

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Дмитриев Антон Сергеевич

**Динамика Бозе-звезд
из аксионов темной материи.**

1.3.3 — теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук,
Панин Александр Григорьевич

Москва — 2026

Оглавление

Введение	4
1 Нестабильность Бозе-звезд	
с ненулевым угловым моментом	18
1.1 Введение. Бозе-звезды с ненулевым угловым моментом	18
1.2 Вращающиеся Бозе-звезды	19
1.3 Запрещающая теорема при $\lambda \leq 0$	23
1.4 Распад Бозе-звезды с $l = 1$	25
1.5 Линейные неустойчивости при произвольных l	29
1.5.1 Отсутствие самодействия	29
1.5.2 Самодействующий конденсат	32
1.6 Аналитические решения при $l \gg 1$	35
1.6.1 Бозе-звезды	35
1.6.2 Неустойчивости	38
1.7 Обсуждение	41
2 Автомодельная кинетика гравитационной Бозе- Эйнштейновской конденсации	44
2.1 Введение. Автомодельность функции распределения.	44
2.2 Масштабная симметрия гравитационной кинетики	47
2.3 Стремление к автомодельным профилям	52
2.4 Степенные каскады.	54
2.5 Автомодельные решения	56
2.5.1 Подстановка	56
2.5.2 Свойства скейлинговых решений	58
2.5.3 Универсальный предел	63
2.6 Адиабатическая автомодельность	65
2.6.1 Численный пример	65
2.6.2 Адиабатическое приближение	66
2.7 Обсуждение	69
3 Автомодельный рост Бозе-звезд	73

3.1	Введение. Рост Бозе-звезд	73
3.2	Автомодельность облака	73
3.3	Рост Бозе-звезд.	76
3.4	Самодействующие бозоны	79
3.5	Оценки для космологии	81
Заключение		83
Список литературы		86
А Численные методы и приближения для вращающихся Бозе-		
	звезд	100
A.1	Трёхмерное моделирование	100
A.2	Осесимметричный код	102
A.3	Двумерные Бозе-звезды	105
A.4	Моды неустойчивости при $l \gg 1$	107
Б Кинетическое уравнение 111		
B.1	Кинетическое уравнение для однородного и изотропного гравитирующего газа	111
B.2	Численные методы для нестационарной кинетики	112
B.3	Численные методы для автомодельных профилей	114
B.4	Асимптотики автомодельных профилей	117
B.4.1	Асимптотики при $\omega_s \rightarrow 0$	117
B.4.2	Асимптотики при $\omega_s \rightarrow \infty$	121

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования

Природа темной материи остается одной из ключевых загадок фундаментальной физики. Известно, что она обнаруживает себя исключительно через гравитационное воздействие, а данные, указывающие на ее негравитационные свойства, пока не нашли достаточного подтверждения. Тем не менее, гравитационные эффекты позволяют косвенно изучать ее пространственное распределение, что дает потенциальную возможность получить ответ на вопрос, сконцентрирована ли темная материя в компактные структуры или распределена в галактике относительно равномерно. Таким образом, исследование «темных объектов» (сгустков темной материи) и их свойств, а также возможности их обнаружения астрономическими методами, представляет собой возможный путь проверки конкретных теоретических моделей.

Одним из перспективных кандидатов на роль темной материи Вселенной, предсказывающих формирование «темных объектов», является аксион. Аксион впервые был введен в модели, предложенной Роберто Печчеи и Хелен Куинн в 1977 году [1], для объяснения отсутствия CP-нарушающей фазы $\bar{\theta}$ в секторе сильного взаимодействия Стандартной модели. Суть их подхода заключалась в том, чтобы перейти от представления CP-нарушающей фазы $\bar{\theta}$ как фиксированного параметра Стандартной модели к ее описанию в виде динамической переменной. На практике это означает добавление нового поля - поля аксиона, которое связывается с сильным ядерным взаимодействием так же, как CP-нарушающая фаза $\bar{\theta}$. Введенное аксионное поле релаксирует к значению, при котором параметр $\bar{\theta}$ обращается в ноль. Это, в свою очередь, приводит к исчезновению электрического дипольного момента нейтрона, что согласуется с экспериментальными ограничениями.

Чтобы добавить аксион в Стандартную модель, мы вводим новую симметрию, называемую симметрией Печчеи-Куинн (PQ) [1], которая является глобальной $U(1)_{PQ}$ симметрией. Введение симметрии PQ как правило требует добавления нового бозонного поля помимо единственного бозона Хиггса Стандартной модели. Потенциал для этого поля выбирается так, что симметрия оказывается спонтанно-нарушенной. Обозначим f_a - вакуумное среднее поля, при котором происходит нарушение симметрии. Как известно, результа-

том спонтанного нарушения является появление безмассовой частицы - Намбу-Голдстоуновского бозона [2, 3] - в спектре возбуждений над вакуумом. Аксионом называется Намбу-Голдстоуновский бозон, соответствующий спонтанно нарушенной симметрии Печчеи-Куинн [1]. Он представлен полем a , которое пропорционально фазе $\bar{\theta}$ сильной СР проблемы, делая угол динамическим, а не фиксированной и загадочной константой.

Важно отметить, что симметрия Печчеи-Квинн является точной только на классическом уровне, в то время как на квантовом уровне эта симметрия является явно нарушенной. В этом случае поле аксиона будет иметь массу, то есть следует говорить о псевдо-Намбу-Голдстоуновском бозоне. Масса может быть вычислена, с одной стороны, с помощью учета инстантонных поправок, а с другой стороны, за счет взаимодействия поля аксиона с другими полями Стандартной модели. Эти взаимодействия малы, поскольку они оказываются подавлены за счет большого энергетического масштаба симметрии Печчеи-Квинн f_a .

На энергетическом масштабе КХД можно определить массу аксиона при нулевой температуре в терминах хорошо понятной физики сильного ядерного взаимодействия, рассматривая смешивание аксиона с нейтральным пионом - связанным состоянием кварков с теми же квантовыми числами, что и аксион. Взаимодействия аксиона с нейтральным пионом приводят к появлению небольшой массы для аксиона. При этом масса аксиона дается следующим соотношением:

$$m_a f_a \sim m_\pi f_\pi,$$

где m_π - масса пиона, а f_π - константа, которая известна из скорости распада пиона посредством слабого взаимодействия. Обсуждаемое выше смешивание, приводит к эффективному потенциалу аксиона:

$$V(a) \approx -\Lambda_{\text{QCD}}^4 \cos\left(\frac{a}{f_a} + \bar{\theta}\right),$$

где $\Lambda_{\text{QCD}} \approx 200$ МэВ. Таким образом, можно вычислить массу аксиона:

$$m_a \approx (5.70 \pm 0.007) 10^{-6} \text{ЭВ} \left(\frac{10^{12} \text{ГэВ}}{f_a}\right),$$

где ошибка включает экспериментальные и теоретические вклады, появляющиеся в подробном расчете аксион-пионного смешивания [4].

Гипотеза о том, что аксионы могут составлять темную материю, приводит к интересным следствиям. Чтобы аксионы обеспечивали наблюдаемую плотность темной материи, их масса должна быть исключительно мала. Однако из-за этой малой массы их общее количество должно быть колоссальным. В результате каждое квантовое состояние заполняется огромным числом аксионов, что приводит к экстремально высокой фазовой плотности. Такая ситуация позволяет описывать аксионную темную материю не как совокупность отдельных частиц, а как классическое скалярное поле $a(x, t)$. На космологических масштабах аксионное поле можно считать пространственно однородным. Оно совершает гармонические колебания с частотой, равной массе аксиона m_a , а его амплитуда уменьшается из-за космологического расширения: $a(t) \approx a_0 \cos(m_a t)/R(t)^{3/2}$. Здесь $R(t)$ - масштабный фактор, а константа a_0 фиксируется начальными условиями на ранних этапах эволюции поля. Плотность энергии аксионной материи принимает вид: $\rho \approx m_a^2 a_0^2 / R(t)^3$. Это соотношение отражает характерное для нерелятивистской материи поведение $\rho \propto 1/R^3$, что согласуется с ролью аксионов как кандидатов в холодную темную материю.

Ключевым фактором, определяющим дальнейшую эволюцию аксионного поля, является момент нарушения симметрии Печчеи–Квинн (PQ) по отношению к окончанию инфляции. Если нарушение PQ-симметрии происходит до завершения инфляции (и сохраняется нарушенным в последующую эпоху), то квантовые флуктуации аксионного поля генерируют возмущения постоянной кривизны (isocurvature), которые в зависимости от соотношения между f_a и параметром Хаббла на инфляции, накладывают жесткие ограничения на параметры аксионных моделей [5–7].

Другой сценарий предполагает, что нарушение PQ-симметрии происходит после завершения космологической инфляции в ходе высокотемпературного фазового перехода при $T_c \sim f_a$. В результате фаза комплексного поля Печчеи–Квинн приобретает случайные значения от $-\pi$ до π в причинно-несвязанных пространственных областях, что приводит к пространственной неоднородности аксионного поля на размере горизонта.

При таких температурах эффективный потенциал аксиона пренебрежимо мал, так что аксион можно считать безмассовым. Благодаря свободному распространению (free-streaming) релятивистских возмущений поля, начальные пространственные неоднородности эффективно сглаживаются в пределах текущего горизонта.

Эффективность подавления неоднородностей внутри горизонта резко снижается с возникновением массы аксиона m_a в эпоху КХД-фазового перехода при $T \sim 1 - 2$ ГэВ. В результате аксионное поле остается неоднородным с характерным размером неоднородностей, определяемым размером горизонта в эту эпоху, а масса неоднородности определяется массой внутри горизонта [8].

Помимо рассмотренного механизма, аксионная темная материя может эффективно рождаться при распаде топологических дефектов. Ключевую роль здесь играют аксионные струны, возникающие при нарушении PQ-симметрии через механизм Киббла [9]. Эволюционируя до КХД-фазового перехода, такие струны пересекаются, формируя петли. Последующий распад этих петель служит мощным источником аксионов [10, 11].

В эпоху фазового перехода КХД аксионное поле приобретает потенциал, явно нарушающий $U(1)_{PQ}$ -симметрию. При охлаждении Вселенной поле аксиона релаксирует к одному из минимумов потенциала. В каждой причинно-несвязанной области минимум выбирается случайно, поэтому спустя несколько хаббловских времен, когда множество областей вновь оказывается внутри горизонта, формируются доменные стенки — конфигурации поля, плавно интерполирующие между соседними вакуумами. Границами этих стенок выступают космические струны, которые довольно быстро их дестабилизируют, разрывая на компактные фрагменты. Распад образовавшейся сети топологических дефектов сопровождается интенсивным излучением аксионов. В спектре излучения присутствует нерелятивистская компонента, вносящая дополнительный вклад в плотность холодной темной материи.

Результаты численного моделирования динамики аксионного поля в эпоху КХД фазового перехода показали, что сложная нелинейная динамика, описанная выше, приводит к усилению неоднородностей аксионного поля. Вследствие этого формируются области, где контраст плотности массы существенно превышает единицу. При переходе от радиационно-доминированной к материально-доминированной стадии эти области становятся гравитационно-связанными, образуя сверхплотные миникластеры. Их характерная масса, определяемая полной массой аксионов в хаббловском объеме при температуре $T = 1$ ГэВ, составляет $\sim 10^{-12}$ солнечных масс, а характерный размер — около 10^{12} см.

Для эффективного экспериментального поиска аксионов критически важно определить диапазон их возможных масс. Масса определяет характерную частоту спектра электромагнитного излучения, генерируемого при взаимодей-

ствии аксионов с внешними электромагнитными полями (например, в сильных магнитных полях, согласно эффекту Примакова). Точные оценки массового диапазона позволяют оптимизировать параметры детекторов, настраивая их на резонансные частоты, соответствующие ожидаемым сигналам, что повышает шансы регистрации этих слабовзаимодействующих частиц.

В сценариях, где нарушение PQ-симметрии происходит до инфляции, роль темной материи могут играть аксионы с минимально возможной массой (так называемая *ultralight* или *fuzzy* темная материя). Они эффективно генерируются на стадии инфляции. Чрезвычайно малая масса частиц приводит к тому, что их длина волны де Бройля сравнивается с космологическими масштабами. Это, в свою очередь, препятствует гравитационному коллапсу вещества на малых масштабах и подавляет формирование мелкомасштабных структур (таких как карликовые галактики) в ранней Вселенной. Консервативные ограничения на массу аксиона в этом сценарии составляют $m_a \geq 10^{-22}$ эВ, так что длина волны сравнивается с размером карликовых галактик. Однако анализ наблюдательных данных, в частности, по внутренней динамике ультратусклых карликовых галактик [12] и спектрам Лайман-альфа леса [13], позволяет усилить эти ограничения на два порядка величины. Этот предел также применяется к другим формам бозонной темной материи, и является фундаментальным нижним пределом массы частицы темной материи. В противном случае аксионы могут составлять долю от общей плотности темной материи на уровне 2% [14].

Верхнее ограничение на массу КХД аксиона может быть получено, используя связь между массой и константой взаимодействия частицы с ядерной материей, и следует из данных наблюдений сверхновой SN1987A [15]. Аксион-нуклонное взаимодействие приводит к излучению аксионов нейтронами и протонами внутри коллапсирующего ядра сверхновой. Произведенные аксионы взаимодействуют очень слабо с окружающей ядерной материей и поэтому могут покидать ядро сверхновой, приводя к избыточному охлаждению по сравнению со случаем без аксионов. Это сокращает длительность фазы нейтринного излучения, поскольку часть энергии, которая в стандартной модели уносится нейтрино, перераспределяется на аксионное излучение. В то же время нейтринная вспышка сверхновой SN1987A была зарегистрирована в детекторах на Земле. Ее продолжительность согласуется с предсказаниями стандартных моделей сверхновых. Таким образом, скорость производства аксионов должна быть низкой, что приводит к верхнему ограничению на аксион-нуклонную константу взаи-

модействия g_{aNN} , и, таким образом, к верхнему ограничению на m_a , которое составляет $m_a \lesssim 2 \times 10^{-2}$ эВ.

Вычисление массы аксиона как частицы темной материи в сценарии, в котором PQ-симметрия нарушается после инфляции, сталкивается со сложностями. Современные вычислительные мощности, включая суперкомпьютеры, не позволяют провести полное моделирование процесса из-за колоссального разрыва в масштабах: несоизмеримость размеров струн и длин волн аксионов делает их совместное моделирование на одной сетке невозможным. Как следствие, оценки массы широко варьируются в зависимости от применяемых упрощенных методов и находятся в диапазоне $2.5 \cdot 10^{-5}$ эВ $\lesssim m_a \lesssim 0.5 \cdot 10^{-3}$ эВ [16, 17].

На поздних временах градиенты поля малы, и аксион описывается уравнениями Гросса-Питаевского-Пуассона. Эти уравнения возникают как нерелятивистский предел уравнения Клейна-Гордона для поля аксиона в режиме линейной гравитации, в соответствии с подстановкой, $a = \sqrt{2/m_a}(\psi e^{im_a t} + \psi^* e^{-im_a t})$. «Волновая функция» ψ подчиняется системе:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\nabla^2 \psi}{2m_a} + \frac{\lambda_a}{8m_a^2} |\psi|^2 \psi + m_a U \psi, \\ \nabla^2 U = 4\pi G m_a |\psi|^2,$$

где $\lambda_a = -m_a^2/f_a^2$ - безразмерная константа самодействия аксиона, принимающая значение $\lambda_a \sim -10^{-48}$ для аксионов КХД ($\lambda_a \sim -10^{-100}$ для «fuzzy» темной материи). Плотность массы аксионов в ведущем порядке равна $m_a |\psi|^2$. Переход к этой системе уравнений существенно упрощает моделирования на поздних временах.

Моделирования миникластеров, описываемых системой уравнений Гросса-Питаевского и Пуассона, показывают [18–28], что в них образуются аксионные звезды (Бозе-звезды) [29, 30] — гравитационно-связанные капли Бозе-Эйнштейновского конденсата астероидной массы [8, 31–35]. Бозе-звезды являются самогравитирующей системой аксионов, подчиняющейся уравнениям Гросса-Питаевского-Пуассона в основном состоянии потенциала, который создается Бозе-звездой. Образование таких объектов происходит благодаря тому, что фазовая плотность миникластеров настолько велика [36], что в них может произойти термализация посредством универсальных гравитационных взаимодействий [22]. Это приводит к образованию Бозе-звезды в центре каждой такой структуры [18, 22, 26]. В зависимости от модели аксиона, а также

от начального размера и массы миникластера, время образования Бозе-звезды может варьироваться от нескольких часов до времени жизни Вселенной. Таким образом, сегодня Вселенная должна быть заполнена аксионными звездами. В результате, часть темной материи может быть скрыта от наблюдений Бозе-звездами [37].

Более того, достигнув большой массы, Бозе-звезды могут взрываться с образованием релятивистских аксионов [38] благодаря наличию притягивающего самодействия или излучать радиофотоны с помощью параметрического резонанса [30], что, в свою очередь, в зависимости от удаленности источника может объяснять быстрые радио всплески (FRB) [39] и аномалии ARCADE 2 и EDGES [40].

Вызывает удивление то, что ни одно из существующих моделирований не показывает образование Бозе-звезд с ненулевым угловым моментом, даже если с самого начала присутствовала сильная сферическая асимметрия. Встречается множество работ, в которых численно наблюдается формирование Бозе-звезд с нулевым полным угловым моментом [18, 22, 26, 41, 42], их столкновения [19], слияния [43–45] или приливное разрушение [46, 47]. В конце моделирования они сильно осциллируют [12, 23, 48], совершают случайные блуждания [48, 49], частично или полностью разрушаются [19, 47], но никогда не приобретают ненулевой угловой момент.

Несмотря на такие результаты численного моделирования, сами по себе вращающиеся Бозе-звезды, если они стабильны, будут важны для астрофизики и космологии. Их центробежные барьеры могут сопротивляться коллапсам чрезмерно массивных звезд из-за притягивающего самодействия бозонов [38, 50, 51]. Это означает, в частности, что быстровращающиеся аксионные звезды КХД могут достигать больших масс и плотностей [52], которых, возможно, будет достаточно для возникновения наблюдаемого параметрического радиоизлучения [30, 45, 52, 53]. Кроме того, угловые моменты Бозе-звезд в принципе обнаружимы: непосредственно, путем наблюдения гравитационных волн от их слияний [54–56] или косвенно, если они коллапсируют во вращающиеся черные дыры [29, 57], которые сливаются и испускают гравитационные волны.

Результаты моделирования образования космических структур и миникластеров темной материи [18–21, 23–28] указывают, что массы Бозе-звезд M_{bs} растут на временных масштабах, которые определяются релаксационным временем (временем образования Бозе-звезды), но затем темп их роста замедляет-

ся почти до полной остановки [18–20]. Результаты численного моделирования в контролируемых условиях (ящики с периодическими граничными условиями, рукотворные миникластеры) — хотя и свидетельствуют о медленном росте Бозе-звезд в поздние эпохи, приводят к разным законам, описывающим этот процесс: $M_{bs} \propto t^{1/2}$ в [22], $t^{1/4}$ в [58] и $t^{1/8}$ в работах [26, 42]. Изучение этой несогласованности в результатах позволит получить правильный закон роста для звезд из аксионов темной материи, который поможет раскрыть распределение этих объектов в современной Вселенной (см. также [59–61]), таким образом открывая новые пути для обнаружения (или ограничений) ультралегкой и аксионной темной материи.

На протяжении всей работы будет использоваться система единиц $\hbar = c = 1$.

Целью данной работы является изучение динамики гравитационно-связанного конденсата Бозе-Эйнштейна, состоящего из аксионов темной материи. Для этого необходимо решить следующие **задачи**:

- Получить решения, описывающие конденсат Бозе-Эйнштейна, состоящий из аксионов темной материи (Бозе-звезды) с ненулевым угловым моментом, как в случае отсутствующего короткодействующего самодействия, так и при его наличии, а также исследовать эти решения на стабильность. Определить, каким образом эти состояния разрушаются, и можно ли их стабилизировать с помощью самодействия.
- Исследовать кинетику Бозе-газа из аксионов темной материи, взаимодействующего за счет гравитационного рассеяния в приближении Ландау (парные столкновения с малой передачей импульса). Найти автомодельные решения кинетического уравнения Больцмана, и показать, что эти решения являются аттракторами. Построить приближенный метод для описания эволюции системы, в случае нарушения точной автомодельной эволюции внешним источником.
- Исследовать конденсацию и дальнейший рост Бозе-звезды в облаке аксионов. Показать, что эволюция облака является приблизительно автомодельной. Разработать приближенный метод для описания эволюции свободного газа и получить закон роста Бозе-звезды со временем, а также обобщить этот закон на случай присутствия малого короткодействующего самодействия.

Научная новизна

Все выносимые на защиту результаты являются новыми и не имеют аналогов в научной литературе. А именно:

1. Доказана теорема о нестабильности вращающихся Бозе-звезд из аксионов темной материи — аксиально-симметричных решений системы уравнений Гросса–Питаевского–Пуассона, обладающих минимальной энергией и ненулевым угловым моментом, — в случаях притягивающего или пренебрежимо малого (отсутствующего) короткодействующего самодействия между частицами. Для случая без самодействия численно найдены возмущения, приводящие к разрушению вращающихся Бозе-звезд. Проведено полное численное моделирование, демонстрирующее процесс разрушения вращающейся Бозе-звезды с угловым моментом, равным единичному кванту. Показано, что Бозе-звезды с угловым моментом, равным единичному кванту, стабильны при достаточно сильном отталкивающем самодействии между аксионами.
2. На основе кинетического уравнения Больцмана построена модель однородного ансамбля гравитационно-взаимодействующих аксионов темной материи. В интеграле столкновений учтены парные гравитационные взаимодействия с малой передачей импульса (приближение Ландау). Модель описывает обмен частицами с «внешней средой», в частности, с Бозе-звездой, помещенной в ансамбль, с помощью поглощающего граничного условия при низких энергиях, обеспечивающего уход частиц из системы, и внешнего источника, пополняющего ансамбль новыми частицами. Для данной системы найдено двухпараметрическое семейство автомодельных решений в двух случаях: без внешнего источника частиц и в присутствии внешних источников, инвариантных относительно масштабных преобразований.
3. Показано, что эволюция функции распределения частиц ансамбля по энергии в построенной модели под действием источника, не инвариантного относительно масштабных преобразований, происходит приближенно автомодельно. В этом режиме параметры, определяющие форму автомодельного решения, слабо зависят от времени.
4. Проведено масштабное численное моделирование эволюции ансамбля гра-

витационно взаимодействующих аксионов, содержащего Бозе-звезду. На основе полученных численных результатов показано, что зависимость функции распределения частиц в ансамбле от времени является приближенно автомодельной. Данная зависимость подтверждена прямым сравнением с эволюцией функции распределения в модели, построенной на основе уравнения Больцмана. Этот факт позволил определить закон роста массы Бозе-звезды со временем.

Теоретическая и практическая значимость

Все результаты диссертации имеют теоретическую значимость для космологии и физики частиц в области исследований темной материи.

В результате выполнения данной работы было показано, что Бозе-звезды с ненулевым угловым моментом, состоящие из аксионов темной материи, являются нестабильными. Неустойчивость вращающихся Бозе-звезд обеспечивает универсальный механизм избавления от углового момента. Вычисленные времена жизни указывают на то, что они не могут образовываться в реалистичных сценариях формирования [18, 22, 26, 41, 42], а также не могут считаться долгоживущими квазистационарными состояниями. Это исключает сценарий [52] с вращающимися аксионными звездами, достигающими порога для взрывного параметрического радиоизлучения [30, 45, 53]. Тем не менее, излучение во время промежуточных стадий, когда плотная и короткоживущая вращающаяся конфигурация сбрасывает свой угловой момент может стать предметом отдельного изучения. Для этого необходимы дальнейшие исследования, направленные, в первую очередь, на построение и обоснование конкретного механизма ее формирования.

Применение разработанного в диссертации адиабатического подхода к росту Бозе-звезд из аксионов темной материи оказалось удивительно успешным: требование автомодельности (приближенной автомодельности) предоставило эвристический закон, объясняющий результаты численного моделирования. Однако в последствии этот метод может быть улучшен.

Метод адиабатической автомодельности, примененный к обычной негравитационной кинетике, может обобщить существующие «нетепловые аттракторы» [62–71] на системы со слегка нарушенной масштабной симметрией.

Стоит отметить, что теоретически обоснованный и проверенный закон роста для Бозе-звезд может описать распределение этих объектов в современной Вселенной (см. также [59–61]), что позволит предложить новые пути для поиска

темной материи.

Методология исследования

При выполнении диссертационной работы использовались как строгие аналитические методы, так и современные численные методы, применяемые для решения различных задач теоретической физики, теории поля и физической кинетики.

Положения, выносимые на защиту

1. Вращающиеся Бозе-звезды — гравитационно-связанные «капли» конденсата Бозе-Эйнштейна из аксионов темной материи, обладающие ненулевым угловым моментом, — нестабильны. Нестабильность наблюдается в случаях притягивающего или отсутствующего (пренебрежимо малого) короткодействующего самодействия между аксионами. При достаточно сильном отталкивающем самодействии между аксионами вращающиеся Бозе-звезды с угловым моментом, равным одному кванту, стабильны.
2. Для однородного ансамбля гравитационно-взаимодействующих аксионов уравнение Больцмана, описывающее эволюцию функции распределения частиц по энергии в приближении Ландау (парные столкновения частиц с малой передачей импульса), с учетом влияния «внешней среды» через поглощающие граничные условия в области низких энергий и действие внешнего источника частиц, допускает существование автомодельных решений, зависящих от двух параметров. Причина существования таких решений заключается в инвариантности относительно масштабных преобразований уравнения без источника и с источником, обладающим данной симметрией.
3. Эволюция системы с источником частиц, не обладающим симметрией относительно масштабных преобразований, протекает в режиме адиабатической автомодельности, при котором функция распределения частиц ансамбля по энергии является приближенно автомодельной, а параметры, характеризующие автомодельность, слабо зависят от времени.
4. Бозе-звезда, помещенная в ансамбль гравитационно-взаимодействующих аксионов темной материи, поглощает из него частицы так, что зависимость от времени функции распределения частиц ансамбля по энергии является приближенно автомодельной.

5. Приближенно автомодельное поведение для функции распределения по энергиям частиц ансамбля, окружающих Бозе-звезду, вместе с законами сохранения полного числа частиц и полной энергии позволяют определить закон роста массы Бозе-звезды со временем.

Достоверность и обоснованность результатов

Результаты диссертации опубликованы в рецензируемых международных научных журналах, а также обсуждались в рамках докладов на международных конференциях.

Апробация результатов

Результаты диссертации представлены автором лично на следующих российских и международных конференциях и семинарах:

- XXV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов–2019», Москва, 8–12 апреля 2019 года (устный доклад).
- Международная конференция «International Conference on Particle Physics and Cosmology», Ереван, Армения, 2 - 7 октября 2023 года (устный доклад).
- Международный семинар «QUARKS-2024», Переславль-Залесский, Россия, 20 мая — 24 мая 2024 года (устный доклад).
- Семинар Отдела теоретической физики Института ядерных исследований РАН, Москва, 26 января 2026 года (устный доклад).

