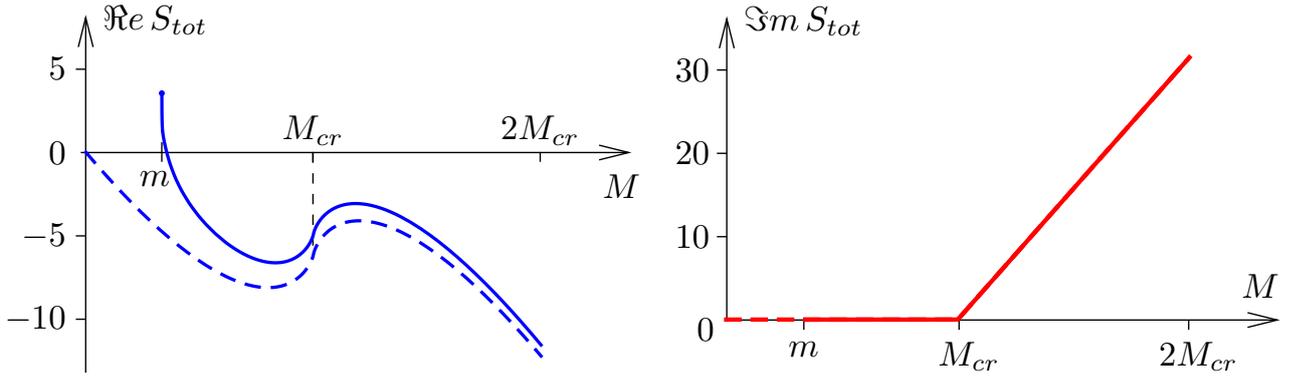


Рис. 3.4. Действительная (слева) и мнимая (справа) части полного действия (3.18) при $m = M_{cr}/3$ (сплошная) и $m = 0$ (штриховая) как функции полной энергии M . Масса критической чёрной дыры $M_{cr} = 10\lambda$. Интервал $M < m$ запрещен кинематически.

3.4. Интерпретация результата

Полученный квазиклассический результат (3.19) можно интерпретировать естественным образом. Вероятность рассеяния частицы равна

$$\mathcal{P}(M) = |A(M)|^2 \approx e^{-2\Im m S_{tot}} = e^{-2\pi(M-M_{cr})/\lambda} \quad (3.20)$$

при $M > M_{cr}$, что ожидаемо, поскольку вероятность $\mathcal{P}(M)$ должна быть непрерывной функцией энергии как в обычной квантовой механике с частицей, проходящей через вершину потенциального барьера.

Рассмотрим рассеяние как двустадийный процесс с промежуточной чёрной дырой, имеющей энтропию S_{BH} и большое число внутренних состояний $e^{S_{BH}}$. Тогда мы ожидаем подавление вероятности распада чёрной дыры в одностадийное состояние как $\mathcal{P} \simeq e^{-S_{BH}}$. Путём сопоставления с выражением (3.20), мы приходим к выводу, что

$$S_{BH} = \frac{2\pi}{\lambda}(M - M_{cr}) \quad (3.21)$$

- истинная термодинамическая энтропия чёрной дыры.

Существует общепринятая точка зрения [85, 93], что формула (3.21) действительно верна, но данный вывод был получен эвристическим путём. Адди-

тивная константа в выражении (3.21) фиксировалась *ad hoc* с привлечением дополнительных физических рассуждений. Удалось предложить евклидовое вычисление, определяющее начало отсчета энтропии путём последовательного учёта граничного вклада [55].

Его идея заключается в том, чтобы при вычислении статистической суммы

$$\mathcal{Z}(\beta) = \int_{\Phi(\tau)=\Phi(\tau+\beta)} \mathcal{D}\Phi e^{-S_E[\Phi]}, \quad (3.22)$$

где S_E - евклидовое действие, а β - обратная температура, выбирались исключительно седловые конфигурации Φ_{cl} с границей $\phi = \phi_0$. Это осуществляется технически путём наложения дополнительной связи, явно фиксирующей наличие линии $\phi = \phi_0$ в евклидовых решениях. Поскольку для чёрной дыры граница находится под горизонтом, к стандартному сигароподобному решению добавляется часть с границей, и евклидовое действие приводит к выражению (3.21).

Экспоненциальное подавление для точечной частицы приводит к несохранению вероятности, если только мы не предположим, что с вероятностью $1 - \mathcal{P}(M)$ в конце возникает вечная черная дыра. Вместо этого предпочтительнее считать точечную частицу приближенным описанием узкого волнового пакета в настоящей квантовой теории поля. Тогда подавление отражает тот факт, что для чёрной дыры гораздо вероятнее распасться в состояние с большими числами заполнения, соответствующее квантам излучения Хокинга. Представляется, что «расплывание» ограничено значением квазиклассического параметра $e^{2\phi_0}$, но совершенно неясно, останется ли это справедливым для аналогов регуляризованных решений из параграфа 3.3.2 в модели с настоящим квантовым полем. При сделанных оговорках можно считать, что ответ (3.20) совместен с унитарностью.

3.5. Заключение к главе

В этой главе мы применили многообещающий квазиклассический метод для вычисления S-матричных элементов в модели КГХС с границей. В качестве материи выступила массивная первично квантованная точечная частица, напоминающая модели тонких оболочек. Мы вычислили амплитуду перехода $A(M)$ между состояниями частицы, двигающейся к границе и от неё при всех значениях энергии M . При $M < M_{\text{cr}}$ рассеяние происходит классически и соответствующая вероятность $\mathcal{P}(M) = 1$. Если же $M > M_{\text{cr}}$, то имеет место экспоненциальное подавление $\mathcal{P}(M) \simeq e^{-S_{\text{BH}}(M)}$, где $S_{\text{BH}}(M)$ это энтропия чёрной дыры при условии, что $S_{\text{BH}}(M_{\text{cr}}) = 0$.

Заключение

Подведём общий итог исследованию, представленному в данной диссертации.

1. В Главе 1 была исследована классическая модель КГХС с динамической границей. Был предложен конструктивный способ нахождения бесконечного количества точных решений, а также их классификация с помощью спиновой цепочки Годена. Были изучены критические явления на пороге образования чёрной дыры. Показано, что модель не является интегрируемой, то есть не обладает полным набором гладких интегралов движения.
2. В Главе 2 была рассмотрена квазиклассическая модель РСТ с границей. Из условия Весса-Зумино получено самосогласованное граничное условие, применимое на однопетлевом уровне. Получены эффективные решения, описывающие испарение чёрных дыр, для случая гладких начальных конфигураций материи. Показано, что решения явно переводят чистое состояние в запутанное и не образуют остатка (remnant) в конечном состоянии.
3. В Главе 3 с помощью комплексного квазиклассического метода были вычислены S-матричные элементы для рассеяния точечной частицы в модели КГХС с границей. Оказалось, что $\mathcal{P} \propto e^{-S_{\text{BH}}}$, где S_{BH} - энтропия чёрной дыры. Полученный результат совместен с унитарностью.

Наше исследование нельзя считать завершённым. Нам пока не удалось применить комплексный квазиклассический метод Главы 3 для вычисления S-матричных элементов [94] в модели дилатонной гравитации с границей и безмассовым скалярным полем из Главы 1. В случае успеха полученные S-матричные элементы можно использовать для явной проверки унитарности. При

этом, комплексные квазиклассические решения интересно соотнести с решениями, используемыми для описания процесса испарения [25, 88]. Совершенно неочевидно, однако, существуют ли комплексные квазиклассические решения, и если да, то каким образом следует осуществлять деформацию в область комплексных параметров. По всей видимости, для продолжения исследования необходимо перейти к численным методам для нахождения комплексных решений с требуемыми свойствами.

Благодарности. Автор выражает благодарность своим соавторам: научному руководителю Дмитрию Геннадиевичу Левкову, научному руководителю на стадии магистерской диссертации Сергею Михайловичу Сибирякову, а также Егору Зенкевичу за годы плодотворной совместной работы. Также я хочу отметить вклад Дмитрия Еремеева на начальном этапе работы над однопетлевой моделью РСТ с границей.