Список публикаций

Результаты диссертации опубликованы в 3 статьях в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах Web of Science и Scopus.

- [1] A. S. Dmitriev, D. G. Levkov, A. G. Panin, E. K. Pushnaya, I. I. Tkachev. Instability of rotating Bose stars. // Physical Review D. — 2021 — Vol. 104, no. 2. — P. 023504.
- [2] A. S. Dmitriev, D. G. Levkov, A. G. Panin, and I. I. Tkachev. Self-Similar Growth of Bose Stars // Physical Review Letters — 2024 — Vol. 132, no. 9. — P. 091001.
- [3] A.S. Dmitriev, D.G. Levkov, A.G. Panin, I.I. Tkachev. Self-similar kinetics for gravitational Bose-Einstein condensation // Physical Review D. — 2025 — Vol. 112, no. 12 — P. 123533.

Личный вклад автора

Все результаты, представленные в данной диссертации, получены лично автором, либо автор внес определяющий вклад в их получение. Автор принимал прямое участие в написании текста и подготовке рисунков всех статей, которые легли в основу данной диссертации.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и двух приложений. Объем работы составляет 122 страницы и включает 32 рисунка. Список литературы содержит 150 наименований.

В главе 1 рассматриваются Бозе-звезды из аксионов темной материи с ненулевым угловым моментом. Вращающиеся Бозе-звезды вводятся в параграфе 1.2. Для случая пренебрежимо малого самодействия вычисляются их профили и определяется энергия конфигураций для различных угловых моментов. В параграфе 1.3 доказывается теорема о нестабильности вращающихся Бозе-звезд в случае малого или притягивающего самодействия. Далее, численно иллюстрируется распад звезды с $l = 1$ в параграфе 1.4. Вычисления мод неустойчивости всех вращающихся объектов производятся: численно, при умеренно малых l в параграфе 1.5 и аналитически, при $l \gg 1$ в параграфе 1.6. В параграфе 1.7 подводятся итоги главы и обсуждаются возможные обобщения результатов.

Глава 2 посвящена изучению автомодельной гравитационной кинетики процесса образования конденсата Бозе-Эйнштейна. В параграфе 2.2 вводится упрощенное кинетическое уравнение для гравитационного рассеяния и обсуждается его масштабная симметрия. Численный пример кинетической эволюции функции распределения, приближающейся к автомодельному аттрактору, приведен в параграфе 2.3. Параграф 2.4 посвящен рассмотрению стационарных степенных каскадов в гравитационной кинетике. Скейлинговые (перемасштабированные) решения изучаются в параграфе 2.5. В параграфе 2.6 описывается явление адиабатической автомодельности, и разрабатывается приближенный метод для описания такой эволюции в игрушечной модели. Параграф 2.7 содержит заключительные замечания к главе.

В главе 3 решается задача роста Бозе-звезд в ансамбле гравитационно-взаимодействующих аксионов темной материи. В параграфе 3.2 будет сделано центральное наблюдение о приближенно автомодельном поведении облака бозонов, окружающих Бозе-звезду. Это автомодельное поведение описывается

гравитационной кинетикой, подробно описанной в главе 2. В параграфе 3.3 реализуется обобщение метода разработанного в параграфе 2.6 и решается задача о росте аксионных звезд. Далее обсуждаются изменения закона роста, связанные с наличием ненулевого, но малого самодействия в параграфе 3.4.

В заключении приводятся основные результаты работы.

Численные методы и ряд аналитических вычислений вынесены в приложения. Так Приложение А посвящено деталям вычислений относящимся к Бозе-Эйнштейновскому конденсату с ненулевым угловым моментом. А Приложение Б описывает дополнительные материалы к обсуждению кинетического уравнения и поиск скейлинговых профилей.

Глава 1

Нестабильность Бозе-звезд с ненулевым угловым моментом

1.1 Введение. Бозе-звезды с ненулевым угловым моментом

Многие объекты во Вселенной могут вращаться вокруг своего центра масс и обладать угловым моментом. Однако существует уникальное вещество — Бозе-Эйнштейновский конденсат частиц в квантовом состоянии $\psi(t, \mathbf{x})$ — которое не вращается легко, а если и вращается, то делает это своим особым образом. Действительно, скорость конденсата можно сопоставить [72] с градиентом фазы, деленным на массу частицы:

$$\mathbf{v} = \nabla \arg \psi(t, \mathbf{x}) / m .$$

Этот вектор является явно безвихревым при ненулевой плотности: $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ при $\psi \neq 0$. Следовательно, единственный способ добавить вращение — это ввести вихревую линию $\psi = 0$, как на рис. 1.1. Это, в свою очередь, приведет к величии энергии. В этом случае угловой момент конденсата будет квантоваться — принимать дискретные значения, равные l . Будем называть l — число намоток.

Можно получить вращающуюся Бозе-звезду, пропустив вихрь через ее центр. Стационарный и осесимметричный анзац такого типа имеет вид [73–75]

$$\psi_{bs}(\mathbf{x}) = \psi_{bs}(\rho, z) e^{-i\omega_{bs}t + il\varphi} , \quad (1.1)$$

где (ρ, φ, z) — цилиндрические координаты, $\omega_{bs} < 0$ — энергия связи конденсированных частиц, а l — их угловой момент. Тогда полный угловой момент Бозе-звезды равен $J_z = lM_{bs}/m$, где M_{bs} — ее масса. Важно, что регулярность требует, чтобы ψ_{bs} обращался в нуль как ρ^l при $\rho \rightarrow 0$. Таким образом, ось симметрии конфигурации (1.1) действительно является вихревой линией с числом намоток l .

Решая численно обсуждаемые в разделе 1.2 связанные уравнения для ψ_{bs} и его гравитационного потенциала, мы получаем профиль вращающейся Бозе-звезды. Он имеет характерную тороидальную форму, см. рис. 1.2 и см. [74, 75].

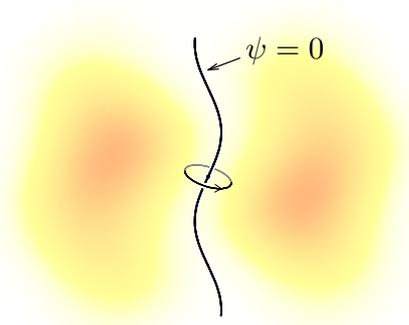


Рис. 1.1: (Не в масштабе) Бозе-Эйнштейновский конденсат (затененная область), вращающийся вокруг вихревой линии $\psi = 0$ (сплошная линия).

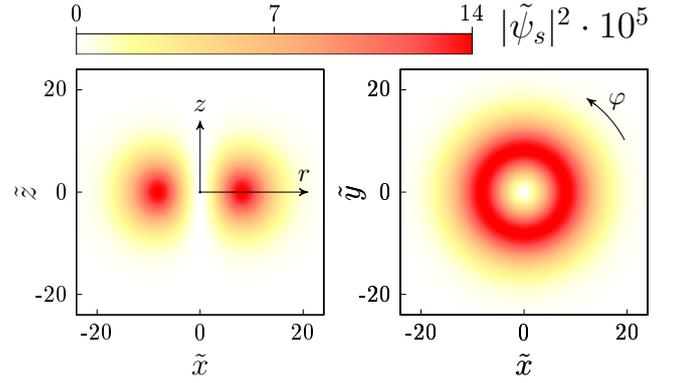


Рис. 1.2: Бозе-звезда (1.1), вращающаяся с $l = 1$ вокруг оси z . Эта конфигурация получена численно в случае пренебрежимо малого самодействия частиц, $\lambda = 0$. Левая и правая панели показывают сечения $y = 0$ и $z = 0$ профиля плотности $|\psi_{bs}(\mathbf{x})|^2$ соответственно. Тильды над буквами обозначают безразмерные единицы (будут введены далее).

Отметим, что ни одно из существующих численных моделирований, в которых формируются Бозе-звезды из аксионов темной материи, не показывает образование вращающихся объектов (1.1) из общих начальных данных, даже если с самого начала была задана сильная сферическая асимметрия. Кроме того, сгустки комплексного скалярного поля с сохраняющимся $U(1)$ зарядом, связанные гравитацией, развивают осесимметричные неустойчивости, что было показано численно [76–78].

Все это свидетельствует в пользу того, что вращающиеся нерелятивистские Бозе-звезды неустойчивы. Однако, существует мнение, что некоторые из наблюдаемых численных неустойчивостей могли быть искусственно вызваны декартовыми решетками, нарушающими осевую симметрию.

1.2 Вращающиеся Бозе-звезды

Система самогравитирующих нерелятивистских бозонов описывается при больших числах заполнения коллективной волновой функцией $\psi(t, \mathbf{x})$ и

гравитационным потенциалом $U(t, \mathbf{x})$, подчиняющиеся уравнениям Гросса-Питаевского и Пуассона,

$$i\partial_t\psi = -\frac{\Delta\psi}{2m} + \left(mU + \frac{\lambda|\psi|^2}{8m^2}\right)\psi, \quad (1.2)$$

$$\Delta U = 4\pi mG|\psi|^2, \quad (1.3)$$

где дополнительный потенциал $\lambda|\psi|^2/8m^2$ представляет контактное самодействие бозонов с параметром¹ λ . В этой главе, мы рассмотрим все три случая отталкивающего, притягивающего и пренебрежимо малого самодействия: $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ и $\lambda = 0$. Последние два особенно интересны, так как они справедливы для популярных моделей темной материи с КХД аксионами [4] и ультралегкими (fuzzy) аксионоподобными частицами [18, 79].

Можно определить вращающуюся Бозе-звезду как стационарное и осесимметричное решение (1.1) системы (1.2), (1.3). Это означает, что его волновая функция $\psi_{bs}(\rho, z)$ подчиняется стационарному уравнению Шредингера

$$\omega_{bs}\psi_{bs} = -\frac{\Delta\psi_{bs}}{2m} + \left(mU_{bs} + \frac{\lambda|\psi_{bs}|^2}{8m^2}\right)\psi_{bs}, \quad (1.4)$$

в то время как $U = U_{bs}(\rho, z)$ удовлетворяет ур. (1.3). Здесь и далее, мы обозначаем все величины Бозе-звезды индексом bs и имеем в виду, что осесимметричный лапласиан $\Delta\psi_{bs} \equiv \partial_z^2\psi_{bs} + \rho^{-1}\partial_\rho(\rho\partial_\rho\psi_{bs}) - l^2\psi_{bs}/\rho^2$ включает в себя центробежный барьер в последнем члене. Очевидно, ур. (1.4) описывает нерелятивистские частицы, занимающие единственный уровень потенциальной ямы $mU_{bs} + \lambda|\psi_{bs}|^2/8m^2$, которая ими и создана. Все они имеют энергию ω_{bs} и угловой момент l .

Заметим, что m и G исчезают из всех уравнений после преобразований координат и полей с произвольным параметром v_0 : $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}/mv_0$, $t = \tilde{t}/mv_0^2$ или $\omega_{bs} = mv_0^2\tilde{\omega}_{bs}$, $\psi = v_0^2(m/G)^{1/2}\tilde{\psi}$, и $U = v_0^2\tilde{U}$. В этой главе численные вычисления выполняются в этих безразмерных единицах, выбирая $v_0 = mGM$, чтобы сделать полную приведенную массу равной единице: $\tilde{M} = 1$. Это оставляет только одну константу в уравнениях: приведенный параметр самодействия $\tilde{\lambda} = \lambda GM^2$, заменяющий λ .

Решая ур. (1.3), (1.4), получаем Бозе-звезды при разных l и $\tilde{\lambda}$; мы будем постепенно вводить соответствующие численные и аналитические методы

¹Входит как $\lambda a^4/4!$ в скалярный потенциал релятивистского поля $a(t, \mathbf{x})$.

l	$\tilde{E}_{bs} \cdot 10^3$	l	$\tilde{E}_{bs} \cdot 10^3$	l	$\tilde{E}_{bs} \cdot 10^3$
0	-54.2	1	-19.0	2	-10.3
3	-6.57	4	-4.64	5	-3.49
6	-2.74	7	-2.24	10	-1.34
15	-0.736	$\gg 1$	$\tilde{E}_{bs} \approx -\alpha_l(\alpha_l + 1)/(8\pi^2 l^2)$		

Таблица 1.1: Энергии вращающихся Бозе-звезд при разных l в случае $\lambda = 0$; физические единицы могут быть восстановлены с помощью ур. (1.8). Данные при $l \leq 15$ получены численно, тогда как последний пункт приводит асимптотику при больших l из параграфа 1.5. Параметры α_l подчиняются ур. (1.45).

в параграфах 1.4–1.6. Отметим также, что все вращающиеся ($l \geq 1$) объекты имеют характерные тороидальные формы, как тот что на рисунке 1.2 с $l = 1$ и $\lambda = 0$.

Чтобы исследовать (не)устойчивость этих звезд, нам нужен другой вид анализа. Важно, что нерелятивистская эволюция (1.2), (1.3) сохраняет ряд величин: полную массу M и число частиц N бозонов,

$$M \equiv mN = m \int d^3 \mathbf{x} |\psi|^2, \quad (1.5)$$

их энергию

$$E = \int d^3 \mathbf{x} \left[\frac{|\nabla \psi|^2}{2m} + \frac{m}{2} U |\psi|^2 + \frac{\lambda |\psi|^4}{16m^2} \right], \quad (1.6)$$

и компоненты полного углового момента, например,

$$J_z = -i \int d^3 \mathbf{x} \psi^* \partial_\varphi \psi, \quad (1.7)$$

где $\varphi = \arctan(y/x)$ — угловая цилиндрическая координата. Значения этих интегралов характеризуют Бозе-звезды. Например, звезда с $l = 1$ на рис. 1.2 имеет $\tilde{E}_{bs} \approx -0.019$ или, в физических единицах,

$$E_{bs} = \tilde{E}_{bs} m^2 G^2 M_{bs}^3. \quad (1.8)$$

Энергии некоторых Бозе-звезд при $\lambda = 0$ перечислены в Таблице 1.1. Их полные угловые моменты пропорциональны массам: $J_{z,s} = l M_{bs}/m$, см. ур. (1.1) и (1.7).

Заметим, что Бозе-звезды, вращающиеся или нет, экстремизируют полную энергию E при заданной массе $M = M_{bs}$. Другими словами, они являются

экстремумами функционала $\mathcal{F} \equiv E - \omega_{bs}N$, где множитель Лагранжа ω_{bs} фиксирует $N = M/m$. Чтобы показать это явно, мы переписываем энергию (1.6) в виде

$$E = \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{|\nabla\psi|^2}{2m} + (mU + \lambda u) |\psi|^2 + \frac{(\nabla U)^2}{8\pi G} - 4\lambda m^2 u^2 \right], \quad (1.9)$$

включая гравитационный и самодействующий потенциалы $U(\mathbf{x})$ и $u(\mathbf{x})$. Как только это будет сделано, функционал \mathcal{F} достигает экстремума при $U = U_{bs}$ и $u = u_{bs}$, которые удовлетворяют

$$\Delta U = 4\pi Gm|\psi|^2 \quad \text{и} \quad u = |\psi|^2/8m^2. \quad (1.10)$$

Можно подставить это решение обратно в ур. (1.9) и восстановить старое выражение для энергии (1.6). Дальнейшая вариация \mathcal{F} по $\psi^*(\mathbf{x})$ дает уравнение Гросса-Питаевского (1.4), которое вместе с ур. (1.10) формирует ту же стационарную систему для профиля Бозе-звезды, что и раньше. Таким образом, вращающиеся Бозе-звезды действительно являются экстремумами \mathcal{F} , с заданными l и M_{bs} .

Вопрос в том, являются ли эти объекты локальными минимумами энергии при фиксированной массе M_{bs} и полным угловым моментом $J_{z,s}$. В следующем разделе мы покажем, что при $l \geq 1$ и $\lambda \leq 0$ они таковыми не являются. Скорее, они являются седловыми точками энергии, которые могут быть разрушены сколь угодно малым возмущением, растущим экспоненциально со временем.

Стоит отметить, что приведенный аргумент отождествляет ω_{bs} с энергией связи частиц внутри Бозе-звезды, см. ур. (1.1). Действительно, бесконечно малое число дополнительных частиц изменяет энергию E_{bs} и число N_{bs} бозонов, но не значение \mathcal{F} , которое экстремально. Таким образом,

$$dE_{bs} = \omega_{bs}dN_{bs}, \quad (1.11)$$

т.е. каждая новая частица приходит с энергией ω_{bs} . При $\lambda = 0$ это последнее соотношение можно объединить с ур. (1.8), чтобы получить

$$\omega_{bs} = 3\tilde{E}_{bs} m^3 G^2 M_{bs}^2 = 3mE_{bs}/M_{bs}, \quad (1.12)$$

что полезно для численных проверок.

1.3 Запрещающая теорема при $\lambda \leq 0$

Докажем, что вращающиеся Бозе-звезды (1.1) неустойчивы при $l \neq 0$, если самодействие их частиц пренебрежимо мало или притягивающее, $\lambda \leq 0$. Эти случаи особые, потому что при $\lambda \leq 0$ новый энергетический функционал (1.9) достигает *минимума* по отношению к U и u , определенные ур. (1.10). Таким образом, мы можем рассматривать общие независимые вариации $\psi(\mathbf{x})$, $U(\mathbf{x})$ и $u(\mathbf{x})$. Будет доказано, что Бозе-звезда неустойчива, если одна из таких вариаций уменьшает энергию (1.9), поскольку физическая вариация с теми же $\delta\psi$ и δU , δu , описываемые ур. (1.10), уменьшает энергию еще сильнее.

Мы вводим вспомогательный инструмент: набор волновых функций $\Psi_L(\mathbf{x}) \propto e^{iL\varphi}$ с угловыми моментами L , удовлетворяющих уравнению Шредингера в потенциале Бозе-звезды (1.10),

$$\omega_L \Psi_L = -\frac{\Delta \Psi_L}{2m} + (mU_{bs} + \lambda u_{bs}) \Psi_L . \quad (1.13)$$

Для каждого L мы выбираем собственную функцию с минимальным ω_L ² и нормируем ее на единицу: $\int d^3\mathbf{x} |\Psi_L|^2 = 1$.

Примечательно, что Ψ_L не являются модами колебаний Бозе-звезды: последние включают связанные возмущения ψ , U и u . Но ур. (1.13) привносит простую квантовомеханическую логику, которая будет полезна в дальнейшем. Во-первых, при $L = l$ оно совпадает с уравнением (1.4) для профиля конденсата. Таким образом, $\omega_l \geq \omega_{bs}$, где строгое неравенство соответствует случаю радиально возбужденного конденсата. Во-вторых, и как следствие первого, собственные значения ω_L при $L < l$ ниже, чем ω_{bs} (в радиально не возбужденном состоянии), потому что они имеют более слабые центробежные барьеры $L^2/2m\rho^2$. В частности, ур. (1.13) с $L = l$ и $L = 0$ дают,

$$\omega_l - \omega_0 \geq \omega_{bs} - \omega_0 \geq \int d^3\mathbf{x} \frac{l^2 |\Psi_l|^2}{2mr^2} > 0 , \quad (1.14)$$

где ω_0 является минимальным собственным значением радиального гамильтониана, т.е. оператора в ур. (1.13) без производных по φ . В-третьих, в пределе $L \rightarrow \infty$ собственные функции Ψ_L становятся большими по размеру и поэтому взаимодействуют с асимптотикой при больших \mathbf{x} потенциала $U_{bs} \rightarrow$

²Собственное значение $\omega_L < 0$

$-GM/|\mathbf{x}|$, но не с его короткодействующей частью u_{bs} . Соответствующие собственные значения напоминают собственные значения для атома водорода: $\omega_L \approx -m^3 G^2 M^2 (L+1)^{-2}/2 \sim O(L^{-2})$ при $L \gg 1$.

Теперь давайте явно построим бесконечно малое возмущение, которое уменьшает энергию (1.9) исходной конфигурации Бозе-звезды $\{\psi'_{bs}, U'_{bs}, u'_{bs}\}$ с числом частиц N'_{bs} и угловым моментом $l \geq 1$. Во-первых, мы извлекаем dN_{bs} частиц из конденсата, получая таким образом звезду $\{\psi_{bs}, U_{bs}, u_{bs}\}$ с $N_{bs} = N'_{bs} - dN_{bs}$ частицами и тем же угловым моментом. Во-вторых, мы добавляем обратно dN_0 частиц в невращающееся состояние Ψ_0 и dN_L частиц в состояние Ψ_L с $L \gg 1$. Этот процесс не изменяет полную массу и полный угловой момент, если

$$dN_{bs} = dN_0 + dN_L \quad \text{и} \quad l dN_{bs} = L dN_L . \quad (1.15)$$

Физически такое изменение соответствует одновременному переходу dN_{bs} частиц конденсата из состояния с угловым моментом l в состояния $L = 0$ и $L \gg 1$.

На уровне конфигураций мы бесконечно мало деформируем U'_{bs}, u'_{bs} в потенциалы U_{bs}, u_{bs} Бозе-звезды меньшей массы и изменяем

$$\psi'_{bs} \rightarrow \psi = \psi_{bs}(\mathbf{x}) + dN_0^{1/2} \Psi_0(\mathbf{x}) + dN_L^{1/2} \Psi_L(\mathbf{x}) . \quad (1.16)$$

Подставляя ур. (1.16) в выражение (1.9), мы получаем энергию $E_f \equiv E[\psi, U_{bs}, u_{bs}]$ этого конечного состояния:

$$E_f = E_{bs} + \omega_0 dN_0 + \omega_L dN_L , \quad (1.17)$$

где E_{bs} — энергия Бозе-звезды с N_{bs} частицами, и мы использовали ур. (1.13) для Ψ_0 и Ψ_L . Перекрестные члены между ψ_{bs}, Ψ_0 и Ψ_L исчезают из-за разной зависимости от φ : вспомним, что $\psi_l \propto e^{il\varphi}$ и $\Psi_L \propto e^{iL\varphi}$, тогда как Ψ_0, U_{bs} и u_{bs} не зависят от φ .

С другой стороны, мы начали с Бозе-звезды с $N_{bs} + dN_{bs}$ частицами и энергией

$$E'_{bs} = E_{bs} + \omega_{bs} dN_{bs} + O(dN_{bs}^2) , \quad (1.18)$$

см. ур. (1.11). Таким образом, изменение энергии в вышеуказанном переходе равно

$$E_f - E'_{bs} = (\omega_0 - \omega_{bs}) dN_{bs} + O(L^{-1}) dN_{bs} < 0 , \quad (1.19)$$

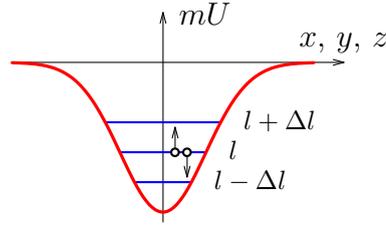


Рис. 1.3: (Не в масштабе) Неустойчивость вращающейся Бозе-звезды.

где dN_0 и dN_L выражены из ур. (1.15) и мы вспомнили, что $\omega_L = O(L^{-2})$. Последнее неравенство следует из ур. (1.14). Мы заключаем, что изменение (1.16) действительно уменьшает энергию вращающейся Бозе-звезды.

Приведенный аргумент доказывает, что все вращающиеся Бозе-звезды неустойчивы при $\lambda \leq 0$ и произвольных $l \geq 1$. Он также качественно описывает механизм неустойчивости. А именно, энергия вращающейся Бозе-звезды уменьшается, если некоторые частицы совершают переходы в невращающиеся состояния и отдают свои угловые моменты другим частицам, уходящим на периферию системы. Предположительное конечное состояние этого процесса — конфигурация типа Сатурна: одна или несколько Бозе-звезд с нулевым полным угловым моментом, окруженные вращающимся облаком диффузных частиц.

Отметим, что до сих пор мы рассматривали явный, но очень неоптимальный способ уменьшения энергии Бозе-звезды. В частности, мы добровольно деформировали потенциалы U_{bs} , u_{bs} и зафиксировали угловые моменты конечных состояний частиц. Мы увидим ниже, что самые быстрорастущие моды представляют парные переходы конденсированных бозонов в состояния с угловыми моментами $l \pm \Delta l$, см. рис. 1.3.

1.4 Распад Бозе-звезды с $l = 1$

Теперь мы явно визуализируем неустойчивость Бозе-звезды с $l = 1$ в модели с $\lambda = 0$. Мы вводим периодическую пространственную решетку $\{x_n, y_m, z_k\} = \{n\delta, m\delta, k\delta\}$, где δ — расстояние между узлами решетки, и полями $\psi_{n,m,k} \equiv \psi(x_n, y_m, z_k)$, $U_{n,m,k}$, принимающими значения на ее узлах. Поскольку решетка нарушает вращательную симметрию, мы будем особо осторожны в отделении эффектов дискретизации от физических вращательных неустойчивостей.

Заметим, что наша кубическая решетка инвариантна относительно враще-

ний на $\pi/2$ вокруг оси z , т.е. можно ввести оператор $\hat{R}_{\pi/2}$ который отображает узлы решетки (x_n, y_m) в $(-y_m, x_n)$, оставляя z_k неизменным. С технической точки зрения это означает, что гамильтониан в ур. (1.2), (1.3) коммутирует с $\hat{R}_{\pi/2}$ даже после дискретизации. С другой стороны, конфигурации с фиксированным l (1.1) являются собственными значениями этого оператора,

$$\hat{R}_{\pi/2} \psi_{n,m,k} \equiv \psi_{-m,n,k} = e^{i\pi l/2} \psi_{n,m,k}. \quad (1.20)$$

Таким образом, мы определяем решеточную версию Бозе-звезды с $l = 1$ как конфигурацию с минимальной энергией, удовлетворяющую ур. (1.20) с собственным значением $e^{i\pi/2}$. Такая конфигурация легко производится процедурой евклидовой релаксации, изложенной в Приложении А.1. В конце релаксации дискретизированные уравнения (1.3), (1.4) решаются почти точно, с точностью до пренебрежимо малых ошибок округления. Решение показано на рис. 1.2.

Стоит отметить, что Бозе-звезды с $l = 1 + 4k$ имеют то же собственное значение в ур. (1.20) и не могут быть отделены от звезды с $l = 1$ на этой основе. Но их центробежные барьеры существенно сильнее; следовательно, минимизация энергии все же выбирает конфигурацию с $l = 1$. Напротив, Бозе-звезды с $l = 0$ и $l = -1$ имеют те же или меньшие энергии, но они исключены ур. (1.20).

Как только Бозе-звезда $\psi = \psi_{bs}(\mathbf{x})$ с $l = 1$ найдена, мы возмущаем ее, добавляя асимметричное возмущение,

$$\psi = \psi_{bs}(\mathbf{x}) + A e^{-(\rho/\rho_1)^2} \left[\frac{\rho}{\rho_1} \cos \varphi + \frac{\rho^2}{\rho_1^2} \cos 2\varphi \right], \quad (1.21)$$

где $\tilde{\rho}_1 = 10$, а амплитуда $\tilde{A} = 10^{-8}$ очень мала. Затем, эволюционируя ур. (1.2) и (1.3), мы наблюдаем, как звезда распадается. Численный метод для этого описан в Приложении А.1.

Результат показан на рис. 1.4, см. также видео [80](а). Бозе-звезда сначала остается стационарной и тороидальной. Но затем она разделяется на два сферических объекта, вращающихся вокруг общего центра масс. Со временем один из объектов сохраняется, а другой подвергается приливному разрушению. Конечная конфигурация включает невращающуюся Бозе-звезду, окруженную облаком диффузных частиц.

Подчеркнем, что Бозе-звезда с $l = 1$ разрушается возмущением (1.21), растущим экспоненциально на ее фоне, а не чем-либо другим. Без этого толчка и ошибок округления она оставалась бы стационарной, так как ее энергия минимальна в секторе с фиксированным $\hat{R}_{\pi/2}$, который коммутирует с временной

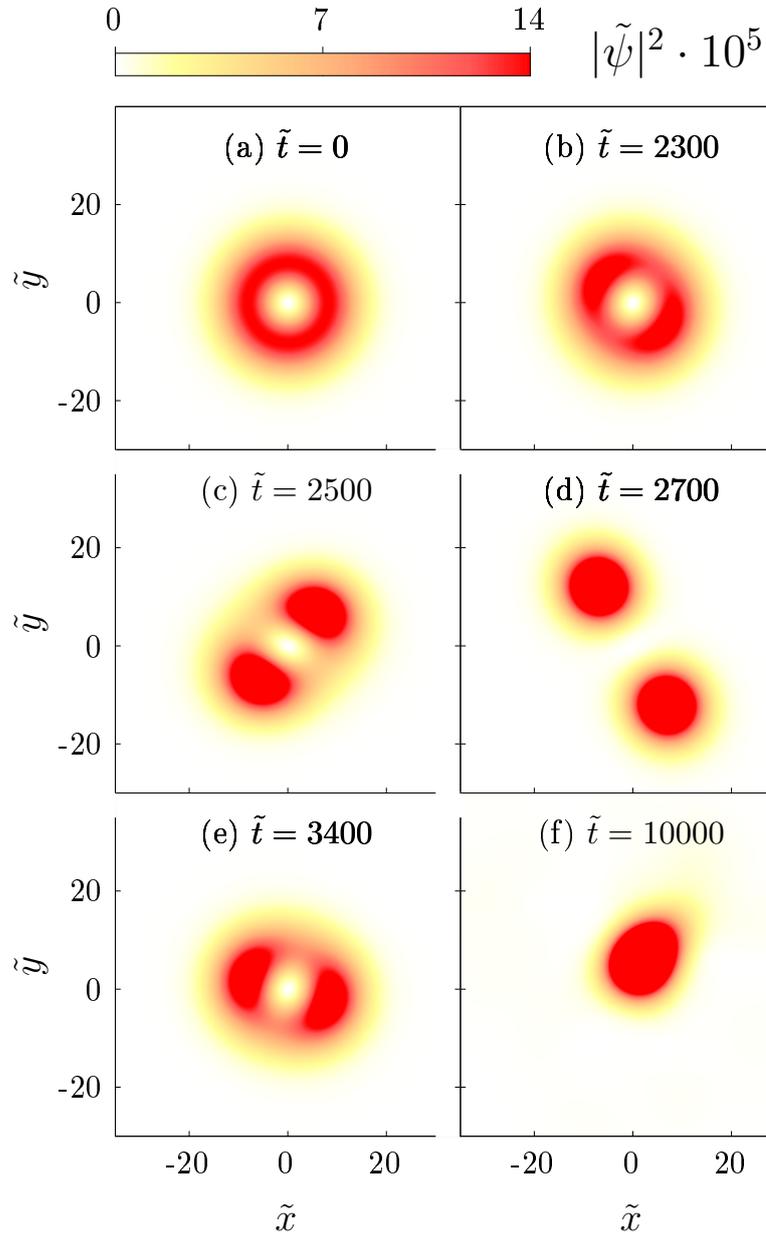


Рис. 1.4: Численная эволюция Бозе-звезды с $l = 1$ в случае чисто гравитационных взаимодействий $\lambda = 0$, см. [80](a) для соответствующего видео. Кадры (a)–(f) показывают горизонтальные ($z = 0$) сечения плотности $|\psi|^2$ в разные моменты времени. Единицы измерения указаны в основном тексте.

эволюцией. Было проверено, что при $A = 0$ вращающаяся звезда распадается на гораздо больших временных масштабах, поскольку начальные возмущения в этом случае обеспечиваются ошибками округления.

Чтобы количественно оценить растущие неустойчивости, мы вычитаем исходную Бозе-звезду из численного решения $\psi(t, \mathbf{x})$ и затем разделяем остаток на четыре части, принадлежащие секторам с разными собственными значениями

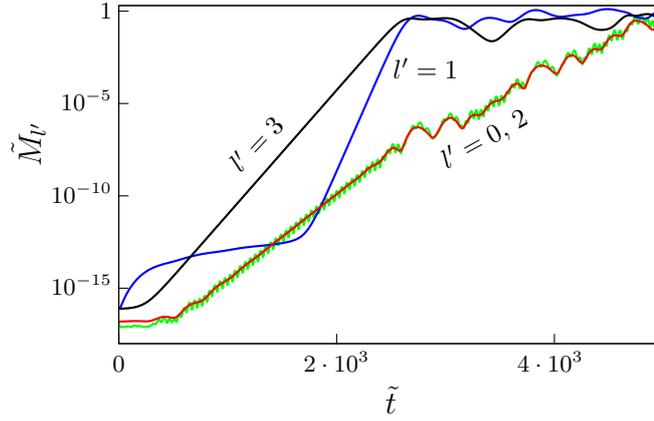


Рис. 1.5: Нормы $M_{l'}(t)$ мод неустойчивости, растущих экспоненциально на фоне Бозе-звезды с $l = 1$. Тильды обозначают безразмерные единицы; $\lambda = 0$.

ями вращений на $\pi/2$:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \psi_{bs}(\mathbf{x}) e^{-i\omega_{bs}t} + \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \psi_3. \quad (1.22)$$

Здесь $\psi_{l'}(t, \mathbf{x})$ удовлетворяют $\hat{R}_{\pi/2}\psi_{l'} = e^{i\pi l'/2}\psi_{l'}$ в каждый момент времени t . Грубо говоря, они имеют угловые моменты $l' = 0 \div 3$, хотя вклады с более высокими l' также возможны. В Приложении А.1 мы конструируем явный проектор для разложения (1.22).

Нормы $M_{l'}(t) \equiv m \int d^3\mathbf{x} |\psi_{l'}|^2$ возмущений $\psi_{l'}$ построены на рис. 1.5. Графики с $l' = 0, 2, 3$ растут экспоненциально, указывая, что их моды пропорциональны

$$\delta\psi \propto e^{\mu t} \quad (1.23)$$

на отрезке $\tilde{t} \lesssim 2500$. Где μ — комплексный показатель, а $(\text{Re } \mu)^{-1}$ — время жизни вращающейся конфигурации (1.1). Переход от физических единиц для комплексного показателя роста мод неустойчивости имеет вид,

$$\mu = \tilde{\mu} m^3 G^2 M_{bs}^2, \quad (1.24)$$

где $\tilde{\mu}$ безразмерный параметр.

Возмущение с $l' = 3$ является доминирующим: оно растет быстрее и первым становится нелинейным. Аппроксимируя его зависимость от времени экспоненциальной, мы получаем $\text{Re } \tilde{\mu}_3 \approx 7.74 \cdot 10^{-3}$ в согласии со значением в Таблице 1.2, которое получено осесимметричным методом следующего параграфа. Соответствующий перенос углового момента равен $\Delta l \equiv |l' - l| = 2$ по модулю 4.

Зависимости от времени для субдоминантных мод, изображенные на рис. 1.5 нуждаются в двух замечаниях. Во-первых, нормы ψ_0 и ψ_2 сравнимы во все времена, и $\mu_0 = \mu_2$. Мы увидим ниже, что эти возмущения удовлетворяют связанным линейным уравнениям и, следовательно, описывают одну и ту же неустойчивость с $\Delta l = |l' - l| = 1$. Во-вторых, график с $l' = 1$ остается ограниченным сначала и затем начинает расти с показателем $\text{Re } \mu_1 \approx 2\text{Re } \mu_3$. Это происходит потому, что соответствующее возмущение принадлежит тому же сектору $l = 1$, что и сама Бозе-звезда, и не растет на линейном уровне. Однако в более поздние времена доминирующая мода ψ_3 становится большой, так что $\psi_1 \propto |\psi_3|^2$ через нелинейные члены в уравнениях.

Поскольку доминирующая неустойчивость звезды с $l = 1$ развивается с $\Delta l = |l' - l| = 2$, соответствующее возмущение плотности имеет максимумы при двух углах: $|\psi_{bs} e^{i\varphi} + \psi_3|^2 - |\psi_{bs}|^2 \propto \cos(2\varphi + \text{const})$. Вот почему фоновая звезда разделяется на две части на рис. 1.4(с). Последующая нелинейная эволюция на рис. 1.5(d)-(f) является сложной, потому что исходная звезда с $l = 1$ имеет меньшую энергию, чем два изолированных невращающихся объекта с массами $M_{bs}/2$, см. ур. (1.8) и Таблицу 1.1. Как следствие, две звезды половинной массы остаются связанными друг с другом до тех пор, пока возмущения ψ_0 и ψ_2 также не вырастут до нелинейности. Как только это происходит, связанное состояние разрывается, и формируется конечный невращающийся объект, см. рис. 1.4(f).

1.5 Линейные неустойчивости при произвольных l

1.5.1 Отсутствие самодействия

Численный метод параграфа 1.4 хорошо применим для визуализации неустойчивости Бозе-звезды с $l = 1$, но он не применим при больших угловых моментах. Действительно, быстро вращающиеся Бозе-звезды не могут быть отделены от своих собратьев с меньшими l с помощью вращений на $\pi/2$ и минимизации энергии. Но, тем не менее, мы хотим вычислить их моды неустойчивости и комплексные показатели μ . Мы начинаем со случая нулевого самодействия, $\lambda = 0$.

Мы вычисляем стационарные профили $\psi_{bs}(\rho, z)$, $U_{bs}(\rho, z)$ звезд с большими l , решая осесимметричную систему (1.2), (1.3). Для этого мы чередуем шаги евклидовой эволюции для поля ψ с последовательной релаксацией (SOR) для

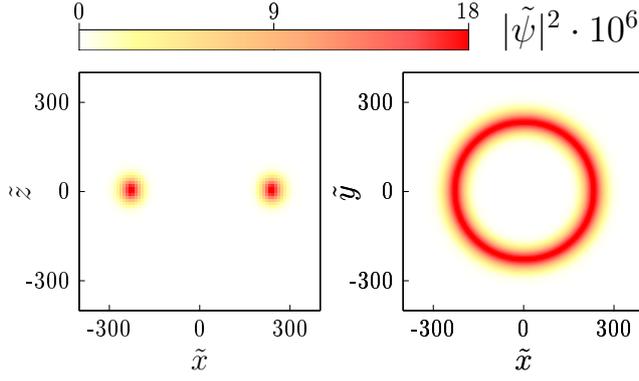


Рис. 1.6: Вращающаяся Бозе-звезда с $l = 10$ и $\lambda = 0$. Используются безразмерные единицы параграфа 1.2.

гравитационного потенциала U , см. Приложение А.2 для деталей. Численная процедура сходится к конфигурациям с минимальной энергией при заданном l — вращающимся Бозе-звездам. На практике мы используем ее при умеренно больших $l = 1 \div 15$. Все полученные решения³ имеют характерные тороидальные формы, см. рис. 1.6.

Энергии Бозе-звезд с разными l перечислены в Таблице 1.1 и визуализированы на рис. 1.7 (точки). При больших l они приближаются к аналитическому выражению (линия), которое будет выведено в следующем параграфе.

Далее мы возмущаем Бозе-звезды, чтобы исследовать их устойчивость. Общее возмущение ψ имеет произвольную зависимость от φ и поэтому включает моды с произвольными угловыми моментами l' . Можно видеть, однако, что на линейном уровне моды с $l' = l + \Delta l$ и $l' = l - \Delta l$ связаны друг с другом, но не с другими модами. Таким образом, каждую такую пару можно рассматривать

³Конечно, профиль и параметры Бозе-звезды с $l = 1$ совпадают с вычисленными в параграфе 1.4.

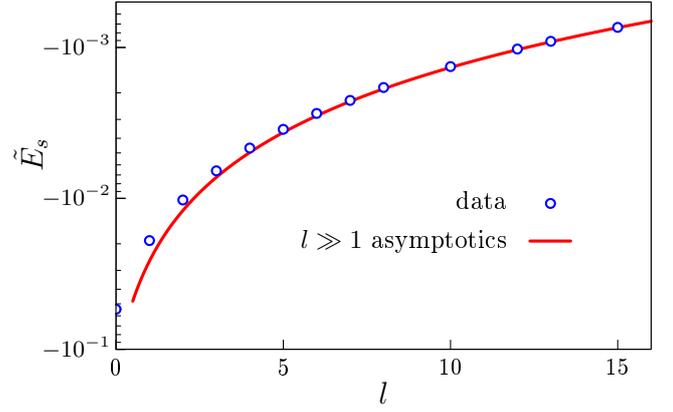


Рис. 1.7: Энергии \tilde{E}_{bs} вращающихся Бозе-звезд при нулевом самодействии бозонов $\lambda = 0$; безразмерные единицы введены в ур. (1.8). Точки представляют численные данные параграфа 1.5, а сплошная линия — аналитический результат для больших l из параграфа 1.6.

независимо, и мы пишем:

$$\begin{aligned}\psi &= [\psi_{bs}(\rho, z) + \delta\psi e^{i\Delta l\varphi} + \delta\bar{\psi}^* e^{-i\Delta l\varphi}] e^{-i\omega_{bs}t + il\varphi}, \\ U &= U_{bs}(\rho, z) + \delta U e^{i\Delta l\varphi} + \delta U^* e^{-i\Delta l\varphi},\end{aligned}\quad (1.25)$$

где $\delta\psi$, $\delta\bar{\psi}$ и δU зависят только от ρ , z и t .

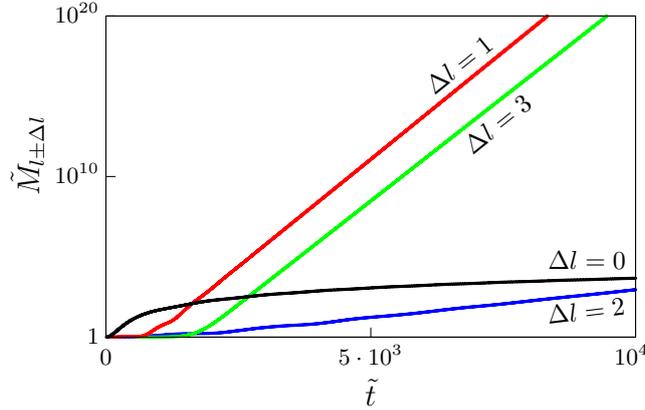


Рис. 1.8: Нормы $M_{l\pm\Delta l}$ (логарифмическая шкала) линейных возмущений, эволюционирующих со временем на фоне Бозе-звезды с $l = 2$ при $\lambda = 0$.

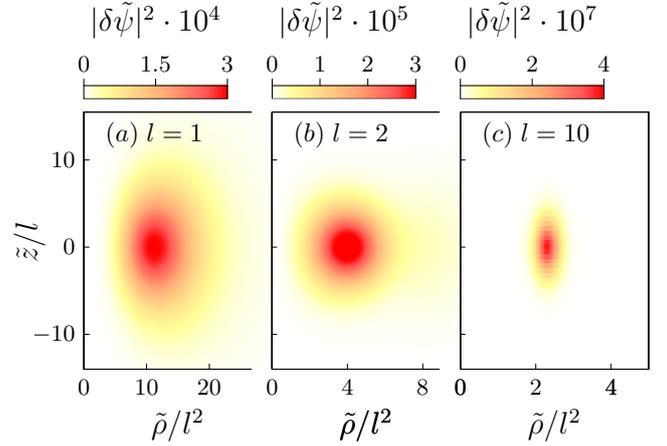


Рис. 1.9: Доминирующие моды неустойчивости $\delta\psi(\rho, z)$ вращающихся Бозе-звезд при: (a) $l = 1$, $\Delta l = 2$; (b) $l = 2$, $\Delta l = 1$; и (c) $l = 10$, $\Delta l = 6$. Рассматривается модель с $\lambda = 0$.

Подставляя ур. (1.25) в систему Шредингера-Пуассона (1.2), (1.3), мы приходим к уравнениям,

$$\begin{aligned}(\omega_{bs} + i\partial_t)\delta\psi &= -\Delta_{\rho,z}\delta\psi/2m + m\psi_{bs}\delta U + [(l + \Delta l)^2/(2m\rho^2) + mU_{bs}] \delta\psi, \\ (\omega_{bs} - i\partial_t)\delta\bar{\psi} &= -\Delta_{\rho,z}\delta\bar{\psi}/2m + m\psi_{bs}^*\delta U + [(l - \Delta l)^2/(2m\rho^2) + mU_{bs}] \delta\bar{\psi},\end{aligned}\quad (1.26)$$

$$\Delta_{\rho,z}\delta U - \Delta l^2\delta U/\rho^2 = 4\pi Gm (\psi_{bs}^*\delta\psi + \psi_{bs}\delta\bar{\psi}),$$

где нелинейные члены по $\delta\psi$, $\delta\bar{\psi}$, δU опущены, и $\Delta_{\rho,z} \equiv \partial_\rho^2 + \rho^{-1}\partial_\rho + \partial_z^2$ — это радиальная часть лапласиана. Последнее уравнение системы ур. (1.26) включает как $\delta\psi$, так и $\delta\bar{\psi}$, так что они действительно не независимы. Эта особенность объясняет, в частности, почему моды с $l' = 0$ и 2 растут с одинаковым показателем на рис. 1.5.

Чтобы извлечь экспоненциально растущие моды неустойчивости

$$\delta\psi, \delta\bar{\psi}, \delta U \propto e^{\mu t} \quad \text{с} \quad \text{Re } \mu > 0, \quad (1.27)$$

l	Δl	$\text{Re } \tilde{\mu} \cdot 10^3$	$\text{Im } \tilde{\mu} \cdot 10^3$	l	Δl	$\text{Re } \tilde{\mu} \cdot 10^3$	$\text{Im } \tilde{\mu} \cdot 10^3$
1	2	7.73	-16.2	2	1	3.05	-9.64
3	3	2.42	-6.82	5	4	1.41	-3.45
7	5	0.91	-2.12	10	6	0.55	-1.13
15	8	0.29	-0.58	$\gg 1$	ур. (1.42)-(1.43)		

Таблица 1.2: Параметры доминирующих неустойчивостей во вращающихся Бозе-звездах с разными l : переносы углового момента Δl и комплексные показатели роста μ , см. ур. (1.23), (1.24). Рассматривается случай чисто гравитационных взаимодействий ($\lambda = 0$).

мы эволюционируем осесимметричные уравнения (1.26) в действительном времени t , используя численный метод из Приложения А.2. Нормы $M_{l\pm\Delta l}(t) \equiv m \int d^3x |\delta\psi|^2$ возмущений на фоне звезды с $l = 2$ показаны на рис. 1.8. Они действительно растут экспоненциально⁴, как и предсказывалось нашей запрещающей теоремой.

На практике удобнее держать возмущения ограниченными. Для этого мы умножаем $\delta\psi$, $\delta\bar{\psi}$ и δU на некоторый комплексный фактор $\Delta\mathcal{N}$ после каждого шага по времени. Результирующее перенормированное решение приближается к профилю самой быстрорастущей моды неустойчивости при больших t , в то время как соответствующий показатель роста равен $\mu = \Delta t^{-1} \ln \Delta\mathcal{N}$.

На рис. 1.9 мы демонстрируем доминирующие моды неустойчивости Бозе-звезд с $l = 1, 2$, и 10 . Как и фоновые звезды, они имеют тороидальные формы. Показатели μ и переносы углового момента Δl этих возмущений перечислены в Таблице 1.2 и показаны на рис. 1.10, 1.11; см. также ур. (1.24). Эти данные воспроизводят результат трехмерного моделирования при $l = 1$ и приближаются к аналитическим выражениям следующего параграфа (сплошная линия) при $l \gg 1$.

1.5.2 Самодействующий конденсат

Используя процедуру параграфа 1.5.1, мы вычисляем Бозе-звезды при различных ненулевых λ . Но на этот раз мы ограничиваемся случаем $l = 1$. А именно, восстанавливая последний член в ур. (1.2), мы чередуем шаги евкли-

⁴Показатели графиков с $\Delta l = 1$ и 3 видимо близки, хотя тот, что с $\Delta l = 1$ растет быстрее. Эта близкая вырожденность является особенностью Бозе-звезды с $l = 2$.

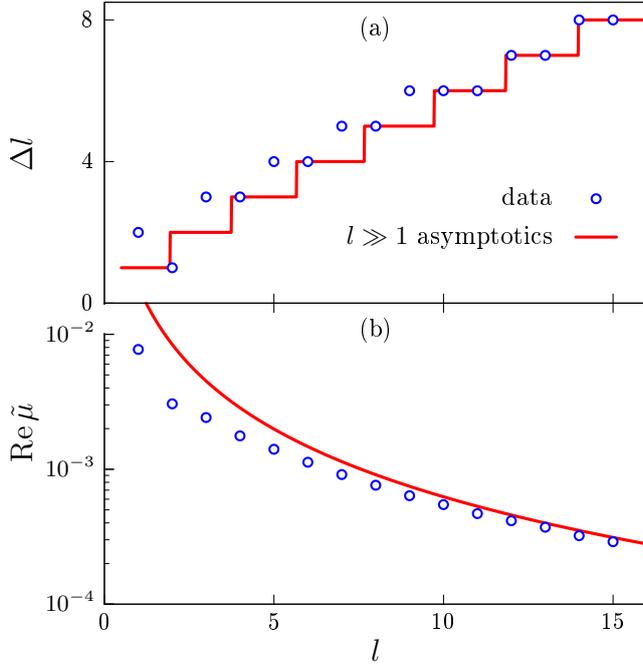


Рис. 1.10: Параметры доминирующих мод неустойчивости на фоне Бозе-звезд с разными l : (a) переносы углового момента Δl и (b) показатели роста $\text{Re } \mu$ в единицах ур. (1.24). Мы рассматриваем пренебрежимо малое самодействие частиц, $\lambda = 0$. Численные данные (кружки) быстро приближаются к асимптотикам при больших l (1.42),(1.44) (линии).

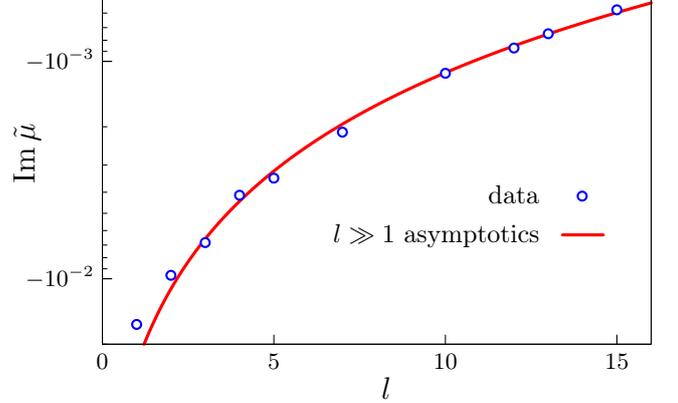


Рис. 1.11: Мнимые части доминирующих показателей неустойчивости $\text{Im } \mu$, вычисленные на фонах вращающихся Бозе-звезд с разными l , см. рис. 1.10 и см. ур. (1.24). Мы рассматриваем пренебрежимо малое самодействие бозонов $\lambda = 0$. Численные данные (кружки) приближаются к аналитическим асимптотикам (1.43) (линии) при больших l .

довой эволюции $\Delta\tau = i\Delta t$ с перенормировками ψ и SOR проходами для U в ур. (1.3). Это дает конфигурации Бозе-звезд с $\tilde{M}_{bs} = 1$.

Примечательно, что итерации сходятся только при $\lambda > \lambda_{cr}$, где

$$\lambda_{cr} = (-738 \pm 4)/(GM_{bs}^2). \quad (1.28)$$

Это означает, что решения с фиксированной массой не существуют при взаимодействиях ниже λ_{cr} (сильное притяжение) или, наоборот, при заданном отрицательном λ и надкритических массах $M_{bs} > M_{cr}^{(l=1)}$, где

$$M_{cr}^{(l=1)} \approx 27.2/(-G\lambda)^{1/2}. \quad (1.29)$$

Действительно, можно численно видеть, что при фиксированном $\lambda < 0$ масса M_{bs} растет с $|\omega_{bs}|$ до достижения максимума $M = M_{cr}^{(l=1)}$ с $dM_{bs}/d\omega_{bs} \approx 0$

см. [50, 81]. За этим критическим пределом наш метод перестает работать. Ясно, однако, что аналитическое продолжение к большим $|\omega_{bs}|$ по другую сторону максимума дало бы решения с меньшей массой, а не желаемые тяжелые Бозе-звезды.

Вышеупомянутое критическое поведение при $M > M_{cr}^{(l=1)}$ такое же, как в случае невращающихся Бозе-звезд [51]. Физически оно вызвано самопритяжением, доминирующим в плотном Бозе-Эйнштейновском конденсате и заставляющим объекты с большой массой коллапсировать, т.е. сжиматься автомодельным образом [38, 50]. Коллапс заканчивается потоками релятивистских бозонов, покидающих конденсат [38]. Из-за этого процесса не существует стационарных Бозе-звезд с заданной массой при $\lambda < \lambda_{cr}$.

Запуская трехмерные моделирования эволюции Бозе-звезды, описанное в параграфе 1.4, в модели с притягивающими самодействиями, мы явно проверили, что Бозе-звезда с $l = 1$ действительно коллапсирует при $\lambda < \lambda_{cr}$, см. видео [80](b).

В противоположном случае $\lambda > \lambda_{cr}$ мы изучаем устойчивость Бозе-звезды, добавляя члены самодействия в ур. (1.26) и эволюционируя возмущения в реальном времени. Нормы $\delta\psi$, $\delta\bar{\psi}$ и δU растут экспоненциально, если $\lambda < \lambda_0$, где

$$\lambda_0 \approx (672 \pm 2)/(GM_{bs}^2) . \quad (1.30)$$

Их показатели $\text{Re } \mu$ показаны на рис. 1.12. Таким образом, во всей области $\lambda_{cr} < \lambda < \lambda_0$ Бозе-звезда с $l = 1$ распадается, сбрасывая свой угловой момент.

При $\lambda > \lambda_0$ возмущения остаются ограниченными в течение всей реальной временной эволюции. Формально аппроксимируя их нормы экспонентами, мы получаем точки в правой части рис. 1.12, которые согласуются с $\text{Re } \mu \approx 0$. Выполняя трехмерные моделирования, мы проверили, что даже сильно возмущенная звезда не распадается в этом случае, см. видео [80](c). Мы заключаем, что Бозе-звезды с $l = 1$ абсолютно устойчивы при $\lambda > \lambda_0$ или

$$M > M_0^{(l=1)} \approx 25.9/(G\lambda)^{1/2} , \quad (1.31)$$

где ур. (1.30) было переписано в терминах массы.