Автор также выражает благодарность Григорию Игоревичу Рубцову, Антону Чудайкину и Петру Сатунину за мотивационную поддержку, которую они оказывали мне в процессе подготовки диссертации.

Автор признателен Валерию Анатольевичу Рубакову и всем сотрудникам Отдела теоретической физики ИЯИ РАН за поддержание необыкновенной творческой атмосферы.

Приложение А

Вывод уравнений

А.1. Модель КГХС

А.1.1. Полевые уравнения

Варьируя действие (1.1) по отношению к полям f_i , ϕ и $g^{\mu\nu}$, мы получаем уравнения

$$\square f_i = 0 , \quad (\text{A.1})$$

$$R + 4 (\square\phi - (\nabla\phi)^2 + \lambda^2) = 0 , \quad (\text{A.2})$$

$$4e^{-2\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi + g_{\mu\nu} ((\nabla\phi)^2 - \square\phi - \lambda^2)) = T_{\mu\nu}^f , \quad (\text{A.3})$$

где

$$T_{\mu\nu}^f = \sum_{i=1}^N \left(\nabla_\mu f_i \nabla_\nu f_i - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla f_i)^2 \right) \quad (\text{A.4})$$

- тензор энергии-импульса безмассовых скалярных полей f_i .

А.1.2. Общее решение

Будем считать, что в модели существует одно скалярное поле $f \equiv f_1$. Обобщение на случай N полей делается тривиальным образом. В конформной калибровке

$$g^{vu} = -2e^{-2\rho} , \quad g^{vv} = g^{uu} = 0 \quad (\text{A.5})$$

уравнение (A.1) имеет решение

$$\partial_v \partial_u f = 0 , \quad \Rightarrow \quad f = f_{\text{in}}(v) + f_{\text{out}}(u) , \quad (\text{A.6})$$

а уравнения (A.2), (A.3) сводятся к системе

$$2\partial_v\partial_u\rho - 4\partial_v\partial_u\phi + 4\partial_v\phi\partial_u\phi + \lambda^2 e^{2\rho} = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$4\partial_v\phi\partial_u\phi - 2\partial_v\partial_u\phi + \lambda^2 e^{2\rho} = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$2e^{-2\phi} (\partial_i^2\phi - 2\partial_i\rho\partial_i\phi) = \frac{1}{2}(\partial_i f)^2, \quad i = v, u. \quad (\text{A.9})$$

Вычитая из (A.8) уравнение (A.7), получаем $\partial_{vu}(\rho - \phi) = 0$, что даёт решение

$$\rho = \phi + \zeta(v) + \eta(u). \quad (\text{A.10})$$

Наличие двух произвольных функций объясняется тем, что выбор конформного вида метрики (A.5) не фиксирует калибровочную свободу полностью. Остаточные степени свободы ζ , η связаны с координатными преобразованиями

$$u \mapsto \tilde{u} = \tilde{u}(u), \quad v \mapsto \tilde{v} = \tilde{v}(v), \quad (\text{A.11})$$

представляющими конформную подгруппу диффеоморфизмов.

Решая два оставшихся уравнения (A.9) с учетом (A.10) и (A.6), мы получаем общее решение для поля дилатона:

$$e^{-2\phi} = Z(v)E(u) + g(v) + h(u), \quad (\text{A.12})$$

где

$$Z(v) = \lambda \int dv e^{2\zeta(v)}, \quad E(u) = -\lambda \int du e^{2\eta(u)},$$

$$g(v) = -\frac{1}{2} \int dv \partial_v Z(v) \int^v \frac{dv'}{\partial_v Z(v')} (\partial_v f_{\text{in}}(v'))^2, \quad (\text{A.13})$$

$$h(u) = -\frac{1}{2} \int du \partial_u E(u) \int^u \frac{du'}{\partial_u E(u')} (\partial_u f_{\text{out}}(u'))^2. \quad (\text{A.14})$$

Квазикрускаловская калибровка соответствует выбору $\zeta = 0 = \eta$, что приводит к общему решению из основного текста (1.5).

Завершая анализ общего решения, мы коснемся законов преобразования ρ , ζ и η относительно диффеоморфизмов (A.11). Из инвариантности интервала

следует

$$\rho(v, u) = \tilde{\rho}(\tilde{v}(v), \tilde{u}(u)) + \frac{1}{2} \ln \frac{d\tilde{v}}{dv} + \frac{1}{2} \ln \frac{d\tilde{u}}{du} . \quad (\text{A.15})$$

Поскольку поле ϕ - скаляр,

$$\zeta(v) = \tilde{\zeta}(\tilde{v}(v)) + \frac{1}{2} \ln \frac{d\tilde{v}}{dv} , \quad \eta(u) = \tilde{\eta}(\tilde{u}(u)) + \frac{1}{2} \ln \frac{d\tilde{u}}{du} . \quad (\text{A.16})$$

Используя (A.15), (A.16), легко показать, что функции $Z(v)$, $E(u)$, $g(v)$ и $h(u)$ являются скалярами относительно преобразований (A.11).

A.1.3. Граничные условия

Вариация действия (1.30) по отношению к значениям полей на границе даёт выражение

$$\begin{aligned} \delta_b S = \int_{\partial \mathcal{M}} d\tau \left[e^{-2\phi_0} (-2\nabla_\mu \phi n_\nu \delta g^{\mu\nu} - n_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} + 2\nabla_n \phi g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \right. \\ \left. + g_{\mu\nu} \nabla_n \delta g^{\mu\nu} + 2\delta K - (K + 2\lambda) h_{\mu\nu} \delta h^{\mu\nu}) - \nabla_n f \delta f \right] , \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$

которое нужно привести к однородному виду, записав его через вариацию по индуцированной метрике $\delta h^{\mu\nu}$. Для этого следует воспользоваться соотношениями

$$\delta g^{\mu\nu} \Big|_{\mathcal{M}} = h^{\mu\nu} h_{\alpha\beta} \delta h^{\alpha\beta} , \quad 2\delta K - K h_{\mu\nu} \delta h^{\mu\nu} = n_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \nabla_n \delta g^{\mu\nu} . \quad (\text{A.18})$$

Подставляя их в вариацию (A.17), мы получаем

$$\delta_b S = - \int_{\partial \mathcal{M}} d\tau \left[2e^{-2\phi_0} (\nabla_n \phi - \lambda) h_{\mu\nu} \delta h^{\mu\nu} + \nabla_n f \delta f \right] = 0 , \quad (\text{A.19})$$

откуда непосредственно следуют граничные условия (1.31).

Теперь мы получим уравнение Риккати (1.35) из основного текста на функцию $U(v)$, описывающую движение границы. Воспользуемся вторым граничным условием (1.31), представленным в эквивалентном виде

$$(\nabla_\mu \phi)^2 \Big|_{\phi=\phi_0} = \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \partial_v (e^{-2\phi}) \partial_u (e^{-2\phi}) = -\lambda^2 e^{2\zeta+2\eta} , \quad (\text{A.20})$$

где мы перешли к конформному виду метрики и воспользовались (A.10).

Подставляя общее решение (A.12), мы получаем

$$-\partial_v Z(v) \partial_u E(U(v)) \partial_v U(v) = e^{2\phi_0} [\partial_v g(v) + E(U(v)) \partial_v Z(v)]^2, \quad (\text{A.21})$$

где было использовано равенство $\partial_v(e^{-2\phi}) + \partial_u(e^{-2\phi}) \partial_v U(v) = 0$, выполняющееся при дифференцировании вдоль границы. Переходя к квазикрускаловской калибровке метрики, где $Z(v) = \lambda v$, $E(u) = -\lambda u$, мы получаем уравнение (1.35).