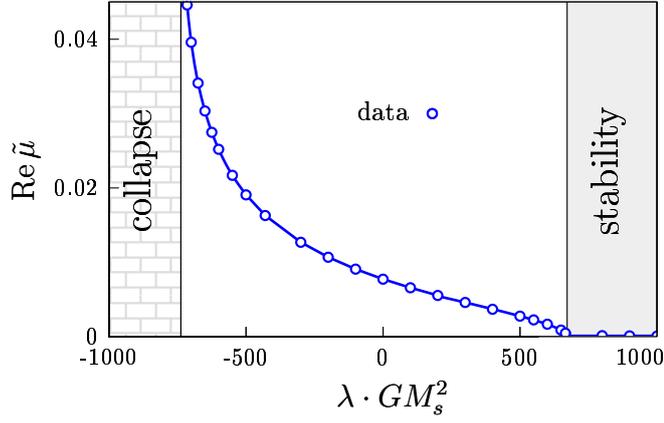


Рис. 1.12: Наибольший показатель неустойчивости $\text{Re } \mu$ Бозе-звезды с $l = 1$ как функция самодействия бозонов λ (линия-точки) при $M_{bs} = \text{const}$. Единицы μ введены в ур. (1.24). Затененные области соответствуют коллапсирующим звездам при больших отрицательных λ и абсолютно устойчивым звездам при $\lambda > \lambda_0$.

1.6 Аналитические решения при $l \gg 1$

1.6.1 Бозе-звезды

При больших l профили вращающихся Бозе-звезд и их моды неустойчивости могут быть вычислены аналитически. Для начала, кратко объясним идею, используя грубые оценки. В этом параграфе ограничимся рассмотрением случая с пренебрежимо малым параметром самодействия, $\lambda = 0$.

Размер R_{bs} быстро вращающейся Бозе-звезды велик. Действительно, он определяется балансом между гравитационной и центробежной силами, $|U_{bs}| \sim GM_{bs}/R_{bs} \sim (l/mR_{bs})^2$, и поэтому растет как

$$R_{bs} = 2\pi l^2 / (m^2 GM_{bs} \alpha_l) \propto l^2, \quad (1.32)$$

при $l \rightarrow +\infty$, где мы ввели параметр порядка единицы α_l . С другой стороны, типичный импульс конденсированных бозонов связан с глубиной потенциальной ямы звезды: $\Delta_{\rho,z} \psi_{bs} / \psi_{bs} \sim m^2 U_{bs} \propto l^{-2}$ и следовательно $\partial_{\rho,z} \psi_{bs} / \psi_{bs} \propto l^{-1}$. Это предполагает, что звезда с большим l имеет форму кольца на рис. 1.13(a) с радиусом и толщиной, пропорциональными l^2 и l соответственно.

Вышеупомянутое свойство явно заметно в численных профилях, полученных в предыдущем параграфе. Действительно, объект с $l = 10$ на рис. 1.6 напоминает тор с двумя существенно различными радиусами. Таким образом, удоб-

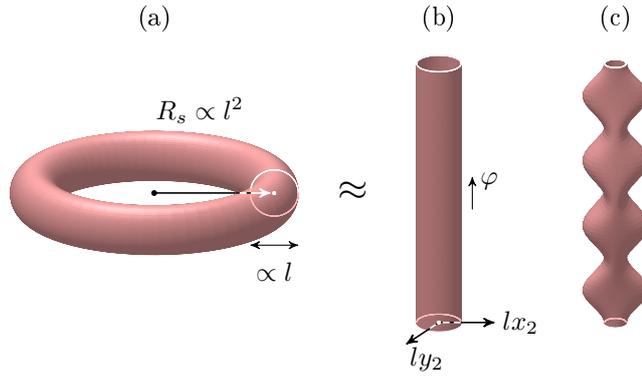


Рис. 1.13: (Не в масштабе) (а) Поверхность постоянной плотности вращающейся Бозе-звезды при больших l . (б) То же для эквивалентного объекта с цилиндрической симметрией. (с) Добавление возмущения.

но рассматривать такие кольцеобразные объекты в координатах $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2)$,

$$\rho = R_{bs} + lx_2, \quad z = ly_2, \quad (1.33)$$

которые не зависят от l . Напомним также, что размер $R_{bs} \propto l^2$ кольца контролируется новым параметром α_l , который будет определен позже.

Это наблюдение фиксирует зависимость от l энергии связи $\omega_{bs} \equiv \omega_2/l^2$ и полей,

$$\psi_{bs} = l^{-2} \psi_2(\mathbf{x}_2), \quad U_{bs} = l^{-2} U_2(\mathbf{x}_2) - \frac{l^2}{2m^2 R_{bs}^2}, \quad (1.34)$$

где мы снова предположили, что масса Бозе-звезды (1.5) не зависит от l . Подставляя анзац (1.34) в ур. (1.3), (1.4) и игнорируя члены, подавленные l^{-1} , мы приходим к уравнениям для профиля кольца,

$$\omega_2 \psi_2 = -\frac{\Delta_2 \psi_2}{2m} + m U_2 \psi_2, \quad (1.35)$$

$$\Delta_2 U_2 = 4\pi m G |\psi_2|^2. \quad (1.36)$$

Здесь и ниже $\Delta_2 \equiv \partial_{x_2}^2 + \partial_{y_2}^2$ — двумерный лапласиан.

Очевидно, ур. (1.35), (1.36) повторяют исходную задачу Шредингера-Пуассона (1.3), (1.4), но в двух измерениях. Таким образом, сечение $\varphi = \text{const}$ нашей Бозе-звезды с большим l имеет тот же профиль, что и Бозе-звезда в пространстве меньшей размерности. Дополнительный множитель $e^{il\varphi}$ в ур. (1.1) обеспечивает вращение.

Теперь ясно, почему все вращающиеся Бозе-звезды неустойчивы при больших l . Радиусы их колец так велики, что соответствующие эффекты кривизны

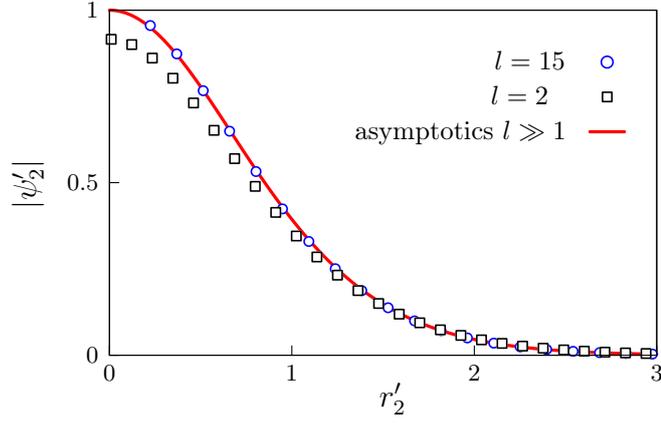


Рис. 1.14: Двумерная Бозе-звезда $|\psi_2(r_2)|$ (сплошная линия) по сравнению с сечением вращающихся трехмерных звезд $|l^2\psi_{bs}(R_{bs} + lr_2, 0)|$ (точки). В последнем случае мы определяем радиус Бозе-звезды R_{bs} как положение максимума $|\psi_{bs}|$ при $z = \varphi = 0$, затем используем безразмерные единицы с параметром v'_0 , полученным из ур. (1.37). Рассматривается случай $\lambda = 0$.

даже не вносят вклад в ведущие уравнения (1.35), (1.36). Следовательно, эти звезды эквивалентны цилиндрическим объектам на рис. 1.13(b). Результирующие статические конфигурации Бозе-Эйнштейновского конденсата неустойчивы относительно распада на множество сферических капель с меньшим поверхностным натяжением, см. рис. 1.13(c).

Естественно ожидать, что решение ур. (1.35), (1.36) имеет круговую симметрию в плоскости \mathbf{x}_2 , т.е. зависит от $r_2^2 \equiv x_2^2 + y_2^2$. Как следствие, исходная трехмерная звезда также симметрична, с поверхностями постоянной плотности, образующими торы. Мы используем это свойство, чтобы вычислить профиль звезды: подставляем $\psi_2 = \psi_2(r_2)$ и $U_2(r_2)$ в ур. (1.35), (1.36) и решаем обыкновенные дифференциальные уравнения методом стрельбы. Этот стандартный расчет изложен в Приложении А.3. Примечательно, что результирующая функция $\psi_2(r_2)$ вещественна.

Численно снова удобно использовать безразмерные единицы с $G = m = 1$ и восстанавливать физические. Для этого мы преобразуем $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}'_2/mv'_0$ и $\psi_2 = v_0'^2(m/G)^{1/2}\psi'_2$, $U_2 = v_0'^2 U'_2$ как в трех измерениях, но с новым параметром v'_0 , выбранным так, чтобы $\psi'_2(0) = 1$. Двумерный профиль $\psi'_2(r'_2)$ демонстрируется на рис. 1.14 (сплошная линия). Примечательно, что сечения $\varphi = \text{const}$ трехмерных вращающихся звезд (точки) приближаются к этому графику при $l \rightarrow +\infty$.

Имея ψ_2 , мы вычисляем параметры Бозе-звезды. Переписывая интеграл (1.5) при больших R_{bs} в двумерных терминах (1.33), (1.34) и выполняя преобразование, мы приходим к массе Бозе-звезды,

$$M_{bs} = \frac{4\pi^2(v'_0)^2 M'_2}{m^2 G^2 M_{bs} \alpha_l}, \quad (1.37)$$

где мы использовали ур. (1.32) и вычислили оставшийся безразмерный интеграл $M'_2 \equiv \int d^2 \mathbf{x}'_2 |\psi'_2|^2 \approx 1.70$. На практике, можно использовать это соотношение для выражения параметра преобразования v'_0 через полную массу M_{bs} . Аналогично, энергия (1.6) Бозе-звезды равна,

$$E_{bs} = \frac{m^2 G^2 M_{bs}^3}{8\pi^2 l^2} \alpha_l \left[\alpha_l + \frac{1}{2} + \ln(\beta \alpha_l / l^2) \right]. \quad (1.38)$$

На этот раз мы извлекли, дополнительно, v'_0 из ур. (1.37) и ввели другой численный коэффициент $\beta \approx 2.86 \cdot 10^{-2}$, см. Приложение А.3 для деталей.

Мы, наконец, экстремизируем энергию (1.38) по отношению к параметру α_l , характеризующему радиус Бозе-звезды $R_{bs} \propto l^2 / \alpha_l$. Это дает нелинейное уравнение (1.45) и завершает построение Бозе-звезды при больших l . Напомним, что мы уже предварительно привели асимптотику энергии (1.38) в последнем элементе Таблицы 1.1 и на рис. 1.7. Последний график грубо согласуется с численными данными даже при $l \sim 1$, становясь более точным при больших l . Как всегда, энергия связи бозонов внутри Бозе-звезды равна $\omega_{bs} = 3mE_{bs}/M_{bs}$, см. ур. (1.12).

1.6.2 Неустойчивости

Теперь мы оценим экспоненциально растущие моды, разрушающие быстро вращающиеся Бозе-звезды.

Для этого мы убираем зависимость от l из координат и фоновых полей в линейных уравнениях (1.26), используя ур. (1.33), (1.34). Затем, подставляя $\delta\psi$, $\delta\bar{\psi}$, $\delta U \propto \exp(\mu t)$, мы приходим к ведущему порядку задачи на собственные значения

$$\begin{aligned} -\mu_2 \eta &= \frac{p_\varphi^2 - \Delta_2}{2m} \chi + m\psi_2 \delta U + (mU_2 - \omega_2) \chi, \\ \mu_2 \chi &= \frac{p_\varphi^2 - \Delta_2}{2m} \eta + (mU_2 - \omega_2) \eta, \\ \Delta_2 \delta U &= p_\varphi^2 \delta U + 8\pi G m \psi_2 \chi. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Здесь мы вспомнили, что $\psi_2(\mathbf{x}_2)$ вещественна и ввели «вещественные» и «мнимые» возмущения $\chi(\mathbf{x}_2) \equiv (\delta\psi + \delta\bar{\psi})/2$ и $\eta(\mathbf{x}_2) \equiv (\delta\psi - \delta\bar{\psi})/2i$. Кроме того, в ур. (1.39) мы заменили перенос углового момента Δl и комплексный показатель μ на параметры

$$p_\varphi = l\Delta l/R_{bs}, \quad \mu_2 = l^2(\mu + ip_\varphi/mR_{bs}). \quad (1.40)$$

Решая задачу на собственные значения (1.39), можно найти все моды колебаний Бозе-звезды при заданном Δl и определить их показатели μ . Примечательно, что та же задача с $p_\varphi = 0$ описывает колебания двумерной звезды $\psi_2(r_2)$, которая устойчива. Мы прежде всего сосредоточимся на модах неустойчивости с $\text{Re } \mu > 0$ при $p_\varphi \neq 0$.

Отметим, что эти экспоненциально растущие возмущения с $\text{Re } \mu > 0$ имеют несколько свойств, доказанных в Приложении А.3. Во-первых, их собственные значения μ_2 и профили χ , η , δU вещественны. Этот результат ожидаем, поскольку ур. (1.39) вещественны. Как следствие, μ_2 и p_φ параметризуют вещественную и мнимую части исходного показателя μ через ур. (1.40). Во-вторых, все моды неустойчивости исчезают на бесконечности,

$$\chi, \eta, \delta U \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}_2| \rightarrow +\infty. \quad (1.41)$$

Действительно, менее локализованные решения ур. (1.39) описывают волны, осциллирующие с вещественными частотами $i\mu_2$ в далекой области с $\psi_2 \approx 0$. В-третьих и наконец, моды неустойчивости вращательно-симметричны с двумерной точки зрения, т.е. зависят только от $r_2 = |\mathbf{x}_2|$. Этот последний факт согласуется с интуитивным рисунком 1.13(с).

Мы явно вычисляем профили экспоненциально растущих возмущений, используя ту же стратегию, что и раньше. Подставляем вращательно инвариантный анзац $\chi(r_2)$, $\eta(r_2)$, $\delta U(r_2)$ в ур. (1.39) и выполняем преобразование с параметром v'_0 , например, $\chi = v_0'^2(m/G)^{1/2}\chi'(r'_2)$. Это дает систему обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя безразмерными константами: собственным значением $\mu'_2 = \mu_2/(mv_0'^2)$ и преобразованным экстра-размерным импульсом $p'_\varphi = p_\varphi/(mv_0')$. После этого применяем метод стрельбы для решения уравнений с условиями регулярности в начале координат и условиями спада на бесконечности, см. Приложение А.3 для деталей.

Мы находим ровно одну моду неустойчивости при $0 < p'_\varphi < 2$, и нет мод вне этого интервала. Соответствующее собственное значение $\mu_2(p_\varphi)$ по-

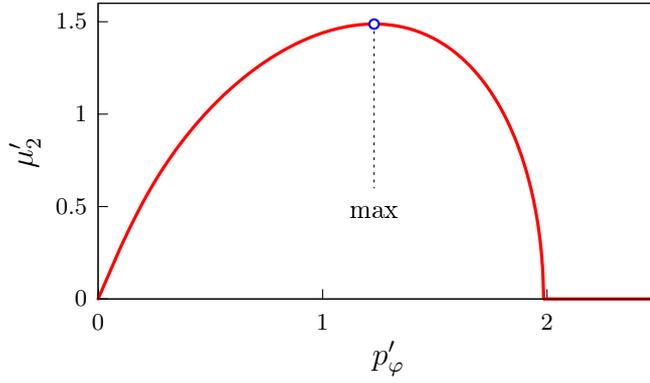


Рис. 1.15: Собственное значение μ_2 моды неустойчивости как функция экстра-размерного импульса p_φ .

строено на рис. 1.15. Поскольку сама по себе двумерная Бозе-звезда устойчива, нет неустойчивостей при $p_\varphi = 0$. В противоположном пределе больших p_φ энергия вращения делает операторы в правых частях ур. (1.39) положительно-определенными и приводит μ_2^2 к отрицательным значениям.

Самое быстрорастущее возмущение соответствует максимуму графика 1.15 при $\mu_2' \approx 1.49$ и $p_\varphi' \approx 1.23$ (точка). Преобразуя обратно к физическим единицам и используя ур. (1.40), (1.32), мы получаем вещественную и мнимую части показателя роста μ в ур. (1.24) с коэффициентами

$$\operatorname{Re} \tilde{\mu} = \frac{\mu_2' \alpha_l}{(2\pi l)^2 M_2'} \approx 2.22 \cdot 10^{-2} \frac{\alpha_l}{l^2}, \quad (1.42)$$

$$\operatorname{Im} \tilde{\mu} = -\frac{p_\varphi' \alpha_l^{3/2}}{(2\pi l)^2 (M_2')^{1/2}} \approx -2.39 \cdot 10^{-2} \frac{\alpha_l^{3/2}}{l^2}. \quad (1.43)$$

Кроме того, первое из ур. (1.40) фиксирует перенос углового момента,

$$\Delta l = \left[\frac{l p_\varphi'}{\alpha_l^{1/2} (M_2')^{1/2}} \right] \approx \left[\frac{0.944 \cdot l}{\alpha_l^{1/2}} \right], \quad (1.44)$$

с поправками, подавленными как l^{-1} . Здесь $[\cdot]$ обозначает ближайшее целое число, а параметры порядка единицы α_l удовлетворяют нелинейному уравнению⁵

$$2\alpha_l + 3/2 + \ln(\beta\alpha_l/l^2) = 0 \quad \text{с} \quad \beta \approx 2.86 \cdot 10^{-2}. \quad (1.45)$$

Предварительно были рассмотрены вышеупомянутые асимптотические выражения в ур. (1.42-1.44) и визуализированы на рис. 1.10, 1.11. Еще раз заметим,

⁵С численным решением $\alpha_l \approx \{1.02, 1.51, 1.82, 2.05, 2.23, 2.38, 2.51, 2.62, 2.72, 2.81\}$ при $l = \{1, \dots, 10\}$ и асимптотикой при больших l $\alpha_l = \ln l + O(\ln \ln l)$.

что численные результаты параграфа 1.5 приближаются к асимптотическим выражениям при больших l на всех рисунках.

В заключении параграфа отметим, что в модели с ультралежкой (fuzzy) темной материей времена жизни неустойчивых вращающихся Бозе-звезд формально могут превышать возраст Вселенной. Действительно, в этом случае ур. (1.24), (1.42-1.44) дают,

$$(\text{Re } \mu)^{-1} \simeq 10^{10} \text{ лет} \cdot l^2 \left(\frac{m}{10^{-22}} \right)^{-3} \left(\frac{M_{bs}}{4 \cdot 10^7 M_{\odot}} \right)^{-2},$$

где мы использовали $\alpha_l \sim 1$. Можно поспешно заключить, что эти конфигурации стабильны в космологических временных масштабах, если $m \sim 10^{-22}$ эВ, $l \gtrsim 1$, и $M_s \lesssim 4 \cdot 10^7 M_{\odot}$. Но на самом деле их времена жизни всегда сравнимы с периодами колебаний $2\pi/\omega_{bs}$ в ур. (1.1):

$$|\omega_{bs}|/\text{Re } \mu \approx 1.7(\alpha_l + 1) \sim O(1), \quad (1.46)$$

где снова использована аналитика для больших l . Таким образом, эти Бозе-звезды не могут считаться ни стационарными ни квазистационарными состояниями, поскольку время развития неустойчивости порядка $|\omega_{bs}|^{-1}$. Кроме того, времена жизни этих вращающихся объектов короче, чем времена свободного падения $t_{\text{free}} \sim l/|\omega_{bs}|$ в их гравитационных полях, и следовательно много меньше, чем их времена образования в разумных механизмах формирования [18, 22, 26, 41, 42]. Все это оставляет только один способ наблюдать вращающиеся Бозе-звезды: настроить начальные данные на их профили с экспоненциальной точностью, как мы сделали на рис. 1.4.

1.7 Обсуждение

В этой главе аналитически доказано, что вращающиеся нерелятивистские Бозе-звезды неустойчивы при любом ненулевом угловом моменте, если самодействие их бозонов притягивающее или пренебрежимо малое, $\lambda \leq 0$. Этот результат справедлив для популярных моделей с КХД аксионной или «fuzzy» темной материей. Также было продемонстрировано, что в моделях с отталкивающим самодействием ($\lambda > 0$) звезда с $l = 1$ неустойчива при массах ниже $M_{s,0} \approx 25.9/(\lambda G)^{1/2}$ и абсолютно устойчива при $M_{bs} > M_{s,0}$, см. ур. (1.30).

Вычислены времена жизни неустойчивых вращающихся звезд в ур. (1.24), (1.46) и в Таблице 1.2. Они всегда сравнимы с обратными энергиями

связи ω_{bs}^{-1} Бозе-звезд и меньше времен свободного падения в их гравитационных полях. Таким образом, вращающиеся звезды (1.1) не могут быть образованы в реалистичных сценариях формирования [18, 22, 26, 41, 42] и фактически не могут даже считаться долгоживущими квазистационарными состояниями. Это наблюдение имеет ряд феноменологических следствий.

Во-первых, сценарий [52] с вращающимися аксионными звездами, достигающими порога для взрывного параметрического радиоизлучения [30, 45, 53], не может быть реализован. Все еще можно рассматривать излучение во время промежуточных стадий, когда плотная и короткоживущая вращающаяся конфигурация сбрасывает свой угловой момент. Но сначала должен быть предложен конкретный сценарий формирования последней.

Во-вторых, неустойчивость вращающихся Бозе-звезд обеспечивает универсальный механизм избавления от углового момента. Можно представить, например, что Бозе-звезды из аксионов темной материи гравитационно коллапсируют в черные дыры без углового момента в результате слияний и образования Бозе-звезд большей массы. Это возможно в моделях, в которых масштаб нарушения симметрии Печчеи-Куинн f_a порядка массы Планка [82]. Данный сценарий образования черных дыр мог бы служить объяснением наблюдаемой распространенности невращающихся черных дыр. [54–56].

В этой главе также разработано аналитическое описание быстро вращающихся Бозе-звезд с $l \gg 1$. Эта техника является дополнением к численным методам при умеренно малых l , она дает параметры и времена жизни звезд как систематические разложения по l^{-1} , см. (1.42-1.44), (1.38). Мы видели, что такая аналитика грубо применима даже при $l \sim 1$, и она становится точной при больших l , см. рис. 1.10, 1.7.

Наш аналитический метод основан на простом наблюдении, что Бозе-звезды при больших l имеют формы параметрически тонких колец, см. рис. 1.6 и 1.13(а). Как следствие, их сечения и моды неустойчивости могут быть получены решением определенных обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот подход может быть легко обобщен на нетривиальные ситуации: случай ненулевого самодействия $\lambda \neq 0$, релятивистская модель с комплексным полем, как в работах [76–78], вращающаяся звезда во внешнем гравитационном потенциале и т.д.

Хотя Бозе-звезда с $l = 1$ становится устойчивой при достаточно сильных отталкивающих самодействиях $\lambda > \lambda_0$, ур. (1.30), судьба объектов с больши-

ми l гораздо менее тривиальна. В моделях с доминирующим короткодействующим отталкиванием вихри с $l \geq 2$ распадаются [72] на элементарные вихри с $l = 1$, и последние равномерно распределяются по доступному объему. Это предполагает, что осесимметричные конфигурации с $l \geq 2$ (1.1) неустойчивы при любых λ , и реальный вопрос заключается в том, распадаются ли они на гравитационно связанные объекты с l элементарными вихрями внутри, или большинство вихрей мигрируют на периферию системы и исчезают в обломках. Первое исследование такого процесса было проведено в работе [83].

Наконец, отметим, что хотя формирование вращающихся Бозе-звезд требует тонкой настройки начальных данных или специального механизма, распады этих объектов настолько сложны, что их исследования могут иметь научную ценность сами по себе. Действительно, мы ожидаем, что звезды с большими l разбиваются на $\Delta l \propto l$ невращающихся компонентов, осциллирующих и вращающихся вокруг общего центра, см. видео [80](а). Это состояние должно существовать некоторое время до возможного разрыва благодаря субдоминантным неустойчивостям. После этого некоторые компоненты могут приливно разрушиться, а другие выжить. В случае притягивающих самодействий компонентные объекты могут оказаться надкритическими и коллапсировать, излучая релятивистские аксионы [38] или фотоны [53], поскольку они больше не защищены центробежными барьерами.

Глава 2

Автомодельная кинетика гравитационной Бозе-Эйнштейновской конденсации

2.1 Введение. Автомодельность функции распределения.

Результаты моделирования образования крупномасштабной структуры показывают [18–28], что самые маленькие сгустки легкого бозонного (аксионоподобного) [84] темного вещества выглядят необычно. Помимо вириализованного темного газа, они включают Бозе-звезды [29, 30], см. рис. 2.1(а). Если темные бозоны являются КХД аксионами [85, 86], эта структура появляется [22, 26] внутри аксионных мини-кластеров астероидной массы [8, 31–35], а если они ультралегкие (fuzzy) [87–90], Бозе-звезды возникают как гигантские солитоны [18–21, 23, 24, 27, 28] в центре галактик. В обоих сценариях Бозе-Эйнштейновская конденсация обеспечивается [22, 91, 92] огромной фазовой плотностью (перенаселенностью) [93, 94] темной материи и ее частичной термализацией посредством дальнедействующих гравитационных сил. Действительно, рождение Бозе-звезд в симуляциях занимает время, сравнимое [22, 42, 58, 95] с гравитационным временем релаксации [22]. Вопрос в том, как эти объекты растут дальше, конденсируя бозоны, составляющие темную материю?

Забегая вперед, сделаем утверждение, которое будет явно продемонстрировано в Главе 3. Перенаселенный Бозе-газ, окружающий Бозе-звезду, эволюционирует автомодельным образом. А именно, его функция распределения $F(t, \omega) = dN/d\omega$ частиц по энергиям ω сохраняет форму в течение длительных периодов эволюции, просто перемасштабируясь коэффициентами $\alpha(t)$ и $\beta(t)$,

$$F(t, \omega) \equiv \frac{dN}{d\omega} = \alpha(t) F_s(\beta(t)\omega). \quad (2.1)$$

Более того, сами коэффициенты являются степенями времени:

$$\alpha(t) \propto (t - t_i)^{-1/D} \quad \text{и} \quad \beta(t) \propto (t - t_i)^{2/D-1}, \quad (2.2)$$

где D параметризует масштабную размерность, а t_i — начало отсчета времени. Закон (2.1), (2.2) был впервые обнаружен в микроскопических (Шредингер-

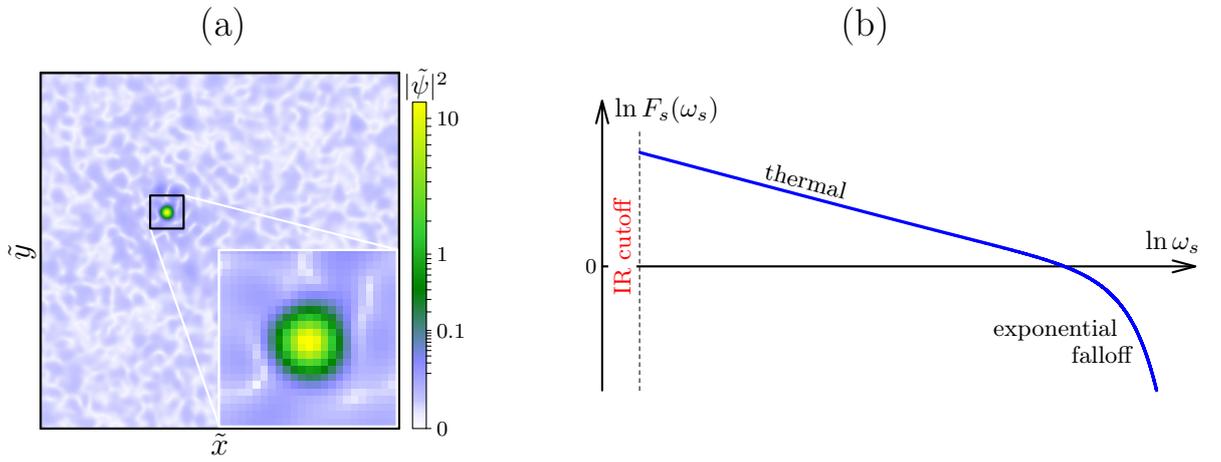


Рис. 2.1: (a) Симуляция в ящике описанная в Главе 3. Она включает однородный и изотропный газ бозонов и новорожденную Бозе-звезду (яркая точка). Цвет указывает плотность темной материи $|\tilde{\psi}|^2(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ при $\tilde{z} = 0$ в безразмерных единицах Главы 1 с фиксированным $v_0 = 1$. Вставка увеличивает изображение Бозе-звезды. (b) Типичный автомоделный профиль $F_s(\omega_s)$ в ур. (2.1), (2.2) (log-log масштаб).

Пуассоновских) симуляциях, которые мы подробно рассмотрим в главе 3. Эта же глава будет посвящена выводу этой симметрии из упрощенного кинетического уравнения.

Автомоделная кинетическая эволюция, подчиняющаяся уравнениям, подобным ур. (2.1), (2.2), наблюдались во множестве неравновесных систем с большими числами заполнения: в вырожденных бозе газах с короткодействующими взаимодействиями, как на слаботурбулентных (кинетических) [62, 63, 96–101], так и на сильносвязанных (сверхтекучих) [64, 69, 70, 102–105] стадиях этого процесса, в не-Абелевых плазмах, создаваемых столкновениями тяжелых ионов [65–68, 106–108], и в стохастических полях материи, термализующихся в постинфляционную эпоху [109–111]. Автомоделная динамика ультра-холодных газов подтверждена экспериментально [112–116].

Физически, автомоделные решения кинетических уравнений могут играть роль «нетепловых аттракторов» [111], которые система посещает на пути к тепловому равновесию. Они могут задерживать термализацию на многие времена релаксации [109, 110]. Кроме того, эти решения могут обеспечивать перенос сохраняющихся величин (например, энергии или числа частиц) к низким или высоким импульсам, обобщая [62, 63, 98] стационарные каскады Колмогорова-Захарова [117–119]. Обычно теоретические исследования автомоделной динамики сводятся к вычислению масштабных показателей и профилей — анало-

гов D и $F_s(\omega_s)$ в ур. (2.1), (2.2) — и идентификации «нетеплового аттрактора», который часто уникален [62–64, 67–71].

В этой главе систематически изучается автомодельная кинетика, управляемая дальнедействующими⁶ гравитационными силами. Если быть точными, мы рассматриваем высоконаселенный, гравитационно взаимодействующий бозонный газ в окрестности Бозе-Эйнштейновского конденсата (Бозе-звезды). Мы упрощаем кинетическое уравнение для этого газа: игнорируем его средние пространственные неоднородности и описываем двухчастичное гравитационное рассеяние с помощью приближенного интеграла Ландау [120]. Мы учитываем обмен частицами и энергией с конденсатом, используя поглощающие (конденсирующие) частицы граничные условия при низких энергиях и внешний источник, нагревающий газ.

Будет показано, что с этими упрощениями кинетическое уравнение имеет семейство автомодельных решений (2.1), (2.2) — аттракторов кинетической эволюции. А именно, если внешний источник отсутствует, эволюция неизбежно приближается к скейлинговому режиму с $D = 5/2$, а если источник масштабно-симметричен, автомодельность возникает при других D . Мы проклассифицируем все автомодельные решения с конечными массами, энергиями и потоками.

Наши автомодельные профили $F_s(\omega_s)$ включают⁷ тепловые (Рэля-Джинса) низкоэнергетические хвосты $F_s \propto \omega_s^{-1/2}$ и обрезания при высоких ω_s , см. эскиз на рис. 2.1(b). Кроме того, они поддерживают конечные потоки частиц при самых низких ω_s («IR cutoff» на рисунке), ниже которых частицы поглощаются конденсатом. Эта структура необычна: в стандартном случае короткодействующих взаимодействий соответствующие хвосты являются нетепловыми⁸ степенными законами [62, 63, 71]. Тем не менее, наши автомодельные решения далеки от истинного равновесия, поскольку все их части, включая тепловые хвосты, эволюционируют согласно ур. (2.1), (2.2).

⁶Заметим, что электромагнитные взаимодействия эффективно короткодействующие в плазме [120, 121] из-за дебаевского экранирования; см. кинетику гравитационных волн в [122].

⁷Мы нашли профили с другим, $F_s \propto \omega_s^{-1/3}$, поведением на низких энергиях. Но они образуют меньшее семейство с одним фиксированным параметром и затухают в зависящих от времени численных симуляциях. Они, вероятно, являются тонко настроенными и неустойчивыми.

⁸Они часто близки [62, 63, 71] к степенным каскадам Колмогорова-Захарова [117–119], описывающим перенос частиц или энергии в фазовом пространстве. В нашем случае единственный каскад $F \propto \omega^{-1/3}$, вероятно, неустойчив, см. детали в параграфе 2.4.

Что наиболее важно, мы наблюдаем, что кинетическая эволюция остается приблизительно автомодельной даже если масштабная симметрия кинетического уравнения явно нарушена внешними условиями, например, произвольно выбранным источником энергии. В этом новом⁹ режиме *адиабатической автомодельности* [125] эволюция следует скейлинговому закону (2.1), (2.2) в течение длительных эпох, пока ее параметр $D = D(t)$ медленно изменяется со временем. Мы ожидаем, что все нарушающие масштабную инвариантность эффекты, даже те, которые мы проигнорировали, действуют аналогично: вызывают медленную эволюцию в пространстве решений вместо того, чтобы разрушать автомодельность. Это предположение подтверждается наблюдением автомодельного поведения в микроскопических (Шредингер-Пуассоновских) симуляциях, которые будут проведены в главе 3.

Мы увидим, что адиабатическая автомодельность является эффективным аналитическим инструментом для неравновесной кинетики. Ее используют, вычисляя последовательность автомодельных решений с разными D , а затем извлекая медленную зависимость этого параметра от времени, например, из законов сохранения. Постоянная разложения в этом подходе — это относительный вклад нарушающих масштабную инвариантность эффектов, оцениваемый как

$$d \ln D / d \ln(t - t_i) \ll 1. \quad (2.3)$$

В этой главе мы рассмотрим одно применение адиабатического метода: конденсация в присутствии нарушающего масштабную инвариантность источника, оставляя описание роста Бозе-звезды для главы 3. Забегая вперед, отметим, что в обоих случаях мы успешно описываем нетривиальную кинетическую эволюцию с точностью до нескольких эвристических констант.

2.2 Масштабная симметрия гравитационной кинетики

Рассмотрим перенаселенный газ нерелятивистских бозонов с двухчастичными гравитационными взаимодействиями [22]. Три упрощения делают его кинетическое уравнение масштабно-инвариантным. Во-первых, игнорируем про-

⁹Ближайшим явлением можно считать предскейлинг [123, 124]: почти автомодельная эволюция до достижения истинного — и уникального — нетеплового аттрактора. В нашем случае автомодельные решения существуют при разных D , и адиабатическая автомодельность означает переход между ними.

странственную неоднородность газа и его коллективное гравитационное поле,

$$f_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x}) = f_{\mathbf{p}}(t) \quad \text{и} \quad \bar{U}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (2.4)$$

где $f_{\mathbf{p}}$ — фазовая плотность, а \mathbf{p} — импульс частицы. Во-вторых, предполагаем большие числа заполнения

$$f_{\mathbf{p}} \gg 1, \quad (2.5)$$

т.е. нетепловое состояние ниже точки конденсации. В-третьих, используем приближение Ландау (для дальнедействующих сил) для гравитационного рассеяния [120].

Эти приближения дают кинетическое уравнение¹⁰ [22]

$$\partial_t f_{\mathbf{p}} = \text{St } f_{\mathbf{p}} \equiv -\partial_{p_j} s_j(\mathbf{p}), \quad (2.6)$$

с интегралом столкновений $\text{St } f_{\mathbf{p}}$ и потоком Ландау

$$s_i(\mathbf{p}) = \frac{G^2 m^4 \Lambda}{4\pi^2} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{|\mathbf{u}|} \mathcal{P}_{ij} [f_{\mathbf{p}}^2 \partial_{q_j} f_{\mathbf{q}} - f_{\mathbf{q}}^2 \partial_{p_j} f_{\mathbf{p}}], \quad (2.7)$$

описывающим гравитационные столкновения частиц с импульсами \mathbf{p} и \mathbf{q} ; мы ввели их относительную скорость $\mathbf{u} = (\mathbf{p} - \mathbf{q})/m$ и проектор $\mathcal{P}_{ij} = \delta_{ij} - u_i u_j / |\mathbf{u}|^2$, ортогональный \mathbf{u} . Сила гравитационного рассеяния в ур. (2.7) контролируется массой частицы m , гравитационной постоянной G и кулоновским логарифмом $\Lambda = \ln(p_0 R) \gtrsim 1$, зависящего от характерного масштаба импульса частицы p_0 и пространственного размера газа R .

Теперь упрощенное кинетическое уравнение (2.6), (2.7) имеет масштабную симметрию

$$f \rightarrow af, \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}/b, \quad t - t_i \rightarrow (t - t_i)/a^2 \quad (2.8)$$

с константами a , b и началом отсчета времени t_i . Другими словами, функция

$$f'_{\mathbf{p}}(t - t_i) = af_{b\mathbf{p}}(a^2(t - t_i))$$

удовлетворяет уравнению, если удовлетворяет $f_{\mathbf{p}}(t)$.

Мы будем аргументировать в параграфе 2.5, что симметрия (2.8) гарантирует существование автомодельных кинетических решений (2.1), (2.2). В реальности она нарушена эффектами свободного пробега и средним гравитационным полем неоднородного газа, а также поправками на короткодействие и

¹⁰Того же вида, что и уравнение для случайных волн в кулоновски взаимодействующей плазме [119, 120], но с заменой электрического заряда $e \rightarrow m\sqrt{G}$.

малость чисел заполнения ($1/f$) к интегралу столкновений. Однако вскоре мы увидим, что автомодельные решения являются динамическими аттракторами. Физически значимые, нарушающие масштабную инвариантность эффекты не разрушают их, а вызывают медленный сдвиг их параметров.

Прежде чем продолжить, упростим далее ур. (2.6), (2.7), предположив, что газ изотропен, т.е. $f_{\mathbf{p}}$ зависит только от \mathbf{p}^2 . В этом случае удобно работать с распределением частиц по энергиям ω ,

$$F(t, \omega) \equiv \frac{dN}{d\omega} = \frac{mV_R}{2\pi^2} p f_{\mathbf{p}}, \quad \omega = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad (2.9)$$

где V_R — пространственный объем газа. Кинетическое уравнение (2.6), (2.7) принимает форму (см. Прил. Б.1 и ¹¹ [22]):

$$\partial_t F = \text{St } F, \quad \text{St } F = -\partial_\omega \mathcal{J}_N = -\omega^{-1} \partial_\omega \mathcal{J}_E, \quad (2.10a)$$

где мы ввели потоки частиц и энергии в ω -пространстве,

$$\mathcal{J}_N = \partial_\omega W(\omega) \quad \text{и} \quad \mathcal{J}_E = \omega^2 \partial_\omega (W(\omega)/\omega), \quad (2.10b)$$

и функцию

$$W(\omega) = W_0 (BC - AF), \quad W_0 \equiv \frac{(2\omega_0)^3}{t_{\text{rel}} N_0^2}, \quad (2.10c)$$

включающую три основных интеграла

$$A(\omega) = \int_0^\infty d\omega' \frac{\min^{3/2}(\omega, \omega')}{3\omega'\omega^{1/2}} F^2(\omega'), \quad (2.10d)$$

$$B(\omega) = \int_0^\omega d\omega' F(\omega'), \quad \text{и} \quad C(\omega) = \int_\omega^\infty \frac{d\omega'}{2\omega'} F^2(\omega').$$

Заметим, что последнее равенство в ур. (2.10a) есть тривиальное следствие определений (2.10b). В ур. (2.10c) мы использовали параметры, характеризующие масштаб системы: характерный масштаб энергии частицы $\omega_0 = p_0^2/(2m)$, число частиц N_0 , и теоретическое время релаксации

$$t_{\text{rel}} = \frac{\omega_0^3 V_R^2}{\pi^3 N_0^2 m^2 G^2 \Lambda} \sim t_{gr}. \quad (2.11)$$

¹¹По сравнению с [22], мы изменили нормировки основных интегралов: $A \rightarrow mV_R^2 A/(4\pi^4)$ и $B \rightarrow V_R B/(2\pi^2)$.

Последнее грубо совпадает¹² [22] со временем t_{gr} , за которое Бозе-звезды образуются в симуляциях.

Заметим, что изотропия газа ни способствует, ни препятствует автономной динамике: мы рассматриваем этот случай как простой и физически мотивированный. В терминах F масштабные преобразования (2.8) выглядят как

$$F \rightarrow F'(t - t_i, \omega) = \frac{a}{b} F(a^2(t - t_i), b^2\omega). \quad (2.12)$$

Они оставляют кинетическое уравнение (2.10а) инвариантным.

Далее, добавим Бозе-Эйнштейновский конденсат в систему. Под действием гравитации, конденсированные частицы создают потенциальную яму $U_{bs}(\mathbf{x}) < 0$ и одновременно занимают ее низший энергетический уровень $\omega_{bs} < 0$. В результате они образуют гравитационно самосвязанный объект с локализованной плотностью массы $|\psi_{bs}|^2(\mathbf{x})$, называемый Бозе-звездой [30], см. рис. 2.2(b).

В этой главе мы не будем изучать саму Бозе-звезду, только ее влияние на окружающий газ (см., однако, [38, 51, 126–130]). С одной стороны, конденсация частиц на звезду означает их переходы на уровень $\omega_{bs} < 0$ и, следовательно, ненулевой поток частиц через границу $\omega = 0$ энергетического пространства газа. Пример такого процесса дан на рис. 2.2(a): частица теряет свою энергию в гравитационном столкновении и присоединяется к конденсату. Мы имитируем конденсацию¹³ эффективным поглощающим членом в кинетическом уравнении. Поскольку гравитационное рассеяние более эффективно при малых переданных энергиях [120], Бозе-звезда в основном поглощает частицы с низкими ω [58]. Соответственно, наш поглощающий член будет действовать при малых $\omega \lesssim \omega_{IR}$ [125].

С другой стороны, сохранение полной энергии в системе газ-Бозе-звезда предполагает, что конденсация нагревает газ, т.е. повышает его энергию. Например, конденсирующаяся частица на рис. 2.2(a) передает свой избыток энергии $\omega - \omega_s > 0$ партнеру по столкновению, остающемуся в газе. Поскольку нагревание существенно [26, 125], мы имитируем его источником энергии J_{ext} в кинетическом уравнении.

¹²Строго говоря, $t_{rel} \equiv 3t_{gr}/(2b\sqrt{2})$, где $b \sim 0.6 \div 0.9$ [22].

¹³Обратный процесс, выбивающий частицы с уровня ω_{bs} , испаряет конденсат [58]. Наш эффективный член в уравнении описывает разность между конденсацией и испарением.

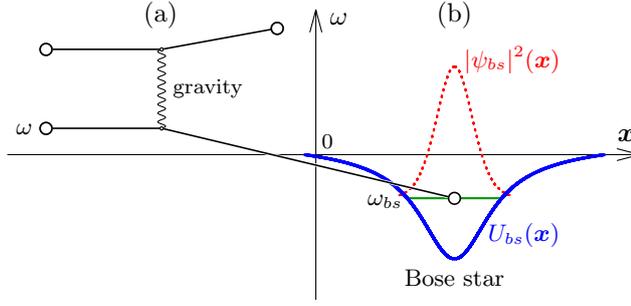


Рис. 2.2: (а) Диаграмма конденсации частицы на Бозе-звезду. (б) Гравитационное поле Бозе-звезды $U_{bs}(\mathbf{x})$ и ее плотность массы $|\psi_{bs}|^2(\mathbf{x})$.

Эти две физических мотивации подсказывают кинетическое уравнение

$$\partial_t F = \text{St} F - \mu(\omega)F + J_{\text{ext}}(t, \omega), \quad (2.13)$$

моделирующее обмен частицами и энергией с конденсатом. В частности, губка $\mu(\omega)$, локализованная при $\omega \lesssim \omega_{\text{IR}}$, поглощает частицы, а источник J_{ext} накачивает энергию в газ.

Можно сказать, что ур. (2.13) справедливо только на качественном уровне. Более детальное описание включало бы гравитационное поле Бозе-звезды и предоставляло F -зависимые выражения для μ и J_{ext} на основе правильного интеграла столкновений, см. [58]. Однако мы используем ур. (2.13) как удобный испытательный инструмент для автомодельной кинетики. Кроме того, мы не ожидаем, что опущенные члены отодвинут эволюцию слишком далеко от автомодельных аттракторов: в параграфе 2.6 мы увидим, что разумные эвристические выборы μ и J_{ext} дают очень хорошие результаты, см. также в [125].

В общем случае, губка $\mu(\omega)$ и источник $J_{\text{ext}}(t, \omega)$ нарушают масштабную симметрию (2.12). Мы используем эту особенность двумя способами. Во-первых, при изучении точной автомодельной динамики мы восстанавливаем подгруппу симметрии с $b = a^{1-2/D}$ при постоянной D . Для этого мы рассматриваем источники, удовлетворяющие

$$J_{\text{ext}}(t - t_i, \omega) = a^{2+2/D} J_{\text{ext}}(a^2(t - t_i), a^{2-4/D}\omega) \quad (2.14)$$

и помещаем бесконечно сильную губку при $\omega \approx 0$. Последняя имитирует Бозе-звезду, которая поглощает все частицы с нулевой энергией и игнорирует остальные. Это эквивалентно граничному условию

$$\mathcal{J}_E = 0 \quad \text{и} \quad \mathcal{J}_N \neq 0 \quad \text{при} \quad \omega = 0. \quad (2.15)$$

Можно проверить, что уравнение (2.13) с интегралом столкновений (2.10), $\mu = 0$, граничным условием (2.15) и источником (2.14) инвариантно относительно преобразования (2.12) с $b = a^{1-2/D}$. Этого достаточно для существования автомодельных решений.

Во-вторых, в параграфе 2.6 мы намеренно рассмотрим общий вид функций $\mu = \mu(\omega)$ и $J_{\text{ext}} = J_{\text{ext}}(t, \omega)$, как источник нарушающих масштабную инвариантность эффектов, ведущих к адиабатической автомодельности.

2.3 Стремление к автомодельным профилям

Давайте численно проэволюционируем зависящее от времени кинетическое уравнение (2.13) при $J_{\text{ext}} = 0$. Для этого мы помещаем губку при малых $\omega \lesssim \omega_{\text{IR}} = 2 \cdot 10^{-3} \omega_0$,

$$\mu = \mu_0 \vartheta[(\omega_{\text{IR}} - \omega)/\sigma_{\text{IR}}], \quad (2.16)$$

где $\vartheta(x) = [1 + \text{th}(2x + x^3)]/2$ есть сглаженная тета-функция, $\mu_0 = 2 \cdot 10^6/t_{\text{rel}}$, и $\sigma_{\text{IR}} = \omega_{\text{IR}}/40$. Мы также используем безразмерные единицы: измеряем t , F и ω в терминах времени релаксации t_{rel} , полного числа частиц N_0 и масштаба энергии $2\omega_0$,

$$\tau \equiv t/t_{\text{rel}}, \quad \tilde{F} = 2\omega_0 F/N_0, \quad \tilde{\omega} = \omega/(2\omega_0), \quad (2.17)$$

таким образом, удаляя эти константы из ур. (2.10), (2.13).

Мы начинаем при $\tau = 0$ с Гауссова начального профиля

$$f_{\mathbf{p}} \propto e^{-(\mathbf{p}/p_0)^2} \quad \text{и} \quad \tilde{F}(0, \tilde{\omega}) = c_N \tilde{\omega}^{1/2} e^{-2\tilde{\omega}}, \quad (2.18)$$

с числом частиц $N(0) = 2^{-5/2} c_N N_0 \sqrt{\pi}$ и энергией $\omega_0 \equiv p_0^2/(2m)$, скрытых в обозначениях тильда. Взяв $c_N = 2^{3/2}$, мы численно эволюционируем кинетическое уравнение (2.13) с губкой (2.16), интегралом столкновений (2.10) и $J_{\text{ext}} = 0$; см. Прил. Б.2 для численных деталей. Решение $\tilde{F}(\tau, \tilde{\omega})$ визуализировано на рис. 2.3(а). После периода быстрой адаптации при $0 \leq \tau \lesssim 0.5$ оно в основном сохраняет свою форму с заметно уменьшающейся по амплитуде из-за поглощения частиц. Эта эволюция достаточно медленна: термализация все еще далека при $\tau \equiv t/t_{\text{rel}} \sim 10$.

Теперь мы наблюдаем, что поздняя кинетическая эволюция на рис. 2.3(а) сводится к зависящему от времени перемасштабированию (2.1) единственного

автомодельного профиля $F_s(\omega_s)$. Действительно, давайте разделим F и умножим ω на зависящие от времени коэффициенты (2.2),

$$\alpha(\tau) = (\tau - \tau_i)^{-1/D} \quad \text{и} \quad \beta(\tau) = (\tau - \tau_i)^{2/D-1}. \quad (2.19)$$

На рис. 2.3(b) это заставляет все графики с $\tau \geq 5$ (сплошные линии) слиться в единую кривую, потому что масштабные параметры $D = 5/2$ и $\tau_i = -2.3$ были выбраны правильно.

Численный эксперимент на рис. 2.3 подсказывает, что автомодельное решение (2.1), (2.2) с $D = 5/2$ является кинетическим аттрактором. Действительно, функция распределения на рис. 2.3(b) существенно меняет свою форму в течение первого интервала релаксации $\tau \lesssim 1$ от начальной Гауссовой шапки до скейлингового профиля $F_s(\omega_s)$, см. пунктирные и сплошные линии. Мы решали кинетическое уравнение с существенно другим начальным условием $\tilde{F}(0, \tilde{\omega}) = \delta(\tilde{\omega} - 1)$ и получили такой же результат: при $\tau \gtrsim 8$ функция распределения приблизилась к тому же скейлинговому решению, что и на рис. 2.3(b), хотя и с параметрами $D = 5/2$ и $\tau_i \approx 0.15$.

Можно легко объяснить, почему масштабная размерность $D = 5/2$ возникает в эволюциях с $J_{\text{ext}} = 0$. Действительно, нулевой источник делает энергию газа практически независимой от времени, поскольку единственный неконсервативный член — губка (2.16) — поглощает частицы с $\omega \approx 0$. С другой стороны, энергия автомодельного решения (2.1), (2.2) равна

$$E = \int_0^{\infty} \omega d\omega F(t, \omega) \propto (t - t_i)^{2-5/D}. \quad (2.20)$$

Она сохраняется точно при $D = 5/2$.

В противоположность этому, ожидается появление автомодельной динамики с $D \neq 5/2$ если J_{ext} ненулевой. Рисунок 2.4 показывает кинетическую эволюцию тех же начальных данных (2.18) с

$$J_{\text{ext}}(\tau, \omega) = \frac{J_0}{t_{\text{rel}}} \frac{\alpha^3(\tau)\beta(\tau)}{\text{ch}^2[\omega\beta(\tau)/\sigma - \omega_1]}, \quad (2.21)$$

где α и β даны ур. (2.19) с $D = 2.8$ и $\tau_i = -1$; мы используем $J_0 = 3N_0/(20\omega_0)$, $\sigma = 0.4\omega_0$ и $\omega_1 = 5$. Перемасштабируя эту эволюцию на рис. 2.4(b), мы обнаруживаем, что она становится автомодельной с $D = 2.8$ и $\tau_i = -1.1$ при $\tau \gtrsim 9$. Таким образом, решение (2.1), (2.2) все еще является динамическим аттрактором при $J_{\text{ext}} \neq 0$, но оно имеет $D \neq 5/2$.

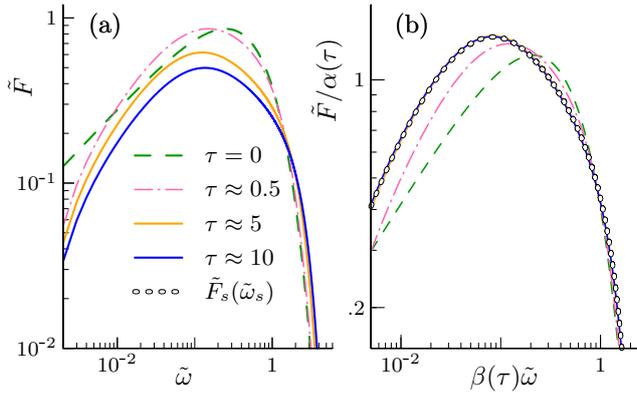


Рис. 2.3: (а) Численное решение кинетического уравнения (2.13) с губкой (2.16), $J_{\text{ext}} = 0$ и Гауссовыми начальными данными (2.18). Линии показывают \tilde{F} как функцию $\tilde{\omega}$ при разных $\tau \equiv t/t_{gr}$. (б) То же решение, перемасштабированное с помощью $\alpha(\tau)$ и $\beta(\tau)$ из ур. (2.19), где $D = 5/2$ и $\tau_i \approx -2.3$. Цепные точки отображают автомодельный профиль $F_s(\omega_s)$, удовлетворяющий ур. (2.28) с $J_{\text{ext},s} = 0$.

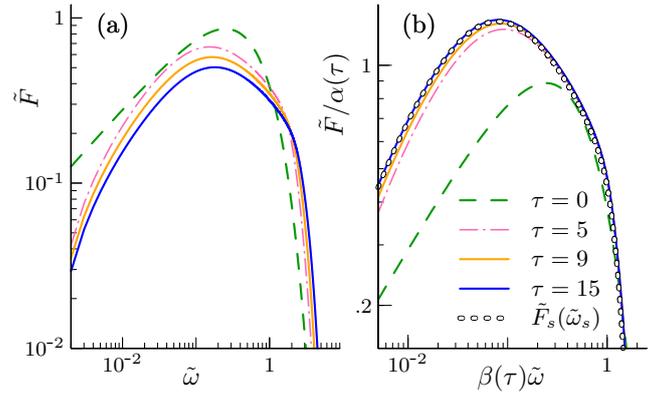


Рис. 2.4: (а) Кинетическая эволюция с губкой (2.16) и ненулевым источником энергии (2.21), начинающаяся с Гауссова начального профиля (2.18). Графики показывают функцию распределения $\tilde{F}(\tau, \tilde{\omega})$ при разных τ . (б) Те же графики, перемасштабированные с помощью $\alpha(\tau)$ и $\beta(\tau)$ в ур. (2.19), где $D = 2.8$ и $\tau_i = -1.1$. Цепные точки дают автомодельные профиль $\tilde{F}_s(\tilde{\omega}_s)$, извлеченный из ур. (2.28).