A.2. Модель РСТ

A.2.1. Полевые уравнения

Варьируя действие (2.10) по отношению к полям материи f_i , χ , дилатону ϕ и метрике $g^{\mu\nu}$, мы получаем уравнения

$$\square f_i = 0, \quad \square \chi = -QR, \quad (\text{A.22})$$

$$2e^{-2\phi} (R + 4(\square\phi - (\nabla\phi)^2 + \lambda^2)) = -Q^2 R, \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} 4e^{-2\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi + g_{\mu\nu} ((\nabla\phi)^2 - \square\phi - \lambda^2)) + 2Q^2 (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square\phi) = \\ = T_{\mu\nu}^f + T_{\mu\nu}^\chi, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

где $T_{\mu\nu}^f$ - тензор энергии-импульса полей f_i (A.4), а

$$T_{\mu\nu}^\chi = \nabla_\mu \chi \nabla_\nu \chi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla\chi)^2 + 2Q (\nabla_\mu \nabla_\nu \chi - g_{\mu\nu} \square\chi) \quad (\text{A.25})$$

- тензор энергии-импульса поля χ .

A.2.2. Общее решение

В конформной калибровке (A.5) для уравнений (A.22) мы имеем решения (A.6) и

$$\partial_v \partial_u (\chi - 2Q\rho) = 0, \quad \Rightarrow \quad \chi = 2Q\rho + \chi_{\text{in}}(v) + \chi_{\text{out}}(u), \quad (\text{A.26})$$

Уравнения (A.23), (A.24) сводятся к системе

$$e^{-2\phi} (2\partial_v\partial_u\rho - 4\partial_v\partial_u\phi + 4\partial_v\phi\partial_u\phi + \lambda^2 e^{2\rho}) = -Q^2\partial_v\partial_u\rho, \quad (\text{A.27})$$

$$e^{-2\phi} (4\partial_v\phi\partial_u\phi - 2\partial_v\partial_u\phi + \lambda^2 e^{2\rho}) + Q^2\partial_v\partial_u(2\rho - \phi) = 0, \quad (\text{A.28})$$

$$(2e^{-2\phi} + Q^2) (\partial_i^2\phi - 2\partial_i\rho\partial_i\phi) = \frac{1}{2}T_{ii}, \quad (\text{A.29})$$

где $T_{ii} = (\partial_i f)^2 + (\partial_i \chi)^2 + 2Q(\partial_i^2 \chi - 2\partial_i \rho \partial_i \chi)$ - полные потоки энергии, $i = v, u$.

Беря след (A.24) и подставляя в уравнение (A.23), мы получаем формулу для скаляра Риччи

$$R = 4 (\lambda^2 - (\nabla_\mu \phi)^2) \cdot (1 - Q^2 e^{2\phi}/2)^{-1}, \quad (\text{A.30})$$

которая демонстрирует расходимость при $\phi = -\ln(Q^2/2)/2$.

Вычитая из (A.28) уравнение (A.27), получаем $(2e^{-2\phi} - Q^2)\partial_{vu}(\rho - \phi) = 0$, что даёт решение (A.10), позволяющее фиксировать остаточную калибровку метрики.

Решая два оставшихся уравнения (A.29) с учетом (A.10) и (A.26), мы находим общее решение для поля дилатона:

$$e^{-2\phi} + Q^2\phi = Z(v)E(u) + g(v) + h(u), \quad (\text{A.31})$$

где

$$Z(v) = \lambda \int dv e^{2\zeta(v)}, \quad E(u) = -\lambda \int du e^{2\eta(u)},$$

$$g(v) = -\frac{1}{2} \int dv Z'(v) \int^v \frac{dv'}{Z'(v')} T_{vv}(v'), \quad (\text{A.32})$$

$$h(u) = -\frac{1}{2} \int du E'(u) \int^u \frac{du'}{E'(u')} T_{uu}(u'). \quad (\text{A.33})$$

Переходя в квазикрускаловскую калибровку $\zeta = 0 = \eta$, мы получаем общее решение (2.14). Функции T_{vv} , T_{uu} определяются формулами (2.16), (2.17).

Законы преобразования для ρ , ζ и η те же самые, что и в модели КГХС. Функции $Z(v)$, $E(u)$, $g(v)$ и $h(u)$ также являются скалярами относительно преобразований (A.11).

А.2.3. Граничные условия

Вывод граничных условий в модели РСТ, аналогичен проведённому для модели КГХС, отличаясь дополнительными слагаемыми в вариации

$$\delta_b S = \int_{\mathcal{M}} d\tau \left[(\nabla_n (e^{-2\phi_0} - Q^2 \phi + Q\chi) + \lambda(2e^{-2\phi_0} + Q^2)) h_{\mu\nu} \delta h^{\mu\nu} + \right. \\ \left. - (\nabla_n \chi - 2QK) \delta \chi - \nabla_n f \delta f \right] = 0, \quad (\text{A.34})$$

откуда следуют граничные условия (2.19).

Вывод уравнения границы из граничного условия

$$\nabla_n (e^{-2\phi} - Q^2 \phi + Q\chi) = - (2e^{-2\phi_0} + Q^2) \lambda. \quad (\text{A.35})$$

аналогичен выводу (A.21). Подставляя общее решение (2.14), мы получаем

$$\sqrt{-4e^{-2\phi_0} \partial_v \Omega \partial_u \Omega} + Q^2 e^{-\phi_0} \frac{\partial_v^2 U}{\partial_v U} = -\lambda(2e^{-2\phi_0} + Q^2), \quad (\text{A.36})$$

что непосредственно даёт уравнение (2.22).

Рассмотрим граничное условие¹ в точно решаемой деформации [80]. Из граничных условий (2.29) и (A.35) следует

$$\sqrt{-4e^{-2\phi_0} \partial_v (\Omega + Q\chi_{\text{in}}) \partial_u (\Omega + Q\chi_{\text{out}})} = - (2e^{-2\phi_0} + Q^2) \lambda, \quad (\text{A.37})$$

откуда аналогично выводится уравнение границы

$$\partial_v U(v) = \frac{e^{2\phi_0}}{\lambda^2 (1 + e^{2\phi_0} Q^2 / 2)^2} (\partial_v g(v) + Q \partial_v \chi_{\text{in}} - \lambda^2 U)^2, \quad (\text{A.38})$$

Подстановка вакуумного значения $\chi_{\text{in}}(v) = Q \ln(\lambda v)$ даёт уравнение (2.30).

¹ Его можно учесть на уровне действия, если добавить множитель Лагранжа

$$S_\Theta = \int d\tau \Theta(\tau) \epsilon^{\mu\nu} n_\mu \nabla_\nu \chi, \quad \epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}, \quad \epsilon^{01} = 1.$$

Варьируя по Θ , мы получаем $\partial_t \chi = 0$ и несущественное дополнительное уравнение $\Theta = \int d\tau (2QK - \nabla_n \chi)$. Первое уравнение приводит к условию (2.29) для связанных кусков границы.

А.3. Сохранение энергии

Определим энергию скалярных полей модели РСТ в асимптотически плоской области пространства-времени. Подставляя (А.4), (А.25) в формулу (1.23), мы получаем в квазикрускаловских координатах выражения

$$E_{\text{in}} = -2\lambda \int_0^{+\infty} dv v \left(\partial_v^2 g(v) - \frac{Q^2}{2v^2} \right), \quad (\text{А.39})$$

$$E_{\text{out}} = 2\lambda \int_{-\infty}^0 du u \left(\partial_u^2 h(u) - \frac{Q^2}{2u^2} \right), \quad (\text{А.40})$$

где явно было учтено вакуумное значение поля χ .

Полная энергия скалярных полей сохраняется в процессе эволюции в том смысле, что $E_{\text{in}} = E_{\text{out}}$ согласно (А.39), (А.40), если только все поля непрерывны, а граница стартует и заканчивает движение в состоянии покоя (то есть $r(t) \rightarrow -\phi_0/\lambda$ при $t \rightarrow \pm\infty$, либо $U \sim -e^{-2\phi_0}/\lambda^2 v$ при $v \rightarrow 0$ и $v \rightarrow +\infty$) и удовлетворяет граничным условиям. Заметим, что наличие промежуточной чёрной дыры никак не влияет на сохранение энергии.

Докажем это утверждение. Если все поля непрерывны, то непрерывны и функции $g(v)$, $h(u)$, что позволяет нам выразить энергию скалярных полей соответствующих интервалам (v'', v') на \mathcal{I}^- и (u'', u') на \mathcal{I}^+ как

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{in}}(v'', v') &= 2\lambda \lim_{v' \rightarrow 0} \lim_{v'' \rightarrow +\infty} \left(g(v) - v \partial_v g(v) + \frac{Q^2}{2} \ln(\lambda v) \right) \Big|_{v'}^{v''}, \\ \mathcal{E}_{\text{in}}(u'', u') &= -2\lambda \lim_{u' \rightarrow -\infty} \lim_{u'' \rightarrow 0} \left(h(u) - u \partial_u h(u) + \frac{Q^2}{2} \ln(-\lambda u) \right) \Big|_{u'}^{u''}. \end{aligned} \quad (\text{А.41})$$

Затем, мы используем (2.14) и (А.41) чтобы получить предельное соотношение

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{in}} - E_{\text{out}}}{2\lambda} &= \lim_{\substack{v' \rightarrow 0 \\ v'' \rightarrow +\infty}} \left[g(v) + h(U(v)) + \frac{Q^2}{2} \ln(-\lambda^2 v U(v)) + \right. \\ &\quad \left. - v \partial_v g(v) - U(v) \partial_u h(U(v)) \right] \Big|_{v'}^{v''} = 0, \end{aligned} \quad (\text{А.42})$$

которое и доказывает закон сохранения энергии $E_{\text{in}} = E_{\text{out}}$.

Приложение Б

Уравнения для точечной частицы

Б.1. Условия сшивки и уравнение движения частицы

Для упрощения вычислений мы введём систему нормальных координат (τ, ξ) вблизи мировой линии частицы,

$$ds^2 = -a(\tau, \xi)d\tau^2 + d\xi^2 . \quad (\text{Б.1})$$

Мировой линии в этих координатах соответствует $\xi = 0$. Координата τ совпадает с собственным временем частицы, так что $a(\tau, 0) = 1$. Выведем в калибровке (Б.1) условия сшивки для метрики аналогичные условиям Израэля в эйнштейновской гравитации [95, 96].

Варьируя действие (3.1) по метрике $g^{\mu\nu}$, мы получаем тензор энергии-импульса для точечной частицы

$$T^{\mu\nu} = m \dot{x}_*^\mu \dot{x}_*^\nu \delta(\xi) , \quad (\text{Б.2})$$

так что вектор $u^\mu = (\dot{x}_*^\tau, \dot{x}_*^\xi) = (1, 0)$ представляет собой 4-скорость частицы. Подстановка (Б.2) в правую часть уравнения (А.3) даёт

$$2e^{-2\phi} ((\partial_t \phi)^2 - a(\partial_\xi \phi)^2 + a\partial_\xi^2 \phi + a\lambda^2) = \frac{m}{2} a \delta(r) . \quad (\text{Б.3})$$

Интегрируя (Б.3) в окрестности $\xi = 0$, мы получаем первое условие сшивки (3.5).

Аналогично, из уравнения (А.2) следует

$$\frac{(\partial_\xi a)^2}{8a^2} - \frac{\partial_\xi^2 a}{4a} + \partial_\xi^2 \phi - \frac{\partial_t^2 \phi}{a} + \frac{\partial_t a \partial_t \phi}{2a^2} + \frac{(\partial_t \phi)^2}{a} - (\partial_\xi \phi)^2 + \lambda^2 = 0 , \quad (\text{Б.4})$$

Интегрируя (Б.4) в окрестности $\xi = 0$, мы получаем второе условие сшивки (3.5).

Компонентами нормалей к мировой линии частицы, вычисленными с помощью внутренней и внешней метрик, являются

$$(n^T, n^r) = (\dot{r}_*, \dot{T}_*) , \quad (n^t, n^r) = (\dot{r}_*/f, \dot{t}_*f) , \quad (\text{Б.5})$$

где

$$\dot{T}_* = \sqrt{1 + \dot{r}_*^2} , \quad \dot{t}_* = \frac{1}{f(r_*)} + \frac{\dot{r}_*^2}{(f(r_*))^2} . \quad (\text{Б.6})$$

Подставляя (Б.5) в первое условие сшивки (3.5), мы получаем

$$M = m\sqrt{1 + \dot{r}_*^2} - \frac{m^2}{8\lambda} e^{-2\lambda r_*} , \quad (\text{Б.7})$$

где $M = \sqrt{m^2 + m^2 \dot{r}_*^2(\infty)}$ это полная энергия частицы. Второе уравнение, следующее из (3.5), представляет производную (Б.7) по времени. Возводя (Б.7) в квадрат, мы получаем уравнение (3.6).

Б.2. Метод регуляризации

Покажем, что способ регуляризации при помощи добавления комплексного вклада (3.14) к классическому действию (1.1) действительно приводит к сдвигу массы (3.15) у вакуумных решений. Варьируя модифицированное действие (3.13) по метрике $g^{\mu\nu}$, мы получаем уравнение (А.3) с комплекснозначной правой частью:

$$-i\varepsilon \frac{\delta T_{\text{int}}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{i\varepsilon}{\lambda^2} f(\phi) (\lambda^2 - (\nabla_\mu \phi)^2) \left(2\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\lambda^2 - (\nabla \phi)^2) \right) . \quad (\text{Б.8})$$

Для метрики, где $ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\zeta(r)} dr^2$, мы получаем (tt) -компоненту (А.3) с правой частью (Б.8):

$$e^{-\zeta} (2\partial_r^2 \phi - \partial_r \zeta \partial_r \phi - 2(\partial_r \phi)^2) + 2\lambda^2 = -\frac{i\varepsilon}{2\lambda^2} f(\phi) e^{2\phi} (\lambda^2 - e^{-\zeta} (\partial_r \phi)^2)^2 . \quad (\text{Б.9})$$

Дополнительно фиксируя калибровку $\phi \equiv -\lambda r$, мы приходим к уравнению

$$\partial_r (1 - e^{-\zeta}) + 2\lambda (1 - e^{-\zeta}) + \frac{i\varepsilon \lambda}{2} f(-\lambda r) e^{-2\lambda r} (1 - e^{-\zeta})^2 = 0 , \quad (\text{Б.10})$$

имеющему решение

$$1 - e^{-\zeta(r)} = \frac{M}{2\lambda} e^{-2\lambda r} \left(1 - \frac{i\varepsilon M}{4\lambda} \int_{-\infty}^{\phi(r)} d\phi f(\phi) \right)^{-1}. \quad (\text{B.11})$$

Используя (B.11), мы получаем соотношение из основного текста (3.15).

Б.3. Вычисление эффективного действия

В этом разделе мы вычисляем полное действие (3.11) на классических решениях. Заметим, что балковская часть лагранжиана (1.1) представляет собой полную производную

$$e^{-2\phi} (R + 4(\nabla_\mu \phi)^2 + 4\lambda^2) = 2\Box e^{-2\phi}, \quad (\text{B.12})$$

что позволяет переписать действие для взаимодействующей системы как интеграл вдоль контура, включающего пространственную бесконечность $r = r_\infty \rightarrow +\infty$, границу $\phi = \phi_0$ и поверхности Коши $t = t_{\text{out}, \text{in}} \rightarrow \pm\infty$, а также интеграл вдоль мировой линии частицы (3.1), как показано на Рис. Б.1,

$$S(t_{\text{out}}, t_{\text{in}}) = S_{r_\infty} + S_{\phi_0} + S_{t_{\text{out}}} + S_{t_{\text{in}}} + S_m. \quad (\text{B.13})$$

Данное выражение включает в себя также члены Гиббонса-Хокинга

$$S_{\text{GH}} = 2\kappa \int d\sigma e^{-2\phi} (K - K_0) \quad (\text{B.14})$$

для пространственной бесконечности $r = r_\infty$ и поверхностей $t = t_{\text{out}, \text{in}}$. Параметр $\kappa = n_\mu n^\mu$ равен $+1$ и -1 для времениподобных и пространственноподобных частей контура соответственно. Параметр K_0 введен, чтобы вычесть вклад от пространства Минковского, и равен 2λ для $r = r_\infty$ и 0 для $t = t_{\text{out}, \text{in}}$. Напомним, что в дополнение к (B.13) полное действие также содержит вклады S_0 от свободной эволюции частицы и волновых функций $\Psi_{\text{out}, \text{in}}$. Вычислим последовательно все перечисленные вклады.