Мы скоро покажем, что точная автомодельная динамика возникает на рис. 2.4 при больших τ только потому, что источник (2.21) сохраняет ограниченную масштабную симметрию (2.12), т.е. удовлетворяет ур. (2.14) с $D = 2.8$. Позже мы увидим, что для произвольных источников эволюция является приближенно автомодельной, т.е. ее можно с некоторой точностью считать автомодельной в каждый момент времени с зависящими от времени параметрами автомодельности.

2.4 Степенные каскады.

В кинетике, обусловленной короткодействующим взаимодействием, модель (2.13) с поглощающей губкой и источником задает возможность реализации каскадных решений Колмогорова-Захарова [117–119]. Последние имеют независящие от времени степенные профили

$$F(\omega) = F_0 \omega^\gamma \quad (2.22)$$

и описывают перенос сохраняющихся величин между инфракрасным и ультрафиолетовым обрезаниями, ω_{IR} и ω_{UV} — положениями губки/источника, см. рис. 2.5. Каскад (2.22) является локальным [119], т.е. существует как независимое решение, если его интеграл столкновений при $\omega_{\text{IR}} \ll \omega \ll \omega_{\text{UV}}$ получает пренебрежимо малые вклады из областей около обрезаний $\omega \approx \omega_{\text{IR}}$ и ω_{UV} .

Продемонстрируем, что в дальнедействующей кинетике каскадное решение существует, но имеет странные свойства, затрудняющие его физическую интерпретацию. Подставляя ур. (2.22) с обрезаниями в интеграл столкновений (2.10), находим,

$$\text{St } F = W_0 F_0^3 \omega^{3\gamma-1} \left[\frac{3(1+2\gamma)(1+3\gamma)}{4(1+\gamma)(3+4\gamma)} + O\left(\frac{\omega_{\text{IR}}}{\omega}\right)^{\gamma+1} + O(\omega_{\text{IR}}/\omega)^{2\gamma+3/2} + O(\omega/\omega_{\text{UV}})^{-2\gamma} \right], \quad (2.23)$$

где последние три члена оценивают вклады от ω_{IR} и ω_{UV} . Они пренебрежимо малы и каскад локальен, если¹⁴ $-3/4 < \gamma < 0$.

Нули интеграла столкновений (2.23)

$$\gamma = -1/2 \quad \text{и} \quad \gamma = -1/3 \quad (2.24)$$

соответствуют стационарным решениям кинетического уравнения. Здесь первый вариант — тепловое распределение Рэлея–Джинса:

$$f_{\mathbf{p}} \propto \mathbf{p}^{-2}, \quad \text{и следовательно} \quad F \propto \omega^{-1/2}, \quad (2.25)$$

т.е. тепловое равновесие с нулевыми потоками.

Второй вариант $F \propto \omega^{-1/3}$ более сложен. Его потоки — первообразные (2.10а) интеграла столкновений — не зависят от ω :

$$\mathcal{J}_N = 0 \quad \text{и} \quad \mathcal{J}_E = -\frac{9}{40} W_0 F_0^3 < 0 \quad \text{при} \quad \gamma = -1/3. \quad (2.26)$$

К сожалению, этот каскад не описывает ни конденсацию газа, ни нагревание его теплового хвоста, которые требуют $\mathcal{J}_N < 0$ и $\mathcal{J}_E > 0$ соответственно. Как следствие, решение (2.26) не появляется в зависящих от времени численных решениях кинетического уравнения, в которых потоки числа частиц и энергии

¹⁴Префакторы граничных членов обращаются в нуль при $\gamma = 1/2$, что соответствует регулярной фазовой плотности $f_{\mathbf{p}} \propto F/p$ при $\mathbf{p} = 0$, т.е. отсутствию конденсата.

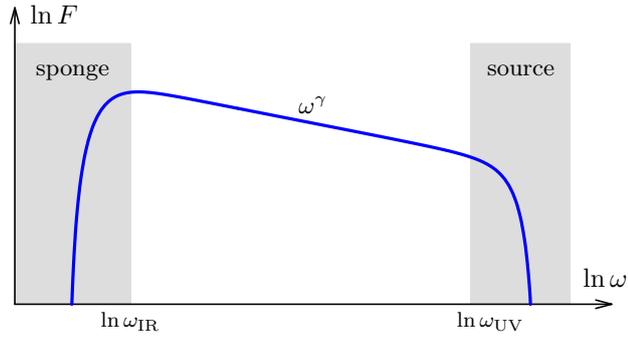


Рис. 2.5: Типичный каскад Колмогорова-Захарова (не в масштабе).

направлены противоположно относительно рассматриваемого каскада. Можно предположить, что такое решение описывает процессы, подобные, например, испарению конденсата, помещенного в газ при определенных условиях (см. работу [58]).

Несмотря на проблемы с физической интерпретацией, в параграфе 2.5.2 мы построим автомодельные решения на основе каскада $\omega^{-1/3}$, которые — увы — окажутся неустойчивыми.

2.5 Автомодельные решения

2.5.1 Подстановка

Заметим, что (2.1), (2.2) является наиболее общим анзацем, инвариантным относительно подгруппы¹⁵ масштабных преобразований (2.12) с $b = a^{1-2/D}$, где D — константа. Действительно,

$$\omega_s = \beta(\tau)\omega \quad (2.27)$$

является инвариантом сам по себе, а $\alpha(\tau)$ преобразуется как F ; как и прежде, $\tau \equiv t/t_{\text{rel}}$. По теореме Коулмана [131], это гарантирует, что анзац (2.1), (2.2) проходит через кинетическое уравнение (2.13), (2.10) с $\mu = 0$ и масштабно-инвариантным источником (2.14).

Подставляя $F(t, \omega) = \alpha(\tau)F_s(\omega_s)$ и ур. (2.27), (2.19), мы действительно приходим к независящему от времени уравнению для $F_s(\omega_s)$,

$$(2/D - 1)\omega_s \partial_{\omega_s} F_s - F_s/D = t_{\text{rel}} \text{St} F_s + J_{\text{ext},s}(\omega_s), \quad (2.28)$$

¹⁵Единственная функция $F \propto \omega^{1/2}/(t - t_i)^{1/2}$, инвариантная относительно полной группы, является очень особым решением с бесконечными зарядами и однородной фазовой плотностью $f_p \propto (t - t_i)^{-1/2}$.

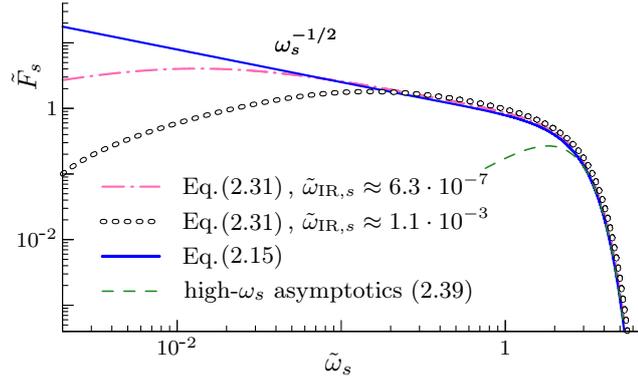


Рис. 2.6: Автомоделные профили, удовлетворяющие ур. (2.28) с $J_{\text{ext},s} = 0$, $D = 5/2$ и одним из граничных условий: требование (2.15) при $\omega_s = 0$ (сплошная линия) или ур. (2.31) при $\omega_s = \omega_{\text{IR},s}$ (цепные точки, штрих-пунктирная линия). Мы используем безразмерные единицы (2.17): $\tilde{F}_s \equiv 2\omega_0 F_s / N_0$ и $\tilde{\omega}_s \equiv \omega_s / (2\omega_0)$. Все решения имеют $\mathcal{J}_{N,s}(0) = -N_0 / (2t_{\text{rel}})$. График с цепными точками повторен на рис. 2.3(b) после перемасштабирования (2.30) с $b \approx 0.75$.

где губка была заменена на масштабно-инвариантное граничное условие (2.15) и мы ввели перемасштабированный источник

$$J_{\text{ext},s}(\omega_s) \equiv t_{\text{rel}} J_{\text{ext}}(t, \omega) / [\alpha^3(\tau)\beta(\tau)], \quad (2.29)$$

который зависит только от ω_s , если J_{ext} имеет симметрию (2.14). Заметим, что перемасштабированный интеграл столкновений $\text{St } F_s$ в ур. (2.28) и перемасштабированные потоки $\mathcal{J}_{N,s}$ и $\mathcal{J}_{E,s}$ в граничном условии (2.15) для F_s даются теми же выражениями (2.10), что и прежде, но с F_s и ω_s , заменяющими F и ω .

Мы получили корректную задачу с граничными условиями (2.15), (2.28) для профилей $F_s(\omega_s)$ с конечными числом частиц и энергиями. Она дает одно решение для каждого $J_{\text{ext},s}(\omega_s) \neq 0$ и $D \neq 5/2$. С другой стороны, при $J_{\text{ext},s} = 0$ и $D = 5/2$ та же задача имеет остаточную симметрию

$$F_s \rightarrow F'_s(\omega_s) = \frac{1}{b} F_s(b^2 \omega_s), \quad (2.30)$$

порождающую семейство решений. Мы параметризуем их перемасштабированным потоком частиц $\mathcal{J}_{N,s}$ при $\omega_s = 0$, который, если отрицателен, указывает на конденсацию. Заметим, что исходный поток зависит от времени: $\mathcal{J}_N(t, 0) = \alpha^3(\tau)\mathcal{J}_{N,s}(0)$, см. ур. (2.1), (2.10).

Численный профиль $F_s(\omega_s)$, удовлетворяющий ур. (2.28) с $J_{\text{ext},s} = 0$, $D = 5/2$ и граничным условиям (2.15), изображен на рис. 2.6 сплошной линией;

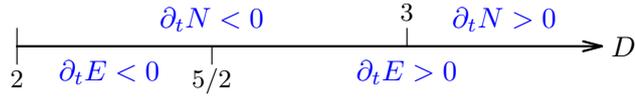


Рис. 2.7: Автомоделные поведения при разных D .

см. Прил. Б.3 для численного метода. Эта функция имеет все характеристики, предварительно показанные на рис. 2.1(b): тепловой низкоэнергетический хвост $F_s \propto \omega_s^{-1/2}$ и экспоненциальный спад при $\omega_s \rightarrow +\infty$.

Примечательно, что при низких ω_s вышеупомянутое решение для F_s существенно отклоняется от аттрактивного профиля в зависящей от времени симуляции на рис. 2.3(b). Это эффект губки конечной ширины (2.16), деформирующей результат симуляции даже при $\omega \gg \omega_{\text{IR}}$. Действительно, давайте симитируем губку, заменив ур. (2.15) на граничное условие Дирихле

$$F_s = 0 \quad \text{при} \quad \omega_s \leq \omega_{\text{IR},s}. \quad (2.31)$$

Это меняет инфракрасный хвост профиля, см. цепные точки и штрихпунктирную линию на рис. 2.6. В частности, график с цепными точками, перемасштабированный согласно ур. (2.30) с $b \approx 0.75$, верно воспроизводит¹⁶ поздний результат симуляции на рис. 2.3(b).

Вышеупомянутое упражнение демонстрирует, что низкоэнергетические хвосты автомоделных решений могут быть сильно деформированы при $\omega_s \gg \omega_{\text{IR},s}$ губками ширины $\omega_{\text{IR},s}$. Но в пределе $\omega_{\text{IR},s} \rightarrow 0$, когда применяется граничное условие (2.15), возникает универсальное тепловое поведение $F_s \propto \omega_s^{-1/2}$ при низких ω_s .

2.5.2 Свойства скейлинговых решений

Автомоделные решения имеют зависящие от времени энергии и число частиц, следовательно, описывают не изолированный газ. Действительно, анзац (2.1), (2.19) дает

$$E = E_s(\tau - \tau_i)^{k_E}, \quad N = \int_0^\infty d\omega F = N_s(\tau - \tau_i)^{k_N}, \quad (2.32)$$

¹⁶В других численных экспериментах мы эволюционировали зависящее от времени кинетическое уравнение с автомоделными губками, напр. $F = 0$ при $\omega \leq \omega_{\text{IR},s}/\beta(\tau)$. Те эволюции приближались к профильным решениям $F_s(\omega_s)$ с тем же $\omega_{\text{IR},s}$.

где использовалось ур. (2.20), мы определили степени

$$k_E = 2 - 5/D, \quad k_N = 1 - 3/D, \quad 3k_E - 5k_N = 1, \quad (2.33)$$

и полные интегралы

$$E_s = \int_0^\infty \omega_s F_s(\omega_s) d\omega_s, \quad N_s = \int_0^\infty F_s(\omega_s) d\omega_s. \quad (2.34)$$

Ниже мы фокусируемся на решениях с конечными E_s и N_s .

Мы видим, что масштабная размерность D контролирует эволюцию зарядов, определяя таким образом физические свойства решений, см. рис. 2.7. В частности, E сохраняется при $D = 5/2$ и N при $D = 3$. Между этими значениями, при $5/2 < D < 3$, автомодельные эволюции могут описывать конденсацию частиц на Бозе-звезду: $\partial_t N < 0$ и $\partial_t E > 0$ в соответствии с обсуждением в параграфе 2.2.

Более того, интегрируя левую и правую части уравнения для профиля (2.28) по ω_s и используя интеграл столкновений (2.10а), мы связываем перемасштабированные заряды с потоками,

$$k_N N_s = t_{\text{rel}} \mathcal{J}_{N,s}(0) + \int_0^\infty J_{\text{ext},s} d\omega_s, \quad (2.35)$$

$$k_E E_s = \int_0^\infty \omega_s J_{\text{ext},s} d\omega_s, \quad (2.36)$$

где мы предположили быстрый спад профиля при $\omega_s = \infty$ и наложили граничное условие (2.15) при $\omega_s = 0$: $\mathcal{J}_{E,s}(\infty) = \mathcal{J}_{N,s}(\infty) = \mathcal{J}_{E,s}(0) = 0$.

Соотношения (2.35), (2.36) информируют нас, что вся энергия, вносимая внешним источником, остается в системе, тогда как число частиц может утекать через границу фазового пространства $\omega_s = 0$ или приходить из-за нее. В частности, $J_{\text{ext},s}$ может быть положительно-определенным (т.е. нагревать все части газа) только при $D > 5/2$. Кроме того, $D < 3$ и положительный $J_{\text{ext},s}$ гарантируют направленный наружу поток конденсации $\mathcal{J}_{N,s}(0) < 0$.

Рисунок 2.8(а) отображает автомодельные профили при $J_{\text{ext},s} \neq 0$ с разными D ; мы использовали граничное условие (2.15) и источник

$$J_{\text{ext},s}(\omega_s) = \frac{J_0}{\text{ch}^2[\omega_s/\sigma - \omega_1]}, \quad (2.37)$$

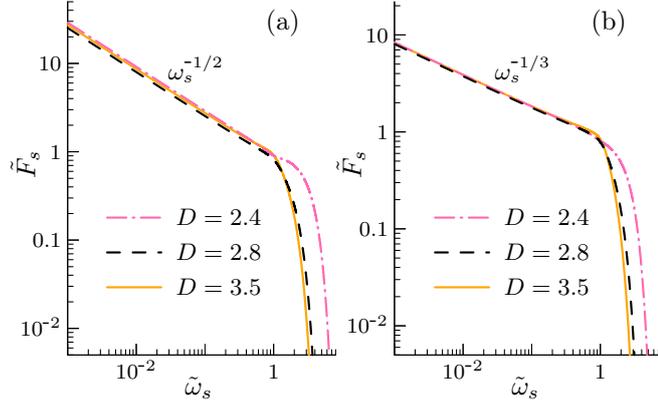


Рис. 2.8: Автомоделные профили при $J_{\text{ext},s} \neq 0$ с низкоэнергетическими хвостами (a) $F_s \propto \omega_s^{-1/2}$ и (b) $F_s \propto \omega_s^{-1/3}$. Мы используем безразмерные единицы (2.17), граничное условие (2.15) и источник энергии (2.37).

полученный автомоделным перемасштабированием (2.29) ур. (2.21). Как и прежде, $\sigma = 0.4\omega_0$ и $\omega_1 = 5$, но теперь мы фиксируем поток конденсации $\mathcal{J}_{N,s}(0) = -N_0/(2t_{\text{rel}})$ для всех решений, настраивая амплитуду источника J_0 . Несмотря на практически идентичную структуру хвостов, профили на рис. 2.8(a) описывают разную физику, см. рис. 2.7. При $D = 2.4$ отрицательный источник потребляет частицы и энергию. Значение E растет при $D = 2.8$ и 3.5 , но эти два случая различаются знаком $\partial_t N$ — отрицательным и положительным, соответственно.

До сих пор мы изучали только профили с тепловыми хвостами Рэлея–Джинса на низких энергиях и экспоненциальными обрезаниями на высоких ω_s . Возникает вопрос о других возможностях.

С одной стороны, степенное высокоэнергетическое поведение $F_s \propto \omega_s^\gamma$ вполне возможно, но не так интересно с физической точки зрения. Действительно, наш интеграл столкновений при $\omega \rightarrow \omega_{\text{UV}}$ сходится только при $\gamma < 0$, см. ур. (2.23). В этом безопасном случае $\text{St } F_s \propto \omega_s^{3\gamma-1}$ является субдоминантным по отношению к $F_s \propto \omega_s^\gamma$ при $\omega_s \rightarrow +\infty$ — следовательно, профиль F_s определяется левой частью кинетического уравнения (2.28). Мы получаем $\gamma = 1/(2 - D)$ или

$$F_s \rightarrow F_\infty \omega_s^{1/(2-D)} \quad \text{при } \omega_s \rightarrow +\infty, \quad (2.38)$$

где $D > 2$ дает $\gamma < 0$. Это статический ансамбль частиц-наблюдателей, которые не участвуют в гравитационном рассеянии: $\text{St } F_s$ незначительный, а исходное распределение равно $F \rightarrow F_\infty \omega^{1/(2-D)}$, см. ур. (2.1), (2.2). Мы не рассматриваем

такую ситуацию в дальнейшем.

Предполагая экспоненциальный спад на высоких ω_s , в Прил. Б.4.2 мы извлекаем асимптотики хорошо локализованных автомодельных профилей,

$$F_s \rightarrow F_\infty \omega_s^{\frac{4-D}{2D-4}} e^{-c_\infty \omega_s^{5/2}} \quad \text{при } \omega_s \rightarrow \infty, \quad (2.39)$$

где F_∞ , $c_\infty \equiv 3N_0^2(D-2)/(20D\omega_0^3G_0)$ и $G_0 = \int_0^\infty d\omega_s \sqrt{\omega_s} F_s^2$ константы. Это универсальное поведение присутствует во всех наших численных профилях, см. пунктирную линию на рис. 2.6. Оно требует $c_\infty > 0$, т.е. экспоненциальный спад реализуется при $D > 2$. Также ур. (2.39) гарантирует ультрафиолетовую сходимость интеграла столкновений и нулевые потоки при $\omega = +\infty$.

С другой стороны, низкоэнергетическая асимптотика гораздо более сложна, поскольку дальнедействующее гравитационное рассеяние становится существенным при $\omega_s \rightarrow 0$. Мы обходим эту трудность, рассматривая только степенные поведения $F_s \approx F_0 \omega_s^\gamma$ в области $0 \leq \omega_s \ll \omega_0$ и поэтому возвращаясь к случаю Колмогорова-Захарова из рис. 2.5, хотя и с зависящим от времени F_0 . Несмотря на различия с параграфом 2.4, мы снова получаем единственные два решения

$$F_s \propto \omega_s^{-1/2} \quad \text{или} \quad \omega_s^{-1/3} \quad \text{при } \omega_s \rightarrow 0. \quad (2.40)$$

Действительно, поток частиц равен первообразной интеграла столкновений (2.23): $\mathcal{J}_{N,s} \propto \omega_s^{3\gamma}$. В нетривиальном случае он остается ненулевым при $\omega_s \rightarrow 0$, следовательно, $\gamma \leq 0$. Для этих степеней, $\text{St } F_s \propto \omega_s^{3\gamma-1}$ доминирует в уравнении для профиля при низких ω_s . Таким образом, кинетические решения появляются, когда он обращается в нуль сам по себе, т.е. в случае (2.40), см. ур. (2.23).

Удивительно, но этот результат не означает, что низкоэнергетические части автомодельных решений стационарны или тривиальны. Действительно, преобразование (2.1) делает обе асимптотики (2.40) зависящими от времени. Кроме того, в Прил. Б.4.1 мы решаем уравнение для профиля, используя последовательное разложение по степеням ω_s . В тепловом случае $\omega_s^{-1/2}$ мы получаем,

$$F_s \rightarrow F_0 \omega_s^{-1/2} + F_3 \omega_s + O(\omega_s^{3/2}) \quad \text{при } \omega_s \rightarrow 0 \quad (2.41)$$

и потоки $\mathcal{J}_{E,s}(0) = 0$, $\mathcal{J}_{N,s}(0) = -15W_0 F_0^2 F_3/4$. Мы видим, что поправки по ω_s генерируют ненулевой поток частиц через границу фазового пространства. Все решения на рис. 2.8(а) удовлетворяют ур. (2.41).

В случае $\omega_s^{-1/3}$ степенное разложение Прил. Б.4.1 дает,

$$F_s \rightarrow F_0 \omega_s^{-1/3} + F_1 \omega_s^{2/3} + O(\omega_s^{4/3}) \quad \text{при} \quad \omega_s \rightarrow 0. \quad (2.42)$$

Мы получаем конечный поток частиц $\mathcal{J}_{N,s}(0) = -729W_0F_0^2F_1/220$ и отрицательный поток энергии $\mathcal{J}_{E,s}(0) = -9W_0F_0^3/40$, см. ур. (2.26). Это означает, что решения (2.42) нарушают граничное условие (2.15), но соответствуют более общим требованиям к конечному потоку, которые будут сформулированы в параграфе 2.5.3. Рассматривая ур. (2.42) как граничное условие, мы успешно вычисляем численные профили с $\omega^{-1/3}$ с источником (2.37), см. рис. 2.8(b). Все они имеют $\mathcal{J}_{E,s}(0) < 0$.

Стоит отметить, что профили $\omega_s^{-1/3}$ происходят из меньшего параметрического семейства по сравнению с решениями с хвостами $\omega_s^{-1/2}$. В следующем подразделе мы обобщим последние до произвольного потока энергии $\mathcal{J}_{E,s}$ при $\omega_s = 0$. Этот же параметр строго фиксирован в решениях $\omega^{-1/3}$, делая их тонко настроенными.

Напомним, что тепловая асимптотика $\omega_s^{-1/2}$ автомодельных решений может быть сильно деформирована губками конечной ширины, и это свойство сохраняется при $J_{\text{ext}} \neq 0$. Например, график с цепными точками на рис. 2.4(b) решает то же уравнение для профиля с $D = 2.8$, что и пунктирная кривая на рис. 2.8(a), но удовлетворяет граничному условию (2.31) с конечным $\omega_{\text{IR},s} = 10^{-3}\omega_0$. В результате он растет при низких ω_s в отличие от профиля на рис. 2.8(a).

Мы также подчеркиваем, что все наши профили с хвостами $\omega^{-1/2}$ являются устойчивыми кинетическими аттракторами. В частности, численные решения зависящего от времени кинетического уравнения на рис. 2.4(b) приближается к таковой с $D = 2.8$. Мы моделировали кинетическую эволюцию с $D = 2.4$ и 3.5 , используя источник, зависящий от времени согласно ур. (2.21) и получили тот же результат: зависящие от времени распределения неизменно приближались к скейлинговым профилям с соответствующими D .

В противоположность этому, мы не наблюдали низкоэнергетическое поведение $F \propto \omega^{-1/3}$ для численных решений зависящего от времени кинетического уравнения, даже ни что либо похожее на него. Мы пытались начинать эволюции с профилей на рис. 2.8(b), но они быстро распадались благодаря неустойчивостям при малых ω . Мы даже не смогли продлить граничное условие (2.42) при $\omega_s \rightarrow 0$ до реалистично выглядящей модели с источниками и губками конеч-

ной ширины: любая модификация вызывала исчезновение хвостов $F_s \propto \omega_s^{-1/3}$. Это сильно указывает на неустойчивость автомоделных профилей с поведением $\omega_s^{-1/3}$ на низких энергиях.

2.5.3 Универсальный предел

Наш эффективный подход имеет один недостаток: скейлинговые профили определяются рукотворными источниками $J_{\text{ext},s}(\omega_s)$. В этом параграфе мы рассматриваем универсальный предел узкого источника, расположенного на границе фазового пространства $\omega_s = 0$.

А именно, давайте постепенно уменьшать ширину $\sigma \rightarrow 0$ источника (2.37) при $\omega_1 = 5/2$. Мы оставляем неизменным перемасштабированное число частиц $N_s = N_0$ решений, настраивая амплитуду источника J_0 . Последовательность двух таких профилей с $D = 2.8$ показана на рис. 2.9. Они почти совпадают и, следовательно, имеют хорошо определенный предел при $\sigma \rightarrow 0$ — конфигурацию с δ -источником, расположенным точно в точке $\omega_s = 0$. Это предельное решение удовлетворяет уравнению для профиля (2.28) с $J_{\text{ext},s} = 0$, но имеет ненулевые потоки частиц и энергии, приходящие из области самых низких энергий. Подходящее граничное условие в этом случае

$$\mathcal{J}_{E,s} = \mathcal{J}_{E,s}^{\text{fixed}} \quad \text{и} \quad |\mathcal{J}_{N,s}| < \infty \quad \text{при} \quad \omega_s = 0; \quad (2.43)$$

оно заменяет ур. (2.15). Накладывая ур. (2.43), мы вычисляем численный профиль с $J_{\text{ext},s} = 0$ и $D = 2.8$, настраивая $\mathcal{J}_{E,s}^{\text{fixed}} \approx 0.157 \omega_0 N_0 / t_{\text{rel}}$, чтобы установить $N_s = N_0$, см. цепные точки на рис. 2.9. Действительно, последний профиль близок к графику с наименьшим σ . Напомним, что фактические потоки этого автомоделного решения зависят от времени при $\omega = 0$,

$$\mathcal{J}_N = \alpha^3(\tau) \mathcal{J}_{N,s}(0) \quad \text{и} \quad \mathcal{J}_E = \alpha^3(\tau) \mathcal{J}_{E,s}(0) / \beta(\tau),$$

для фиксированных $\mathcal{J}_{E,s}(0)$ и $\mathcal{J}_{N,s}(0)$, см. ур. (2.1), (2.10).