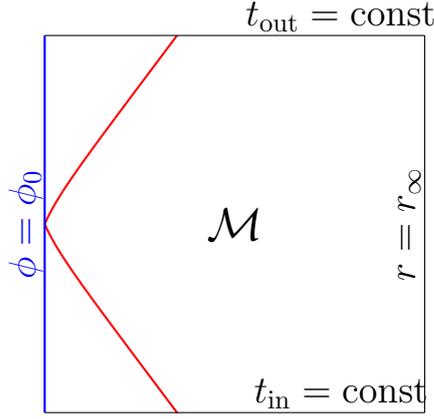


Рис. Б.1. Компактное многообразие \mathcal{M} , фигурирующее в квазиклассической задаче рассеяния.

Пространственная бесконечность $r = r_\infty$. Вычислив $\nabla_n \phi = -\lambda \sqrt{f(r)}$ и $K = f'(r)/2\sqrt{f(r)}$ для метрики (3.2), легко показать, что вклад

$$S_{r_\infty} = 2 \int_{r=r_\infty} d\sigma e^{-2\phi} (K - 2\lambda - 2\nabla_n \phi) \sim -\frac{3M^2}{8\lambda} e^{-2\lambda r_\infty} (t_{\text{out}} - t_{\text{in}}) \quad (\text{Б.15})$$

исчезает при $r_\infty \rightarrow 0$.

Граница $\phi = \phi_0$. Складывая граничный вклад от действия (1.1) и (1.29), мы получаем

$$S_{\phi_0} = 2e^{-2\phi_0} \int_{\phi=\phi_0} d\tau K, \quad (\text{Б.16})$$

поскольку при выполнении граничного условия (1.31) вклад пропорциональный λ тождественно сокращается. Так как пространство слева от мировой линии частицы плоское, то $K = 0$ везде, кроме сингулярной точки в момент столкновения частицы с границей.

Для вычисления этого вклада мы используем технический приём, заключающийся в перемещении контура интегрирования на линию $r_\delta = r_0 + \delta$, как показано на Рис. Б.2(а). Теперь мировая линия пересекает регуляризующую линию дважды, что позволяет свести S_{ϕ_0} к двум дельта-функциональным вкладам.

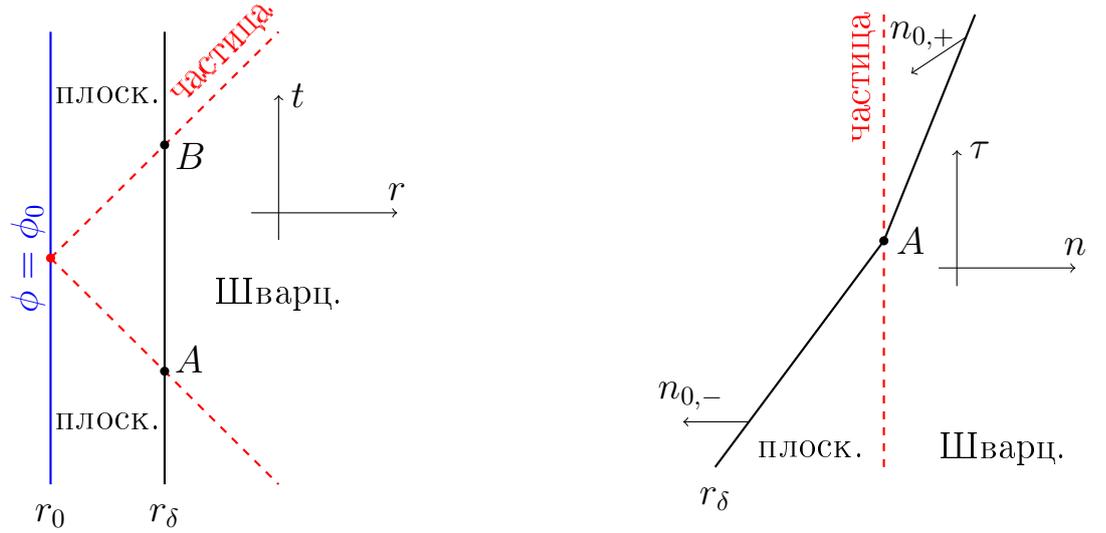


Рис. Б.2. Регуляризованная граница $r = r_0 + \delta$ в шварцшильдовых координатах (справа) и нормальных (слева) в системе покоя частицы.

Рассмотрим точку пересечения A . Введём нормальные координаты (τ, n) , которые непрерывны в окрестности мировой линии частицы. Регуляризирующая линия $r = r_\delta$ имеет в этих координатах излом, см. Рис. Б.2(б). Поскольку нормаль к линии $r = r_\delta$ в этой точке разрывна, для её компонент справа и слева от мировой линии частицы мы имеем

$$(n_{+,+}^t, n_{+,+}^r) = (0, -\sqrt{f(r_\delta)}) , \quad (n_{-,-}^T, n_{-,-}^r) = (0, -1) . \quad (\text{Б.17})$$

В точке A мы можем разложить нормали n_{\pm}^μ в базисе нормального и касательного к траектории частицы векторов. Компонентами касательных векторов являются

$$(\tau_+^t, \tau_+^r) = (\dot{t}_*, \dot{r}_*) , \quad (\tau_-^T, \tau_-^r) = (\dot{T}_*, \dot{r}_*) , \quad (\text{Б.18})$$

а компоненты векторов нормали даются выражениями (Б.5). В нормальной системе координат для компонент векторов нормали к линии $r = r_\delta$ в точке A мы имеем

$$(n_{\pm}^\tau, n_{\pm}^n) = (-\text{sh } \psi_{\pm}, -\text{ch } \psi_{\pm}) , \quad \text{sh } \psi_+ = -\dot{r}_*/\sqrt{f(r_*)} , \quad \text{sh } \psi_- = -\dot{r}_* . \quad (\text{Б.19})$$

Теперь сгладим линию $r = r_\delta$ гладкой кривой так, что возможно ввести функцию $\psi(\tau)$, интерполирующую между ψ_- и ψ_+ , причём

$$(n^\tau, n^n) = (-\operatorname{sh} \psi(\tau), -\operatorname{ch} \psi(\tau)) . \quad (\text{Б.20})$$

Для собственного времени $d\tau_0 = d\tau / \operatorname{ch} \psi$ и внешней кривизны $K = -\operatorname{ch} \psi d\psi/d\tau$

$$\int_A d\tau_0 K = \psi_+ - \psi_- . \quad (\text{Б.21})$$

Вклад от точки B идентичен, складывая всё вместе и беря предел $r_\delta \rightarrow r_0$, мы получаем дельта-функциональный вклад во внешнюю кривизну в точке столкновения

$$K = 2\delta(\tau - \tau_0) \left(\operatorname{arsh} \sqrt{-V_{\text{eff}}(r_0)} - \operatorname{arsh} \sqrt{-V_{\text{eff}}(r_0)/f(r_0)} \right) . \quad (\text{Б.22})$$

Используя выражения для V_{eff} и $f(r)$, мы выводим окончательно

$$S_{\phi_0} = \frac{M_{\text{cr}}}{\lambda} \ln \left(1 - \frac{M}{M_{\text{cr}}} \right) + \frac{2M_{\text{cr}}}{\lambda} \ln \left(\frac{4M_{\text{cr}}(p_0 + M) + m^2}{4M_{\text{cr}}(p_0 + M) - m^2} \right) . \quad (\text{Б.23})$$

Поверхности Коши $t = t_{\text{out}, \text{in}}$. Рассмотрим для определенности финальную поверхность Коши. Единственный вклад приходит из члена Гиббонса-Хокинга

$$S_{t_{\text{out}}} = -2 \int_{t=t_{\text{out}}} d\sigma e^{-2\phi} K . \quad (\text{Б.24})$$

Внешняя кривизна $K = 0$ всюду кроме дельта-функционального вклада в точке пересечения поверхности Коши с мировой линией частицы, см. Рис. Б.3.

Аналогичное вычисление даёт

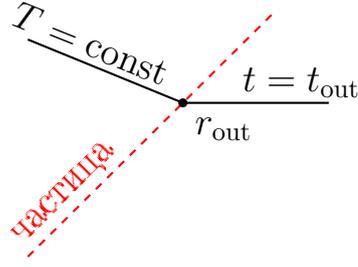
$$S_{t_{\text{out}}} = -2e^{2\lambda r_{\text{out}}} \left(\operatorname{arsh} \dot{r}_* - \operatorname{arsh} \frac{\dot{r}_*}{\sqrt{f(r_*)}} \right) \simeq \frac{p}{2\lambda} \quad (\text{Б.25})$$

при $r_{\text{out}} \rightarrow +\infty$.

Для начальной поверхности Коши мы получаем равный вклад

$$S_{t_{\text{in}}} = -2 \int_{t=t_{\text{in}}} d\sigma e^{-2\phi} K \simeq \frac{p}{2\lambda} \quad (\text{Б.26})$$

при $r_{\text{in}} \rightarrow -\infty$.

Рис. Б.3. Финальная поверхность Коши $t = t_{\text{out}}$.

Мировая линия частицы. С помощью (3.6) мы запишем действие частицы (3.1) как интеграл по r , разделив его на две части,

$$S_m = -m \int_{r_0}^{r_{\text{in}}} \frac{dr}{\sqrt{-V_{\text{eff}}(r)}} - m \int_{r_0}^{r_{\text{out}}} \frac{dr}{\sqrt{-V_{\text{eff}}(r)}}, \quad (\text{Б.27})$$

где мы приняли во внимание смену знака $\sqrt{-V_{\text{eff}}}$ при обратном движении частицы. Путем прямого интегрирования мы находим

$$S_m = \frac{m^2}{\lambda p} \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{Mm^2}{8M_{\text{cr}}p^2} + \frac{p_0}{2p} \right) - \frac{m^2(r_{\text{in}} + r_{\text{out}} - 2r_0)}{p}, \quad (\text{Б.28})$$

где мы выделили расходящуюся часть при $r_{\text{out}, \text{in}} \rightarrow +\infty$.

Начальное и конечное состояния. Выражение для полного действия включает в себя вклады от волновых функций $\Psi_{\text{out}, \text{in}} = \exp(\mp i p r_{\mp})$ и свободного действия S_0 . Последнее происходит из действия для свободно движущейся частицы с импульсом $\mp p$:

$$S_0(t_{\text{in}}, 0_-) = p(r_- - r_{\text{in}}) - M t_{\text{in}}, \quad S_0(0_+, t_{\text{out}}) = p(r_+ - r_{\text{out}}) + M t_{\text{out}}, \quad (\text{Б.29})$$

где r_{\mp} - это положения частицы при $t = 0_{\mp}$. Объединяя вышеприведённые вклады, мы получаем

$$S_0(t_{\text{in}}, 0_-) + S_0(0_+, t_{\text{out}}) - i \ln \Psi_{\text{out}}^* - i \ln \Psi_{\text{in}} = -p(r_{\text{in}} + r_{\text{out}}) + M(t_{\text{out}} - t_{\text{in}}). \quad (\text{Б.30})$$

Интегралом (3.16) даётся

$$t_{\text{out}} - t_{\text{in}} = \frac{M(r_{\text{out}} + r_{\text{in}} - 2r_0)}{p} - \frac{1}{\lambda} \ln \left(1 - \frac{M}{M_{\text{cr}}} \right) - \frac{M}{\lambda p} \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{Mm^2}{8M_{\text{cr}}p^2} + \frac{p_0}{2p} \right) + \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{4M^3 - 3m^2M + (4M^2 - m^2)p_0}{(p + M)^3} + \frac{m^2(4M^2 + m^2)}{4M_{\text{cr}}(p + M)^3} \right). \quad (\text{Б.31})$$

- изменение шварцшильдовского времени в (Б.30).

Складывая (Б.23), (Б.25), (Б.26), (Б.28) и (Б.30), мы получаем финальный ответ (3.18). Видно, что все расходящиеся вклады пропорциональные $(r_{\text{out}} + r_{\text{in}})$ при этом сократились.

Приложение В

Энтропия запутывания в КфТП

Геометрическая энтропия $S(\Sigma)$ является мерой запутанности мод квантового поля \hat{f} внутри интервала Σ с остальной частью мира, что существенно зависит от квантового состояния поля \hat{f} . В конформной теории поля энтропия запутывания поля \hat{f}_{in} в вакуумном состоянии равна [97]

$$S_{\text{vac}}(\Sigma) = \frac{1}{12} \ln \left(\frac{(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)^2}{\epsilon_1 \epsilon_2} \right), \quad (\text{B.1})$$

где мы рассмотрели только лево-движущийся сектор и зафиксировали центральный заряд поля $c = 1$. Мы обозначили границы интервала Σ как \bar{v}_1 и \bar{v}_2 .

С точки зрения КТП энтропия запутывания это расходящееся выражения, которое требуется регуляризовать. С термодинамической точки зрения ϵ_1 и ϵ_2 это параметры УФ-обрезания, определяющие степень нашего незнания высокоэнергетичных мод вблизи границ интервала Σ . Формула (B.1) использовалась в работах [83, 97] для изучения запутанности квантовых полей в моделях с движущимся зеркалом.

Энтропия запутывания (B.1) является конформно инвариантной величиной [97], поскольку конформные преобразования не смешивают степени свободы квантового поля внутри и снаружи интервала Σ . Поскольку \hat{f}_{out} связано с \hat{f}_{in} через динамическое конформное преобразование $\bar{u} = \bar{U}(\bar{v})$, энтропия полей внутри интервала $[\bar{u}_1, \bar{u}_2]$ выражается как

$$S = \frac{1}{12} \ln \left(\frac{(\bar{v}(\bar{u}_2) - \bar{v}(\bar{u}_1))^2}{\bar{v}'(\bar{u}_1)\bar{v}'(\bar{u}_2)\epsilon_1^{(u)}\epsilon_2^{(u)}} \right), \quad (\text{B.2})$$

где $\bar{v}' \equiv d\bar{v}/d\bar{u}$ и $\epsilon_i^{(u)} = \epsilon_i/\bar{v}'(\bar{u}_i)$ это параметры обрезания на границах \bar{u}_1 и \bar{u}_2 образа интервала $\bar{U}(\Sigma)$.

Для регуляризации (B.2) необходимо вычесть вакуумное значение энтропии полей \hat{f}_{out}

$$S_{\text{ren}} = \frac{1}{12} \ln \left(\frac{(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)^2}{\epsilon_1^{(u)} \epsilon_2^{(u)}} \right) . \quad (\text{B.3})$$

Таким образом, мы получаем перенормированную энтропию

$$S_{\text{ren}} = S - S_{\text{vac}} = \frac{1}{12} \ln \left(\frac{(\bar{v}(\bar{u}_2) - \bar{v}(\bar{u}_1))^2}{(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)^2 \bar{v}'(\bar{u}_1) \bar{v}'(\bar{u}_2)} \right) \quad (\text{B.4})$$

для запутанности мод полей \hat{f}_{out} внутри интервала $[\bar{u}_1, \bar{u}_2]$. Взяв предел $\bar{u}_1 \rightarrow -\infty$, с учетом асимптотики $\bar{v}(\bar{u}_1) \rightarrow \bar{u}_1 - 2\phi_0/\lambda$, получаем

$$S_{\text{ren}} = S - S_{\text{vac}} = -\frac{1}{12} \ln (\bar{v}'(\bar{u}_2)) . \quad (\text{B.5})$$

Подставляя крайние значения производных на концах непрерывных частей границы для решения с чёрной дырой, мы приходим к выражениям (2.50).