Мы проверили, что автомоделные решения с источниками при предельно низких ω_s остаются аттракторами кинетической эволюции. Для этого мы решали зависящее от времени кинетическое уравнение с $D = 2.8$, обрезанием (2.31) при $\omega_{\text{IR},s} = 2 \cdot 10^{-3} \omega_0$ и источником (2.37) амплитуды $J_0 = 1267 N_0 / \omega_0$ при низких $\omega_s \sim \omega_1 \sigma = 10^{-2} \omega_0$. Источник зависел от времени согласно ур. (2.21) с $D = 2.8$ и $\tau_i = -1$, и оставался погруженным глубоко внутри хвоста профиля $\omega^{-1/2}$. Тем не менее, зависящее от времени решение оставалось стабильным

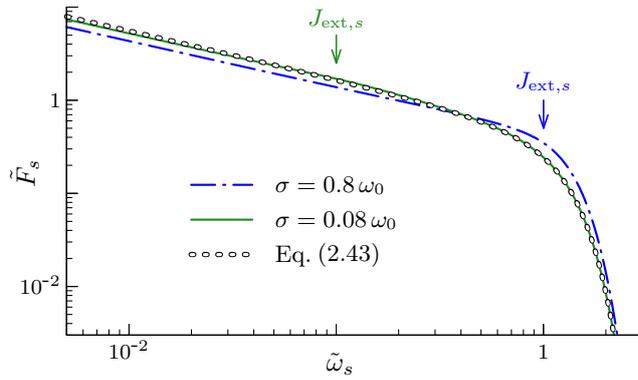


Рис. 2.9: Два автомодельных профиля (от штрих-пунктирной к сплошной линии) с источниками (2.37) уменьшающейся ширины σ и уменьшающимся положением центра $\omega_s = \omega_1 \sigma$ (стрелки над графиками). Мы используем $D = 2.8$, $\omega_1 = 5/2$ и граничное условие (2.15). Амплитуды источников J_0 выбраны так, чтобы зафиксировать перемасштабированное число частиц $N_s = N_0$ решений. Цепные точки показывают универсальный профиль с $J_{\text{ext},s} = 0$, граничным условием (2.43), $\mathcal{J}_{E,s}(0) \approx 0.157 \omega_0 N_0 / t_{\text{rel}}$ и $N_s = N_0$.

в течении времени, равному 95 временам релаксации, и его конечное распределение воспроизводило (с помощью перемасштабирования) профиль, с которого мы начали.

Естественно параметризовать универсальные автомодельные профили через D и $\mathcal{J}_{E,s}^{\text{fixed}}$, см. Прил. Б.3 для аккуратного подсчета свободных параметров. Однако, остаточная масштабная симметрия $F_s \rightarrow F_s(b^2 \omega_s)/b$ уравнения для профиля без источника оставляет для $\mathcal{J}_{E,s}^{\text{fixed}}$ роль константы нормировки. Это превращает ур. (2.28) с $J_{\text{ext},s} = 0$ и граничными условиями (2.39), (2.43) в нелинейную задачу Штурма-Лиувилля для непрерывных «собственных значений» $D \geq 2$ и «собственных функций» $F_s(\omega_s)$. Рисунок 2.10 показывает универсальные профили при разных D .

Стоит отметить, что законы сохранения (2.35), (2.36) упрощаются

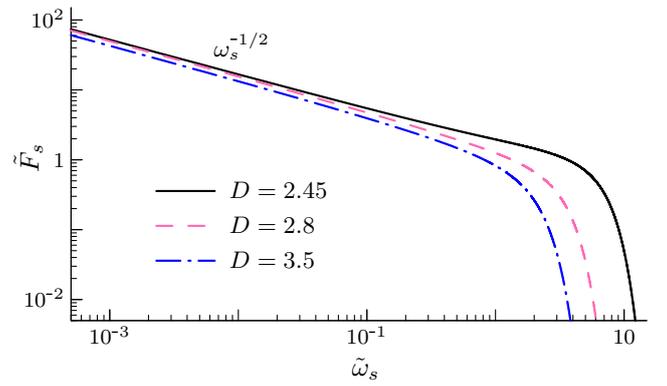


Рис. 2.10: Универсальные автомодельные профили с произвольными D и $|\mathcal{J}_{E,s}(0)| = 2\omega_0 N_0 / t_{\text{rel}}$. Они имеют $J_{\text{ext},s} = 0$ и удовлетворяют граничным условиям (2.39), (2.43)

при $J_{\text{ext},s} = 0$. А именно, интегрируя все члены ур. (2.28) по ω_s , используя интеграл столкновений (2.10а) и граничное условие (2.43), мы получаем,

$$k_N N_s = t_{\text{rel}} \mathcal{J}_{N,s}(0) \quad \text{и} \quad k_E E_s = t_{\text{rel}} \mathcal{J}_{E,s}(0). \quad (2.44)$$

Эти тождества связывают знаки k_N и k_E в ур. (2.33) и рис. 2.7 с направлениями потоков частиц и энергии через границу $\omega_s = 0$. Например, профили с $D = 2.45$ и 2.8, 3.5 на рис. 2.10 имеют отрицательный (направленный наружу) и положительный (входящий) $\mathcal{J}_{E,s}(0) \propto \partial_t E$, соответственно.

Конечно, граничные условия (2.43) меняют инфракрасную асимптотику автомодельных профилей: теперь¹⁷

$$F_s = F_0 \omega_s^{-1/2} + F_1 - \frac{F_1^2}{2F_0} \omega_s^{1/2} + F_3 \omega_s + O(\omega_s^{3/2}), \quad (2.45)$$

при $\omega_s \rightarrow 0$, см. ур. (2.41) и см. Прил. Б.4.1 для вывода. Соответствующие потоки $\mathcal{J}_{E,s}(0) = -3W_0 F_0^2 F_1/2$ и $\mathcal{J}_{N,s}(0) = W_0(7F_1^3 - 15F_0^2 F_3)/4$ имеют произвольные знаки. С другой стороны, высокоэнергетическое поведение универсальных профилей все еще определяется ур. (2.39).

2.6 Адиабатическая автомодельность

2.6.1 Численный пример

Теперь мы переходим к более реалистичной ситуации нарушенной масштабной симметрии (2.12). Это можно сделать, включив источники с произвольной зависимостью от времени, например, произвольным степенным законом

$$J_{\text{ext}}(\tau, \omega) = \frac{J_0}{t_{\text{rel}}} \frac{\tau^{-3/4} \theta(\tau - 1)}{\text{ch}^2(\omega/\sigma - \omega_1)}, \quad (2.46)$$

включающимся при $\tau \geq 1$. Здесь $\tau \equiv t/t_{\text{rel}}$, тогда как J_0 , σ , ω_1 являются константами; см. ур. (2.21). Благодаря нарушению симметрии, анзац (2.1), (2.2) не проходит через кинетическое уравнение. Но мы увидим, тем не менее, что эволюция остается очень близкой к автомодельным профилям.

Возьмем Гауссовы начальные данные (2.18) с $c_N = 43.4$, добавим губку (2.16) и нарушающий масштабную инвариантность источник (2.46) в кинетическое уравнение (2.13). Мы наблюдаем две бросающиеся в глаза закономерности в результате этой зависящей от времени симуляции, см. рис. 2.11.

¹⁷Мы не рассматриваем универсальные решения с неустойчивыми хвостами $\omega^{-1/3}$.

Во-первых, комбинация $E^3(\tau)/N^5(\tau)$ энергии и числа частиц решения эволюционирует почти линейно со временем, см. панель (а) на рис. 2.11. Это отличительный признак автомодельной динамики: ур. (2.32) и (2.33) предсказывают $E^3/N^5 \propto \tau - \tau_i$. Во-вторых, само решение $F(\tau, \omega)$ почти неотлично при каждом τ от перемасштабированных автомодельных профилей $\alpha(\tau)F_s(\beta(\tau)\omega)$, см. сплошные линии и цепные точки на рис. 2.11(b), (c) и (d). Последние скейлинговые решения, однако, имеют разные размерности: $D = D(\tau)$.

Понятно, что произошло. Поскольку автомодельные решения являются кинетическими аттракторами, источник (2.46) не разрушает их полностью, но адиабатически сдвигает их параметры автомодельности со временем. В следующем подразделе мы научимся описывать этот режим адиабатической (приблизительной) автомодельности.

2.6.2 Адиабатическое приближение

Предположим, кинетическая эволюция неявно почти автомодельна с зависящей от времени масштабной размерностью $D = D(\tau)$. Мы вводим масштабированные коэффициенты

$$\alpha(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tau_i}} \exp \left[- \int_1^\tau \frac{1}{D(\tau')} \frac{d\tau'}{\tau' - \tau_i} \right], \quad (2.47)$$

$$\beta(\tau) = \exp \left[\int_1^\tau \left(\frac{2}{D(\tau')} - 1 \right) \frac{d\tau'}{\tau' - \tau_i} \right],$$

которые сводятся к степеням времени (2.19) для не зависящей от времени D ; τ_i является константой¹⁸ и мы определили нижний предел интегрирования $\tau = 1$.

Первый шаг к адиабатической автомодельности — рассматривать автомодельный анзац (2.1) как замену переменных

$$F(\tau, \omega) = \alpha(\tau)F_s(\tau_s, \omega_s), \quad (2.48)$$

где $\tau_s \equiv \ln(\tau - \tau_i)$ — новое время и $\omega_s \equiv \beta(\tau)\omega$. В новых терминах кинетическое уравнение (2.13) выглядит как

$$\partial_{\tau_s} F_s - F_s/D + (2/D - 1)\omega_s \partial_{\omega_s} F_s = t_{\text{rel}} \text{St} F_s + J_{\text{ext},s}(\tau_s, \omega_s), \quad (2.49)$$

¹⁸Более точным подходом может быть использование нестационарных $\tau_i = \tau_i(\tau)$ ценой изобретения дополнительного уравнения для этого параметра.

где $J_{\text{ext},s}$ все еще дается ур. (2.29), но теперь зависит от τ_s . Мы имитируем статическую поглощающую губку при $\omega \lesssim \omega_{\text{IR}}$ граничным условием

$$F_s = 0 \quad \text{при} \quad \omega_s \leq \omega_{\text{IR}}/\beta(\tau), \quad (2.50)$$

см. ур. (2.31).

Мы еще не сделали никаких приближений: вплоть до деталей, задача с граничными условиями (2.49), (2.50) эквивалентна исходному кинетическому уравнению. Но если имеет место адиабатическая автомодельность и параметры преобразования (2.48) выбраны верно, перемасштабированное распределение $F_s(\tau_s, \omega_s)$ медленно зависит от τ_s . Следовательно, первый член $\partial_{\tau_s} F_s$ в ур. (2.49) может быть проигнорирован или рассматриваться как возмущение.

Строго говоря, адиабатическое приближение такого рода требует подавленных нарушающих масштабную инвариантность эффектов, т.е. медленного сдвига перемасштабированного источника $J_{\text{ext},s}(\tau_s, \omega_s)$, см. условие (2.3). Но на практике адиабатические результаты качественно верны даже в общих случаях.

В ведущем адиабатическом порядке мы пренебрегаем производной по времени от F_s в ур. (2.49) и приходим к уравнению для профиля (2.28) с нестационарным источником $J_{\text{ext},s}$. Теперь время входит в задачу как параметр. Это позволяет нам решать при каждом τ ур. (2.28), (2.50) для медленно дрейфующего профиля $F_s = F_s^{(0)}(\tau_s, \omega_s)$, а затем, посредством обратного автомодельного преобразования (2.48), получать приближенное решение исходного кинетического уравнения.

Стоит отметить, что поправки высшего порядка могут быть последовательно включены в адиабатический подход. А именно, вычитая производную по времени от профиля в главном порядке из источника, $J_{\text{ext},s} \rightarrow J_{\text{ext},s} - \partial_{\tau_s} F_s^{(0)}$, затем решить уравнение для профиля (2.28) с таким новым источником в правой части. Результат — более точный профиль второго порядка $F_s^{(1)}$. Дальнейшие шаги вычитания, а затем решения предоставляют профили высшего порядка $F_s^{(n)}$, которые при $n \rightarrow +\infty$ сходятся к точной кинетической эволюции, см. ур. (2.49) и (2.28). Мы будем игнорировать поправки в дальнейшем: профиля $F_s^{(0)}$ будет достаточно.

Отметим, что ур. (2.49) справедливо для любых $D(\tau)$ и τ_i , но наше адиабатическое приближение — нет: правильный выбор этих параметров необходим для хорошей точности. Мы выбираем их в каждом конкретном случае, используя законы сохранения.

Рассмотрим, например, случай из параграфа 2.6.1: predetermined источник $J_{\text{ext}}(\tau, \omega)$ нагревает газ, конденсирующийся в губку. Эволюция энергии газа $E(\tau)$ контролируется исключительно источником, поскольку губка поглощает частицы с $\omega \approx 0$, см. ур. (2.16). Интегрируя левую и правую части кинетического уравнения (2.13) по ω и игнорируя губку, мы получаем,

$$\partial_\tau E \approx t_{\text{rel}} \int_0^\infty J_{\text{ext}}(\tau, \omega') \omega' d\omega', \quad (2.51)$$

где правая часть и, следовательно, $E(\tau)$ могут быть явно вычислены, например, для источника (2.46) из параграфа 2.6.1.

Понятно, что верный параметр $D(\tau)$ должен согласовывать эволюцию энергии в ур. (2.51) с автомодельным законом (2.20). Мы определяем его, используя соотношение

$$\frac{\partial_\tau E}{E} \equiv \frac{k_E(\tau)}{\tau - \tau_i}, \quad \text{где} \quad k_E = 2 - \frac{5}{D(\tau)}, \quad (2.52)$$

дающее явно функцию $D(\tau) = 5/(2 - \partial_{\tau_s} \ln E)$.

На самом деле, ур. (2.52) автоматически устанавливает энергию $E^{(0)}(\tau)$ адиабатического решения в главном порядке равной точной энергии $E(\tau)$. Действительно, уравнение для профиля в ведущем порядке (2.28) для $F_s^{(0)}$ имеет свой собственный закон сохранения (2.36),

$$k_E E_s^{(0)} \approx \int_0^\infty \omega'_s d\omega'_s J_{\text{ext},s}(\tau, \omega'_s) \approx \frac{\beta}{\alpha^3} \partial_\tau E(\tau), \quad (2.53)$$

где во втором равенстве мы выполнили обратное преобразование (2.29) источника и использовали ур. (2.51). Тождество (2.53), определение (2.52) D и автомодельное преобразование $E_s^{(0)} \equiv \beta^2 E^{(0)}/\alpha$ подразумевают $E^{(0)}(\tau) = E(\tau)$.

Мы фиксируем последний автомодельный параметр — начало отсчета времени τ_i — используя данные Коши, а именно, приравнивая массы $M^{(0)}(\tau_2) \equiv M(\tau_2)$ приближенного и точного решений при некотором $\tau = \tau_2$. Последний момент времени будет выбран достаточно большим для установления режима адиабатической автомодельности.

Вышеупомянутый рецепт для нахождения $D(\tau)$ и τ_i завершает формулировку нашего адиабатически автомодельного подхода. Применим его к конкретному источнику (2.46). Определение (2.52) предоставляет $D(\tau)$, меняющееся в относительно широком интервале $2.65 \lesssim D \lesssim 2.75$, см. рис. 2.12(а) и см.

рис. 2.7. Далее мы решаем уравнение для профиля (2.28) с данным $D(\tau)$, обрезанием (2.50) и преобразованным источником (2.46), (2.29) при разных τ . Финальный автомодельный параметр $\tau_i \approx -0.0066$ фиксируется приравнением приближенной и точной масс,¹⁹ $M^{(0)}(\tau_2) = M(\tau_2)$, при $\tau_2 = 5$. Мы приходим к ведущему решению $F^{(0)}(\tau, \omega)$, которое имеет $E^{(0)}(\tau) = E(\tau)$ благодаря выбору $D(\tau)$, см. рис. 2.12(b). Но что гораздо менее тривиально, наша адиабатическая функция распределения $F^{(0)} \approx F$ и полная масса $M^{(0)} \approx M$ также близки к результатам численного решения зависящего от времени кинетического уравнения, см. линии по сравнению с цепными точками на рис. 2.11(b), (c), (d) и линию по сравнению с кругами на рис. 2.12(c). Заметим, что точность нашего адиабатического решения даже лучше, чем оценка $\partial_{\tau_s} \ln D \sim 10^{-2}$ в ур. (2.3).

2.7 Обсуждение

В данной главе предложено описание автомодельной кинетики перенаселённого газа гравитационно взаимодействующих бозонов, окружающего каплю конденсата Бозе–Эйнштейна (Бозе-звезду). Подход основан на том наблюдении, что кинетическое уравнение для такого газа оказывается масштабнo-инвариантным в условиях пространственной однородности и при описании гравитационного рассеяния частиц интегралом Ландау. Эта симметрия, а также возможность обмена частицами и энергией с конденсатом, приводят к семейству автомодельных кинетических решений (2.1), (2.2) с произвольными масштабными размерностями D , конечной энергией и конечным числом частиц. Решения описывают конденсацию газа при $2 < D < 3$ и рост его массы (испарение конденсата) при $D > 3$. Были вычислены профили решений, включая устойчивые профили с хвостами Рэля–Джинса $F \propto \omega^{-1/2}$, схематически показанные на рис. 2.1(b), а также неустойчивые профили с поведением $F \propto \omega^{-1/3}$ при $\omega \rightarrow 0$.

Важным свойством предложенных устойчивых скейлинговых решений является их роль «нетепловых аттракторов» [111]: в процессе кинетической эволюции система стремится к этим решениям независимо от начальных условий. Более того, эволюция остаётся приближённо автомодельной даже при нарушении масштабной инвариантности в кинетическом уравнении. В этом новом режиме адиабатической автомодельности функция распределения остаётся

¹⁹На практике, это уравнение решается методом бисекции τ_i .

близкой к автомодельным профилям, в то время как их масштабная размерность $D = D(t)$ медленно меняется со временем.

Важно отметить, что адиабатическая автомодельность представляет собой мощный инструмент для решения существенно неравновесных кинетических задач. Метод состоит в нахождении последовательности автомодельных решений с различными D и последующем определении временной зависимости $D(t)$ из законов сохранения.

Результаты данной главы открывают несколько перспективных направлений для дальнейших исследований. Во-первых, подход адиабатической автомодельности, применённый к обычной (негравитационной) кинетике, может обобщить известные «нетепловые аттракторы» [62–71] на системы со слабо нарушенной масштабной симметрией. Это может объяснить наблюдаемый в результатах численного моделирования сдвиг масштабных параметров [123, 124] и другие масштабно-асимметричные явления. Во-вторых, кинетика пространственно неоднородного гравитационно взаимодействующего газа может обладать иным типом масштабной симметрии, включающим преобразования координат \mathbf{x} . Если такая симметрия существует, она породила бы новый класс автомодельных решений для бозонного газового облака (гало/мини-кластера) с центральной Бозе-звездой, которое одновременно сжимается и перемасштабирует энергии частиц. Исследование или обнаружение подобного режима в симуляциях представляется чрезвычайно интересной задачей.

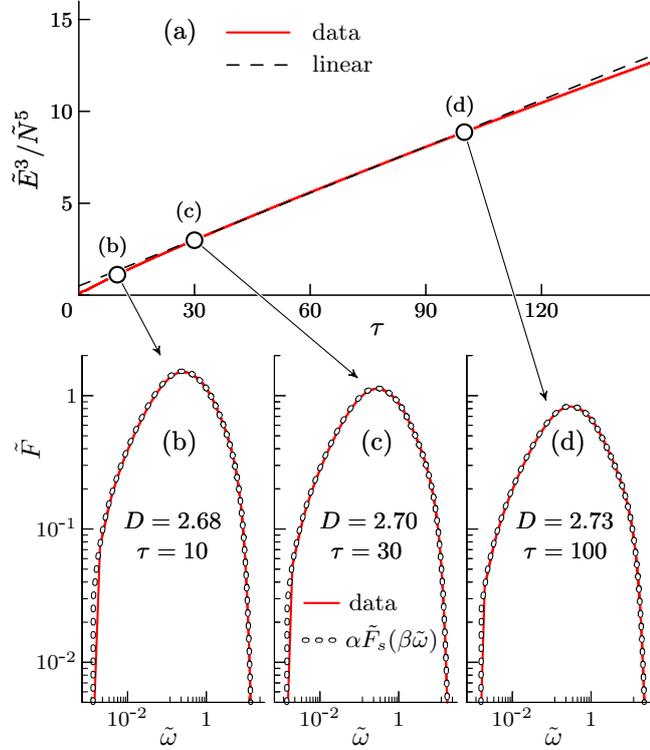


Рис. 2.11: Численное решение зависящего от времени кинетического уравнения (2.13) с нарушающим масштабную инвариантность источником (2.46), губкой (2.16) и Гауссовым начальным распределением (2.18) (сплошные линии). Мы используем безразмерные единицы (2.17), $\tilde{N} \equiv N/N_0$, $\tilde{E} \equiv E/(2\omega_0 N_0)$ и параметры $J_0 = 5N_0/(8\omega_0)$, $\sigma = 0.8\omega_0$, $\omega_1 = 5/2$. (a) Комбинация $E^3(\tau)/N^5(\tau)$, вычисленная на решении (сплошная линия) и линейная функция τ (пунктирная). (b), (c), (d) Функция распределения $F(\tau, \omega)$, найденная из численного решения зависящего от времени кинетического уравнения, при фиксированных τ (сплошные линии) по сравнению с перемасштабированными автомодельными профилями (цепные точки). Масштабные размерности $D(\tau)$ последних указаны на панелях.

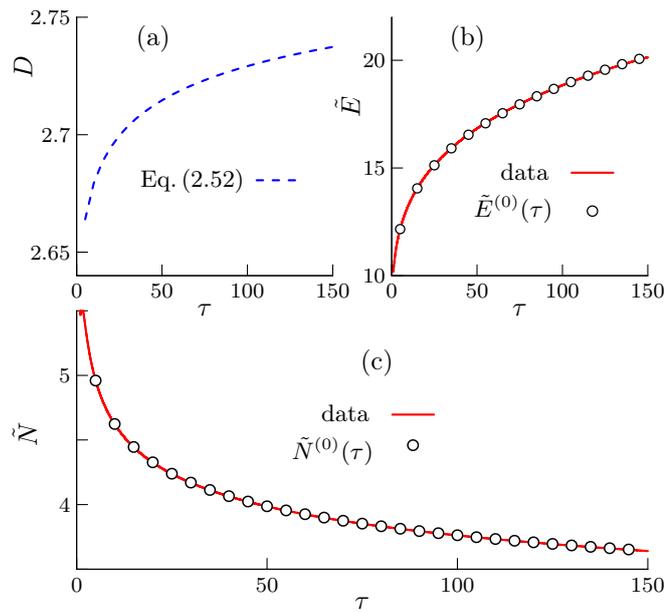


Рис. 2.12: Численное решение кинетического уравнения (2.13) с нарушающим масштабную инвариантность источником (2.46) и губкой (2.16) (сплошные линии) по сравнению с результатом ведущего адиабатического порядка (круги); см. также рис. 2.11. (a) Масштабная размерность $D(\tau)$ в ур. (2.52) (пунктирная линия). (b), (c) Эволюция точных и приближенных энергий $E(\tau) \approx E^{(0)}(\tau)$ и числом частиц $N(\tau) \approx N^{(0)}(\tau)$.

Глава 3

Автомодельный рост Бозе-звезд

3.1 Введение. Рост Бозе-звезд

Бозе-звезды могут быть образованы из частиц легкой темной материи, которая может состоять из КХД-аксионов или «fuzzy» бозонов. Как правило, самодействие легких частиц темной материи очень мало, и им можно пренебречь. Но их плотность в фазовом пространстве настолько велика [36], что термализация может происходить внутри мельчайших космологических структур, посредством универсальных гравитационных взаимодействий [22]. Это приводит к появлению Бозе-звезды в центре каждой такой структуры за кинетическое время [18, 22, 26].

Вопрос в том, как растут новорожденные Бозе-звезды? Моделирования на решетках показывают, что их массы сначала увеличиваются как $M_{bs} \propto t^{1/2}$ [22], а затем рост их массы замедляется [26]. В то же время, полученные в последнее время численные результаты об их поведении противоречивы: $M_{bs} \propto t^{1/8}$ в [26, 42] и $t^{1/4}$ в [58].

В этой главе будет показано, что облако темной материи, окружающее Бозе-звезду, ведет себя приблизительно автомодельным образом, подобно тому, как вели себя уже полученные решения из главы 2. Вычисляя автомодельный поток частиц на звезду, удастся аналитически получить закон ее роста. В результате мы увидим, что масса Бозе-звезды - это не просто степенной закон времени, хотя она может быть кусочно аппроксимирована всеми описанными выше способами. Мы решим задачу роста Бозе-звезд, используя модифицированный метод, разработанный в главе 2, а также обобщим результаты на случай малого, но ненулевого самодействия бозонов.

3.2 Автомодельность облака

Рассмотрим облако нерелятивистских бозонов темной материи внутри наименьшей космологической структуры: миникластера аксионов [8, 31–34, 132]. При малых массах частиц m числа заполнения настолько велики, что бозоны

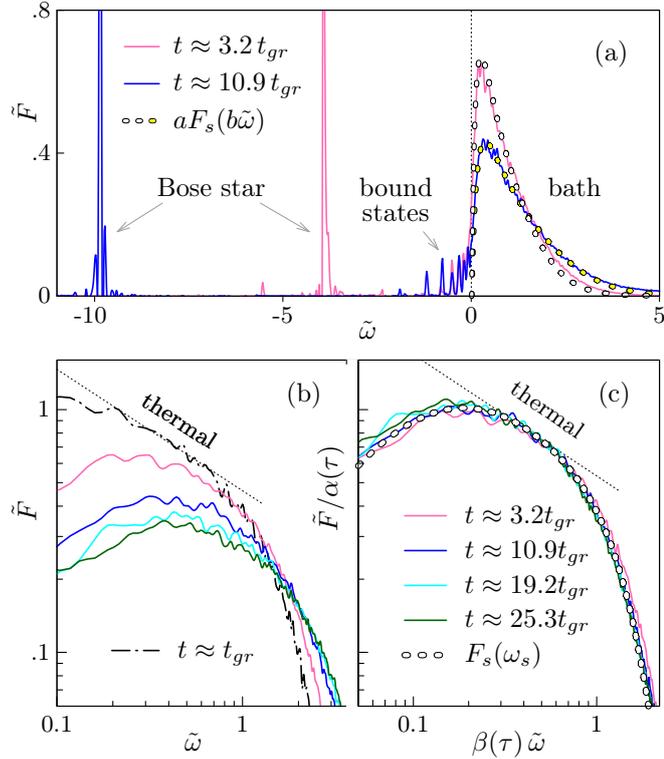


Рис. 3.1: Моделирование ур. (3.1) с $M = 50 p_0/m^2 G$ и $L = 60/p_0$. (a) Спектры (3.2) в два момента времени (сплошные линии). (b) Спектры облака свободных частиц (bath) ($\omega > 0$) при больших временах и (c) их автомодельное преобразование (3.3) с $D = 2.8$. На рисунке (b) включен график для $t \approx t_{gr}$ (штрих-пунктир). Цепные точки на рис. (a), (c) показывают решение ур. (2.28) с $D = 2.8$ и источником (2.21)

описываются случайным классическим полем $\psi(t, \mathbf{x})$, эволюционирующим в собственном гравитационном потенциале $U(t, \mathbf{x})$,

$$\begin{aligned} i\partial_t \psi &= -\Delta \psi / 2m + mU \psi, \\ \Delta U &= 4\pi G (m|\psi|^2 - \bar{\rho}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\bar{\rho} \equiv mN_{tot}/L^3$ — средняя плотность, а N_{tot} — полное число частиц. Для простоты мы аппроксимируем структуру периодическим ящиком размера L .