Литература

1. Abbott B. P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger // Phys. Rev. Lett. 2016. T. 116, № 6. C. 061102.
2. Akiyama Kazunori et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole // Astrophys. J. 2019. T. 875, № 1. C. L1.
3. Shomer Assaf. A Pedagogical explanation for the non-renormalizability of gravity // arXiv:0709.3555 [hep-th]. 2007.
4. Horava Petr. Quantum Gravity at a Lifshitz Point // Phys. Rev. 2009. T. D79. C. 084008.
5. Barvinsky Andrei O. et al. Renormalization of Hořava gravity // Phys. Rev. D. 2016. T. 93, № 6. C. 064022.
6. Birrell N.D., Davies P.C.W. Quantum Fields in Curved Space. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1984.
7. Hawking S. W. Particle Creation by Black Holes // Commun. Math. Phys. 1975. T. 43. C. 199–220.
8. Hawking S. W. Black hole explosions // Nature. 1974. T. 248. C. 30–31.
9. Jho Yongsoo, Park Seong Chan. Constraining New Physics with High Multiplicity : I. Ultra-High Energy Cosmic Rays on air-shower detector arrays // arXiv: 1806.03063 [hep-ph]. 2018.
10. Sirunyan Albert M et al. Search for black holes in high-multiplicity final states in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV // Phys. Lett. 2017. T. B774. C. 279–307.
11. Polnarev A. G., Khlopov M. Yu. Cosmology, primordial black holes, and supermassive particles // Phys. Usp. 1985. T. 28, № 3. C. 213–232.
12. Hawking S. W. Breakdown of Predictability in Gravitational Collapse // Phys.

- Rev. 1976. T. D14. C. 2460–2473.
13. Preskill John. Do black holes destroy information? // International Symposium on Black holes, Membranes, Wormholes and Superstrings Woodlands, Texas, January 16-18, 1992. 1992. C. 22–39.
 14. Polchinski Joseph. The Black Hole Information Problem // Proceedings, Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: New Frontiers in Fields and Strings (TASI 2015): Boulder, CO, USA, June 1-26, 2015. 2017. C. 353–397.
 15. Hawking S. W. The Unpredictability of Quantum Gravity // Commun. Math. Phys. 1982. T. 87. C. 395–415.
 16. Page Don N. Is Quantum Gravity Deterministic And/or Time Symmetric? // Gen. Rel. Grav. 1982. T. 14. C. 299–302.
 17. Unruh William G., Wald Robert M. Information Loss // Rept. Prog. Phys. 2017. T. 80, № 9. C. 092002.
 18. Banks Tom, Susskind Leonard, Peskin Michael E. Difficulties for the Evolution of Pure States Into Mixed States // Nucl. Phys. 1984. T. B244. C. 125–134.
 19. Aharonov Y., Casher A., Nussinov S. The Unitarity Puzzle and Planck Mass Stable Particles // Phys. Lett. 1987. T. B191. C. 51.
 20. Carlitz Robert D., Willey Raymond S. The Lifetime of a Black Hole // Phys. Rev. 1987. T. D36. C. 2336.
 21. Chen Pisin, Ong Yen Chin, Yeom Dong-han. Black Hole Remnants and the Information Loss Paradox // Phys. Rept. 2015. T. 603. C. 1–45.
 22. Bekenstein Jacob D. Black holes and entropy // Phys. Rev. 1973. T. D7. C. 2333–2346.
 23. Page Don N. Is Black-Hole Evaporation Predictable? // Phys. Rev. Lett. 1980. T. 44. C. 301.
 24. 't Hooft Gerard. The black hole interpretation of string theory // Nucl. Phys. 1990. T. B335. C. 138–154.

25. Stephens Christopher R., 't Hooft Gerard, Whiting Bernard F. Black hole evaporation without information loss // *Class. Quant. Grav.* 1994. T. 11. C. 621–648.
26. Broda Bogusław. Possible unitarity of black hole evaporation // arXiv: 1810.10431 [gr-qc]. 2018.
27. Maldacena Juan Martin. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity // *Int. J. Theor. Phys.* 1999. T. 38. C. 1113–1133. [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)].
28. Witten Edward. Anti-de Sitter space and holography // *Adv. Theor. Math. Phys.* 1998. T. 2. C. 253–291.
29. Maldacena Juan Martin. Eternal black holes in anti-de Sitter // *JHEP.* 2003. T. 04. C. 021.
30. Penington Geoff et al. Replica wormholes and the black hole interior // arXiv: 1911.11977 [hep-th]. 2019.
31. Susskind Leonard, Thorlacius Larus, Uglum John. The Stretched horizon and black hole complementarity // *Phys. Rev.* 1993. T. D48. C. 3743–3761.
32. Almheiri Ahmed et al. Black Holes: Complementarity or Firewalls? // *JHEP.* 2013. T. 02. C. 062.
33. Almheiri Ahmed et al. An Apologia for Firewalls // *JHEP.* 2013. T. 09. C. 018.
34. Dodelson Matthew, Silverstein Eva. String-theoretic breakdown of effective field theory near black hole horizons // *Phys. Rev.* 2017. T. D96, № 6. C. 066010.
35. Ashtekar Abhay, Bojowald Martin. Black hole evaporation: A Paradigm // *Class. Quant. Grav.* 2005. T. 22. C. 3349–3362.
36. Rovelli Carlo. Black Hole Evolution Traced Out with Loop Quantum Gravity // *APS Physics.* 2018. T. 11. C. 127.
37. Giddings Steven B. Black holes in the quantum universe // *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* 2019. T. A377, № 2161. C. 20190029.

38. Strobl Thomas. Gravity in two space-time dimensions. Ph.D. thesis: Aachen, Tech. Hochsch. 1999.
39. Grumiller D., Kummer W., Vassilevich D. V. Dilaton gravity in two-dimensions // Phys. Rept. 2002. T. 369. C. 327–430.
40. Grumiller Daniel, Meyer Rene. Ramifications of lineland // Turk. J. Phys. 2006. T. 30. C. 349–378.
41. Callan Jr. Curtis et al. Evanescent black holes // Phys. Rev. 1992. T. D45, № 4. C. R1005.
42. Russo Jorge G., Susskind Leonard, Thorlacius Larus. Black hole evaporation in (1+1)-dimensions // Phys. Lett. 1992. T. B292. C. 13–18.
43. Strominger Andrew. Les Houches lectures on black holes // NATO Advanced Study Institute: Les Houches Summer School, Session 62: Fluctuating Geometries in Statistical Mechanics and Field Theory Les Houches, France, August 2-September 9, 1994.
44. Thorlacius Larus. Black hole evolution // Nucl. Phys. Proc. Suppl. 1995. T. 41. C. 245–275.
45. Russo Jorge G., Susskind Leonard, Thorlacius Larus. The Endpoint of Hawking radiation // Phys. Rev. 1992. T. D46. C. 3444–3449.
46. Verlinde Erik, Verlinde Herman. A quantum S-matrix for two-dimensional black hole formation and evaporation // Nuclear Physics B. 1993. T. 406, № 1-2. C. 43–58.
47. Chung Tze Dan, Verlinde Herman L. Dynamical moving mirrors and black holes // Nucl. Phys. 1994. T. B418. C. 305–336.
48. Das Sumit R., Mukherji Sudipta. Black hole formation and space-time fluctuations in two-dimensional dilaton gravity and complementarity // Phys. Rev. 1994. T. D50. C. 930–940.
49. Strominger Andrew, Thorlacius Larus. Conformally invariant boundary conditions for dilaton gravity // Phys. Rev. 1994. T. D50. C. 5177–5187.

50. Bose Sukanta, Parker Leonard, Peleg Yoav. Semiinfinite throat as the end state geometry of two-dimensional black hole evaporation // *Phys. Rev.* 1995. T. D52. C. 3512–3517.
51. Peleg Yoav, Bose Sukanta, Parker Leonard. Choptuik scaling and quantum effects in 2-d dilaton gravity // *Phys. Rev.* 1997. T. D55. C. 4525–4528.
52. Fitkevich Maxim, Levkov Dmitry, Zenkevich Yegor. Exact solutions and critical chaos in dilaton gravity with a boundary // *JHEP.* 2017. T. 04. C. 108.
53. Fitkevich M.D. Model of Dilaton Gravity with Dynamical Boundary: Results and Prospects // *Phys. Atom. Nucl.* 2020. T. 82, № 12. C. 1610–1615.
54. Fitkevich Maxim, Levkov Dmitry, Zenkevich Yegor. Dilaton gravity with a boundary: from unitarity to black hole evaporation // *JHEP.* 2020. T. 06. C. 184.
55. Fitkevich Maxim, Levkov Dmitry, Sibiryakov Sergey. Semiclassical S-matrix and black hole entropy in dilaton gravity // *JHEP.* 2020. T. 08. C. 142.
56. Fitkevich Maxim. Signatures of chaos and non-integrability in two-dimensional gravity with dynamical boundary // *EPJ Web Conf.* 2016. T. 125. C. 05004.
57. Fitkevich Maxim. Failure of mean-field approximation in weakly coupled dilaton gravity // *EPJ Web Conf.* 2018. T. 191. C. 07004.
58. Choptuik Matthew W. Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field // *Phys. Rev. Lett.* 1993. T. 70. C. 9–12.
59. Gundlach Carsten, Martin-Garcia Jose M. Critical phenomena in gravitational collapse // *Living Rev. Rel.* 2007. T. 10. C. 5.
60. Louis-Martinez D., Kunstatter G. On Birckhoff's theorem in 2-D dilaton gravity // *Phys. Rev.* 1994. T. D49. C. 5227–5230.
61. Gibbons G. W., Hawking S. W. Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity // *Phys. Rev.* 1977. T. D15. C. 2752–2756.
62. Poisson E. *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics.* Cambridge University Press, 2004.

63. Krishnan Chethan, Raju Avinash. A Neumann Boundary Term for Gravity // Mod. Phys. Lett. 2017. T. A32, № 14. C. 1750077.
64. Das Sumit R., Mukherji Sudipta. Boundary dynamics in dilaton gravity // Mod. Phys. Lett. A. 1994. T. 9. C. 3105–3118.
65. Steeb W. H., Euler N. Nonlinear evolution equations and the Painleve test // Int. J. Mod. Phys. 1992. T. A7. C. 1669–1683.
66. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: Эдиториал УРСС, 2001.
67. Gaudin M. Diagonalization of a Class of Spin Hamiltonians // Journal de Physique. 1976. T. 37 (10). C. 1087–1098.
68. Shenker Stephen H., Stanford Douglas. Black holes and the butterfly effect // JHEP. 2014. T. 03. C. 067.
69. Polchinski Joseph. Chaos in the black hole S-matrix // arXiv: 1505.08108 [hep-th]. 2015.
70. Polyakov Alexander M. Quantum Geometry of Bosonic Strings // Phys. Lett. 1981. T. B103. C. 207–210.
71. Russo Jorge G., Susskind Leonard, Thorlacius Larus. Cosmic censorship in two-dimensional gravity // Phys. Rev. 1993. T. D47. C. 533–539.
72. Susskind Leonard, Thorlacius Larus. Hawking radiation and back reaction // Nucl. Phys. 1992. T. B382. C. 123–147.
73. Wess J., Zumino B. Consequences of anomalous Ward identities // Phys. Lett. 1971. T. 37B. C. 95–97.
74. Bilal Adel. Lectures on Anomalies // arXiv: 0802.0634 [hep-th]. 2008.
75. Polchinski J. String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2007.
76. Herzog Christopher P., Huang Kuo-Wei, Jensen Kristan. Universal Entanglement and Boundary Geometry in Conformal Field Theory // JHEP.

2016. Т. 01. С. 162.
77. Dubovsky Sergei, Gorbenko Victor, Mirbabayi Mehrdad. Asymptotic fragility, near AdS_2 holography and $T\bar{T}$ // JHEP. 2017. Т. 09. С. 136.
78. Saad Phil, Shenker Stephen H., Stanford Douglas. JT gravity as a matrix integral // arXiv: 1903.11115 [hep-th]. 2019.
79. Davies P. C. W., Fulling S. A. Radiation from a moving mirror in two-dimensional space-time conformal anomaly // Proc. Roy. Soc. Lond. 1976. Т. A348. С. 393–414.
80. Еремеев Дмитрий. Дилатонная гравитация с границей // маг. диссер. МГУ. 2017.
81. Ishibashi Akihiro, Hosoya Akio. Naked singularity and thunderbolt // Phys. Rev. 2002. Т. D66. С. 104016.
82. Хокинг С. Пенроуз Р. Природа пространства и времени. СПб.: Амфора, 2012.
83. Wilczek Frank. Quantum purity at a small price: Easing a black hole paradox // International Symposium on Black holes, Membranes, Wormholes and Superstrings Woodlands, Texas, January 16-18, 1992. 1993. С. 1–21.
84. Almheiri Ahmed, Sully James. An Uneventful Horizon in Two Dimensions // JHEP. 2014. Т. 02. С. 108.
85. Fiola Thomas M. et al. Black hole thermodynamics and information loss in two-dimensions // Phys. Rev. 1994. Т. D50. С. 3987–4014.
86. Klein O. Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac // Z. Phys. 1929. Т. 53. С. 157.
87. Baker Daniel et al. A self-consistency check for unitary propagation of Hawking quanta // Int. J. Mod. Phys. 2017. Т. A32, № 33. С. 1750198.
88. 't Hooft Gerard. The Scattering matrix approach for the quantum black hole: An Overview // Int. J. Mod. Phys. 1996. Т. A11. С. 4623–4688.
89. Levkov D. G., Panin A. G., Sibiryakov S. M. Unstable Semiclassical Trajectories

- in Tunneling // Phys. Rev. Lett. 2007. T. 99. C. 170407.
90. Bezrukov Fedor, Levkov Dmitry, Sibiryakov Sergey. Semiclassical S-matrix for black holes // JHEP. 2015. T. 12. C. 002.
 91. Parikh Maulik K., Wilczek Frank. Hawking radiation as tunneling // Phys. Rev. Lett. 2000. T. 85. C. 5042–5045.
 92. Mandal Gautam, Sengupta Anirvan M., Wadia Spenta R. Classical solutions of two-dimensional string theory // Mod. Phys. Lett. 1991. T. A6. C. 1685–1692.
 93. Solodukhin Sergey N. Two-dimensional quantum corrected eternal black hole // Phys. Rev. 1996. T. D53. C. 824–835.
 94. Tinyakov P. G. Instanton like transitions in high-energy collisions // Int. J. Mod. Phys. 1993. T. A8. C. 1823–1886.
 95. Israel W. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity // Nuovo Cim. 1966. T. B44S10. C. 1.
 96. Mann Robert B., Ross S. F. Matching conditions and gravitational collapse in two-dimensional gravity // Class. Quant. Grav. 1992. T. 9. C. 2335–2350.
 97. Holzhey Christoph, Larsen Finn, Wilczek Frank. Geometric and renormalized entropy in conformal field theory // Nucl. Phys. 1994. T. B424. C. 443–467.