Мы решаем ур. (3.1), используя стабильный трехмерный код см. [22]. Исходной точкой этой эволюции является вириальное равновесие, т.е. поле с гауссовым распределением и фурье-образом $|\psi_{\mathbf{p}}|^2 \propto mN_{tot} e^{-\mathbf{p}^2/p_0^2}$ и случайными фазами $\arg \psi_{\mathbf{p}}$; здесь, как и в главе 2, $\omega_0 \equiv p_0^2/2m$ — характерная энергия частицы. Мы изучаем распределение числа частиц бозонов $F(t, \omega) = dN/d\omega$ по энергиям

ω , см ур. (2.9). Оно задается фурье-образом по времени [22]:

$$F = \int \frac{dt'}{2\pi} d^3\mathbf{x} \psi^*(t, \mathbf{x}) \psi(t + t', \mathbf{x}) e^{i\omega t' - t'^2/\Delta t^2}, \quad (3.2)$$

где $\Delta t^{-1} \ll \omega_0$ — разрешение по энергии.

Как это было продемонстрировано в параграфе (2.2) и см. Прил. Б.1, в изотропном однородном случае эта функция связана с обычной фазовой плотностью f_p как $F = L^3 m p f_p / 2\pi^2$ ²⁰ с $\omega = p^2/2m$ (2.9). Ниже мы используем безразмерные единицы: $\tilde{F}(t, \tilde{\omega}) \equiv 2\omega_0 F / N_{tot}$ и $\tilde{\omega} \equiv \omega/2\omega_0$, что полностью повторяет определения (2.17), с точностью до переобозначения $N_0 \equiv N_{tot}$.

Наш ансамбль имеет большие числа заполнения и, следовательно, термализуется в конденсат Бозе-Эйнштейна. Это наблюдается в результатах моделирования [22] как фазовый переход в момент времени $t = t_{gr} \equiv 2b\sqrt{2}\omega_0^3/[3\pi^3 G^2 \rho^2 \ln(p_0 L)]$, где $b \approx 0.9$ для гауссова начального распределения.²¹ А именно, после момента времени t_{gr} в спектре $F(t, \omega)$ развивается узкий пик при $\omega \approx \omega_{bs} < 0$, смещающийся со временем к меньшим энергиям; см. рис. 3.1(a) и видео [133]. Пик представляет собой Бозе-звезду [29, 30, 79, 134]: конденсат частиц, занимающих единственный — основной — уровень ω_{bs} в коллективном гравитационном потенциале U . Как только Бозе-звезда появляется, полное число частиц ансамбля можно представить следующим образом: $N_{tot} = N_{bs} + N_e + N$, где (N_{bs}) — число частиц в Бозе-звезды, (N_e) — число частиц в возбужденном связанном состоянии в ее гравитационном поле, а частицы с $\omega > 0$ (N) — облако свободных частиц. Условия для конденсации все еще выполняются, поэтому $N_* = N_{bs} + N_e$ растет при $t > t_{gr}$.

Ниже мы продолжим измерять время в кинетических интервалах $\tau \equiv t/t_{rel}$ и вычислять N_i интегрированием $F(\omega)$ по соответствующим областям. Например, масса «одетой звезды» это $N_* \equiv N_{bs} + N_e = \int_{\omega < 0} F d\omega$, тогда как N и N_{bs} — интегралы по $\omega > 0$ и $\omega \approx \omega_{bs}$, соответственно.

Сделаем важное наблюдение. Рассмотрим спектр при $\omega > 0$, т.е. облако свободных частиц. Оно сильно меняется после образования Бозе-звезды, см. графики с разными τ на рис. 3.1(b). Однако, те же графики совпадают друг с другом на рис. 3.1(c) после зависящего от времени масштабного преобразования F и ω :

$$\tilde{F}(t, \tilde{\omega}) = \alpha F_s(\beta \tilde{\omega}), \quad \alpha = \tau^{-1/D}, \quad \beta = \tau^{2/D-1}, \quad (3.3)$$

²⁰Здесь мы воспользовались тем, что полный объем газа $V_R \equiv L^3$

²¹Как отмечалось в главе 2, момент времени $t_{gr} = 2\sqrt{2}t_{rel}/3$

где $D = 2.8$. Это означает, что облако свободных частиц является приближенно автомодельным и может быть полностью описано функцией $F_s(\omega_s)$.

Это качественное и довольно эвристическое наблюдение позволяет нам воспользоваться результатами главы 2. В частности, для поиска автомодельного профиля $F_s(\omega_s)$ мы численно решаем (2.28), с граничным условием (2.31) с $\omega_{\text{IR}} = 2 \cdot 10^{-2}\omega_0$, а также добавляем внешний источник ур. (2.21) с $J_0 \approx 0.024N_{\text{tot}}/\omega_0$, $\omega_1 = 1.2$ и $\sigma = 2\omega_0$. Эти параметры подобраны для согласованности с результатами численного моделирования. Полученное решение уравнения (2.28) изображено рис. 3.1(a) и (c).

3.3 Рост Бозе-звезд.

Наконец, рассмотрим кинетический рост Бозе-звезд в газе темных бозонов. Мы уже указывали в параграфе 2.2, что этот процесс может быть смоделирован кинетической эволюцией (2.13) с правильно отрегулированными источником J_{ext} и губкой μ . Однако, выражения для последних вывести довольно сложно, см. [58], так что мы будем полагаться на эвристическое наблюдение предыдущего параграфа, что газ вблизи Бозе-звезды эволюционирует адиабатически автомодельным образом. Мы увидим, что этого достаточно для решения задачи роста, хотя нам и потребуется отойти от уже разработанного метода в параграфе (2.6.2).

На этот раз определение (2.52) для $D(\tau)$ непрактично, поскольку эволюция энергии газа не известна заранее. Но у нас есть другой хороший вариант. Адиабатическая автомодельность заставляет $E(\tau)$ ²² и $N(\tau)$ эволюционировать как степени (2.32) времени

$$\frac{\partial_\tau N}{N} \approx \frac{k_N(\tau)}{\tau - \tau_i} \quad \text{и} \quad \frac{\partial_\tau E}{E} \approx \frac{k_E(\tau)}{\tau - \tau_i}, \quad (3.4)$$

с связанными размерностями $3k_E - 5k_N \approx 1$ в ур. (2.33). Давайте сделаем это последнее соотношение точным в ведущем порядке, подстраивая $D(\tau)$ в каждый момент времени:

$$3 \frac{\partial_\tau E^{(0)}}{E^{(0)}} - 5 \frac{\partial_\tau N^{(0)}}{N^{(0)}} = \frac{1}{(\tau - \tau_i)}. \quad (3.5)$$

²² E , как и в главе 2, определена в ур.(2.20) и является энергией свободных частиц.

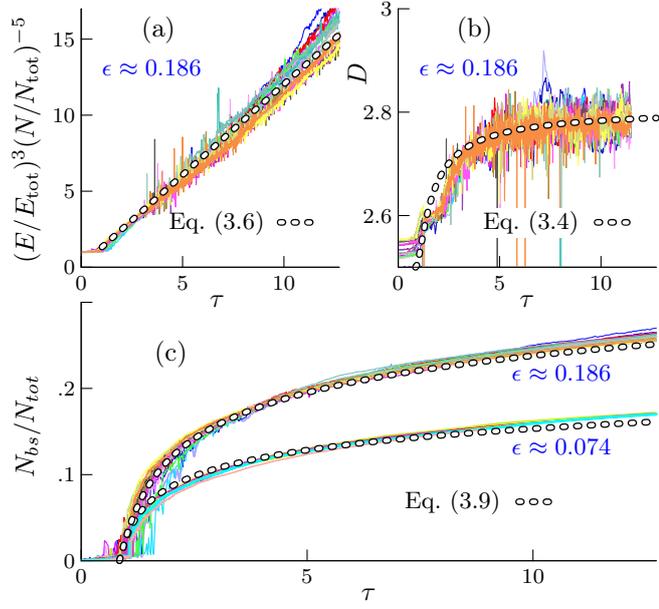


Рис. 3.2: Результаты микроскопических (Шредингер-Пуассоновских) симуляций системы газ-Бозе-звезда в [125] (тонкие флуктуирующие линии) по сравнению с предсказаниями адиабатически автомодельного подхода (цепные точки). Наилучшие подобранные эвристические параметры последнего — $\tau_i \approx -0.085$ и $x_e \approx 0.043$ или 0.021 при $\epsilon \approx 0.074$ или 0.186 . Константы нормировки E_{tot} и N_{tot} представляют полную энергию и полное число частиц системы. (а) Отношение E^3/N^5 по сравнению с автомодельным законом (3.6). (б) Масштабная размерность $D(\tau)$, оцененная из ур. (3.4), (2.33): $D \approx (5 - 3R)/(2 - R)$, где $R \equiv \partial_\tau \ln E / \partial_\tau \ln N$. Перед дифференцированием, мы сгладили флуктуации точных $E(\tau)$ и $N(\tau)$, усредняя их по движущемуся окну $\Delta\tau = 2.5$. (с) Зависимость числа частиц Бозе-звезды $N_{bs}(\tau)$ при двух значениях ϵ .

Равенство (3.5) после интегрирования переходит в приближенное уравнение состояния для автомодельного бозонного газа,

$$\frac{[E^{(0)}(\tau)]^3}{[N^{(0)}(\tau)]^5} = \frac{(\tau - \tau_i)}{\tau_*} \frac{E_{\text{tot}}^3}{N_{\text{tot}}^5}, \quad (3.6)$$

где τ_* есть константа интегрирования и E_{tot} , N_{tot} являются начальными «полными» значениями. На рис. 3.2(а) мы демонстрируем, что соотношение (3.6) (цепные точки) верно воспроизводит микроскопические (Шредингер-Пуассоновские) симуляции системы газ-Бозе-звезда (флуктуирующие линии).

К сожалению, невозможно продолжать вычисление автомодельных профилей, как мы делали это в параграфе (2.6.2). Это заставило бы нас выбрать источник и губку, таким образом отказавшись от функциональной свободы.

Вместо этого мы решим ур. (3.6) вместе с законами сохранения используя τ_i и τ_* как эвристические параметры.

Конечно, полное число частиц N_{tot} и энергия E_{tot} сохраняются,

$$N_{\text{tot}} = N^{(0)} + N_{bs} + N_e, \quad E_{\text{tot}} = E^{(0)} + E_{bs} + E_e, \quad (3.7)$$

в полной системе, включая газ с $N^{(0)}$ частицами и энергией $E^{(0)}$, Бозе-звезду с параметрами N_{bs} , E_{bs} и часть газа с числом частиц и энергией N_e , E_e , занимающих возбужденные уровни в гравитационной яме Бозе-звезды, см. рис. 2.2(b). Заметим, что мы уже использовали параметры N_{tot} и E_{tot} как константы нормировки в ур. (3.6). Наши множественные симуляции показывают, что N_e почти не зависит от времени, а $E_e \approx 0$ по сравнению с энергией Бозе-звезды. Тогда ур. (3.7) связывают величины газа и Бозе-звезды.

Кроме того, сама Бозе-звезда есть гравитационно связанный объект с определенным уравнением состояния,

$$E_{bs} = -\gamma N_{bs}^3, \quad \text{где} \quad \gamma \approx 0.0542 m^5 G^2 \quad (3.8)$$

численная константа; см. Таблицу (1.1) при $l = 0$.

Подставляя ур. (3.7) и (3.8) в ур. (3.6), мы приходим к закону роста для массы Бозе-звезды $M_{bs} \equiv m N_{bs}$,

$$\frac{(1 + x_{bs}^3/\epsilon^2)^3}{(1 - x_e - x_{bs})^5} = \frac{\tau - \tau_i}{\tau_*}, \quad \text{где} \quad x_{bs}(\tau) \equiv \frac{N_{bs}}{N_{\text{tot}}}. \quad (3.9)$$

Он включает эвристические параметры τ_* , τ_i и $x_e \equiv N_e/N_{\text{tot}}$ вместе с известной комбинацией полной энергии и числа частиц $\epsilon^2 = E_{\text{tot}}/(\gamma N_{\text{tot}}^3)$.

На самом деле, один параметр задается начальными данными. Напомним, что Бозе-звезда формируется в газе при $\tau = \tau_{gr} \equiv 2^{3/2}b/3 \approx 0.85$, где $b \approx 0.9$, см. [22]. Накладывая это условие $x_{bs}(\tau_{gr}) = 0$, мы получаем,

$$\tau_* = (\tau_{gr} - \tau_i)(1 - x_e)^5. \quad (3.10)$$

Последние два эвристических параметра определяются из фитирования численных данных. Так мы пришли к универсальному значению $\tau_i \approx -0.1 \tau_{gr}$, которое согласуется со всеми результатами моделирования на рис. 3.2 и малым $x_e \approx 0.043$ и 0.021 при $\epsilon \approx 0.074$ и 0.186 , соответственно. С этими параметрами закон роста (3.9) верно воспроизводит результаты симуляций, см. линии и цепные точки на рис. 3.2(c).

Мы провели значительный статистический тест показанный на рис. 3.2, где мы отображаем $M_{bs}(\tau)$ для 11 численных решений ур.(3.1) с $\epsilon \approx 0.074$ и 22 решений с $\epsilon \approx 0.186$ (сплошные данные по сравнению с теорией изображенной цепными линиями). Эти различные симуляции имеют существенно разные параметры и кинетические времена $10^3 \lesssim \omega_0 t_{gr} \lesssim 3 \cdot 10^4$. Тем не менее, их графики на рис. 3.2(с) сливаются в две различные кривые при двух значениях ϵ , которые согласуются с ур. (3.9).

Заметим, что аналитический подход этого подраздела прост, но ограничен сохраняющимися величинами и неспособен воспроизвести полную функцию распределения. Тем не менее, он полагается на зависящую от времени масштабную размерность $D(\tau)$. Она оценена из ур. (3.4) и показана на рис. 3.2(b), где линии и цепные точки представляют результаты симуляций и аналитический закон роста (3.9), (3.7), соответственно.

3.4 Самодействующие бозоны

Нетривиальная проверка нашей теоретической структуры может быть выполнена путем изучения роста Бозе-звезд в газе самодействующих бозонов. Мы описываем самодействия, добавляя член $\lambda|\psi^2|\psi/(8m^2)$ с константой связи λ в правую часть верхнего уравнения (3.1). Это изменяет полную систему уравнений на систему Гросса-Питаевского-Пуассона ур. (1.2).

В присутствии гравитации, сравнительный эффект самодействия характеризуется безразмерной комбинацией [135] $\tilde{\lambda} = 2\lambda\omega_0/(m^3G)$, где ω_0 — характерная энергия частиц. Наше автомодельное решение (3.9) применимо, если гравитация доминирует, т.е. при [22, 95]

$$\frac{t_{gr}}{t_\lambda} \sim \frac{\sigma_\lambda}{\sigma_{gr}} \simeq \frac{\tilde{\lambda}^2}{1024\pi^2 \ln(p_0 L)} \ll 1. \quad (3.11)$$

Здесь t_{gr} и t_λ — времена релаксации для гравитационного взаимодействия и самодействия, тогда как σ_{gr} и σ_λ — соответствующие транспортные поперечные сечения. Ниже мы сохраняем ²³ $t_{gr}/t_\lambda \lesssim 10^{-2}$ во всех моделированиях.

²³Это отношение еще меньше в основных космологических моделях. Например, $t_{gr}/t_\lambda \sim 10^{-12}$ и $\tilde{\lambda} \sim 10^{-4}$ [22, 95] внутри мини-кластеров аксионов КХД. При этих значениях эффект самодействия на рост Бозе-звезд пренебрежимо мал. Чтобы сделать его значимым, можно переключиться [42, 95] на общие «аксионоподобные» модели с намеренно увеличенным λ .

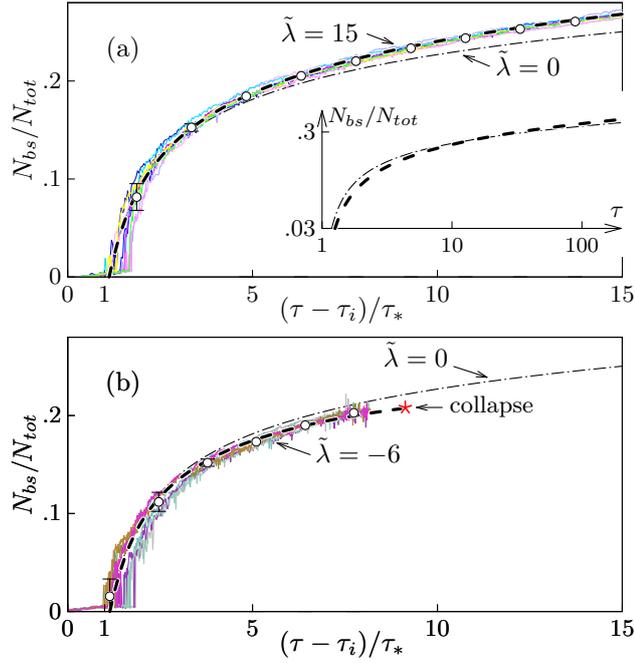


Рис. 3.3: Эволюция массы Бозе-звезд в модели с ненулевым параметром самодействия при $\epsilon \approx 0.186$ и (a) $\tilde{\lambda} = 15$, (b) $\tilde{\lambda} = -6$. Тонкие цветные линии показывают результаты 9+8 моделирований, тогда как толстая штриховая — теория с (a) $\tau_i \approx -0.43$, $x_e \approx 0.023$; (b) $\tau_i \approx 0.12$, $x_e \approx 0.026$. Для справки, мы повторяем теоретическую кривую с $\lambda = 0$ и $\epsilon \approx 0.186$ из рис. 3.2(b) (тонкая штрих-пунктирная линия). Вставка на рис. (a) показывает теоретические кривые с $\tilde{\lambda} = 0$ и $\tilde{\lambda} = 15$ на больших временных масштабах.

Несмотря на уравнение (3.11), самодействия могут модифицировать закон роста Бозе-звезд, и их эффект может быть значительным [42]. Действительно, хотя члены, пропорциональные λ , малы внутри легких звезд, они растут с массой и начинают доминировать [136] при $N_{bs} \gtrsim N_\lambda \equiv |\lambda G|^{-1/2}$. Если самодействие отталкивающее, $\lambda > 0$, это увеличивает энергию тяжелых звезд до $E_{bs} \propto -N_{bs}^2$. Притягивающий случай более драматичен: отрицательное самодействие заставляет Бозе-звезды коллапсировать [38, 42, 136, 137] при $N_{bs} \gtrsim 10.2 N_\lambda$. Таким образом, следует писать вместо уравнения состояния (3.8)

$$E_{bs} = -\gamma N_{bs}^3 \mathcal{E}(N_{bs}/N_\lambda), \quad (3.12)$$

где функция \mathcal{E} учитывает энергию самодействия. Она меньше чем 1 при $\lambda > 0$ и больше единицы если $\lambda < 0$. Кроме того, $\mathcal{E} \approx 1$ при $N_{bs} \ll N_\lambda$, в случае пренебрежимо малого самодействия. На практике, мы вычисляем \mathcal{E} численно, решая систему Гросса-Питаевского-Пуассона для каждого N_{bs}/N_λ .

Используя уравнения (3.6),(3.7) вместе с уравнением состояния (3.12), мы получаем закон роста звезд с учетом самодействия,

$$(1 + x_{bs}^3 \mathcal{E} / \epsilon^2)^3 (1 - x_e - x_{bs})^{-5} \approx (\tau - \tau_i) / \tau_*, \quad (3.13)$$

где $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}(x_{bs} N_{tot} / N_\lambda)$. На качественном уровне уравнение (3.13) согласуется с явлением, рассмотренном в работе [42]: для фиксированных τ_* и τ_i Бозе-звезды растут быстрее при положительном λ ($\mathcal{E} < 1$) и медленнее при отрицательном λ ($\mathcal{E} > 1$). Эта особенность проиллюстрирована на рис. 3.3(a), (b), которые сравнивают две теоретические кривые $x_{bs}(\tau)$, уравнение (3.13), при $\tilde{\lambda} = 15$ и $\tilde{\lambda} = -6$ (толстые штриховые линии) с кривой при $\lambda = 0$ (тонкая штрихпунктирная).

Мы выполнили явный численный тест уравнения (3.13). Начиная с Гауссова начального распределения газа в ящике, мы выполнили 9 моделирований при $\tilde{\lambda} = 15$ и 8 моделирований при $\tilde{\lambda} = -6$. Мы использовали $N_{tot} = 20 p_0 / m^3 G$ и $L = (35 \div 40) / p_0$. Эволюции массы соответствующих Бозе-звезд показаны на рис. 3.3(a), (b) тонкими цветными линиями. Они хорошо описываются уравнением (3.13) (толстая штриховая). Однако, значения подгоночного параметра ²⁴ τ_i отличаются от случая без самодействия: мы получаем $\tau_i \approx -0.51$ при $\tilde{\lambda} = 15$ и $\tau_i \approx 0.14$ при $\tilde{\lambda} = -6$.

Стоит отметить, что зависимость τ_i от $\tilde{\lambda}$ влияет на закон роста Бозе-звезд. При умеренно малых τ , это может даже компенсировать эффект (замедления) ускорения от энергии самодействия, см. вставку на рис. 3.3(a). Однако, на больших временных масштабах собственная энергия побеждает и заставляет рост идти быстрее при $\lambda > 0$ и медленнее при $\lambda < 0$ — см. вставку, снова.

3.5 Оценки для космологии

В этой главе мы продемонстрировали, что кинетика Бозе-Эйнштейновской конденсации автомодельна, если она обусловлена гравитационным (дальнодействующим) рассеянием. Это решает давнюю проблему [119, 121, 138] с отсутствием степенных колмогоровских каскадов в таких системах. Закон роста Бозе-звезды (3.9) был выведен с использованием нового

²⁴Мы все еще извлекаем x_e из функции распределения и вычисляем $\epsilon^2 \equiv E_{tot} / \gamma N_{tot}^3$, используя начальные данные. Значение τ_* фиксируется условием $N_{bs} = 0$ при $\tau = 1$, см. параграф (3.3).

рабочего предположения об «адиабатичности» масштабных параметров. Этот подход может быть полезен в других контекстах.

На сегодняшний день результаты моделирования формирования структуры из легкой темной материи [18, 24, 139] не могут предоставить глобальное распределение Бозе-звезд, которые просто слишком малы. Для этого требуется теоретический вклад из нашего ур. (3.9) и работ [8, 31–34, 132], ср. [140–142]. Рассмотрим, например, растущие Бозе(аксионные)-звезды внутри миникластеров аксионов КХД [8, 31–34, 132]. Последние происходят из аксионных превышений плотности $\Phi = \delta\rho/\rho|_{\text{RD}} \lesssim 10$ в радиационно-доминированную эпоху. Уравнение (3.9) говорит нам, что звезда съедает долю $x_{bs} \sim 0.1$ миникластера за время $t \sim t_{gr} x_{bs}^9 / \epsilon^6$. Это время короче возраста Вселенной, если $\Phi \gtrsim 6 (10 x_{bs} m_4)^{9/8} M_{13}^{3/4}$, где мы использовали оценки [22, 143] и нормировали $M_{13} \equiv M / (10^{-13} M_\odot)$ и $m_4 \equiv m / (10^{-4} \text{эВ})$ на центры обсуждаемых окон масс миникластеров и аксионов КХД [8, 16, 17, 31–34, 132, 144]. Таким образом, реалистично ожидать, что большие части самых плотных миникластеров в настоящее время поглощены их аксионными звездами. Заметим, что последние могут приводить к впечатляющим наблюдательным эффектам, см., например, [53, 128, 145, 146].

Другая популярная модель описывает рост гигантских Бозе-звезд внутри гало галактик «fuzzy» темной материи [18]. Такие звезды не достигают точки замедления роста, если требуемое время $\Delta t \sim 9\epsilon t_{gr}$ превышает возраст Вселенной. Это происходит, если $m \gtrsim 6 \cdot 10^{-21} \text{эВ} \cdot v_{30}^{5/2} M_8^{-3/2}$, где мы нормировали вириальную скорость $v_{30} \equiv v / (30 \text{ км/с})$ и массу $M_8 \equiv M / (10^8 M_\odot)$ на наименьшие карликовые галактики. Мы видим, что «fuzzy» Бозе-звезды не должны успеть дойти до точки замедления роста во всех галактиках, если удовлетворена текущая экспериментальная граница $m \gtrsim 2 \cdot 10^{-20} \text{эВ}$ [13] на массу частицы темной материи.

Заключение

В диссертации была изучена динамика Бозе-звезд, состоящих из аксионов темной материи. Получены следующие результаты.

В главе 1 было аналитически доказано, что вращающиеся нерелятивистские Бозе-звезды неустойчивы при любом ненулевом угловом моменте, в случае притягивающего или отсутствующего короткодействующего взаимодействия между бозонами. Этот результат справедлив для популярных моделей с КХД аксионной или «fuzzy» темной материей.

Получены аналитические выражения, позволяющие оценить время жизни неустойчивых вращающихся звезд, определенных ур. (1.24), (1.46) и представлены Таблице 1.2. Времена жизни всегда сравнимы с обратными энергиями связи ω_{bs}^{-1} Бозе-звезд и меньше времен свободного падения в их гравитационных полях. Таким образом, вращающиеся звезды (1.1) не могут образовываться в реалистичных сценариях формирования [18, 22, 26, 26, 41, 42] и фактически не могут даже считаться долгоживущими квазистационарными состояниями.

В главе 2 мы изучили автомодельную кинетику для ансамбля, состоящего из перенаселенного газа гравитационно взаимодействующих бозонов, окружающего конденсат Бозе-Эйнштейна (Бозе-звезду). Наш подход основан на наблюдении, что кинетическое уравнение для этого газа масштабно-инвариантно, в приближении пространственной однородности и малой передачи импульса в результате рассеяния - приближении Ландау. Симметрия, а также возможность обмена частицами или энергией с конденсатом обуславливает существование семейства автомодельных решений кинетического уравнения (2.1), (2.2) с произвольными масштабными размерностями D , конечными энергиями и числом частиц. Эти решения описывают конденсацию газа при $2 < D < 3$, а также, по-видимому, испарение конденсата при $D > 3$. Мы вычислили, как устойчивые профили решений с хвостами Рэлея-Джинса $F \propto \omega^{-1/2}$, а также и неустойчивые с поведением $F \propto \omega^{-1/3}$ при $\omega \rightarrow 0$.

Важным свойством найденных устойчивых решений является то, что они выступают в роли «нетепловых аттракторов» [111] для кинетических эволюций. Это означает, что функции распределения со временем стремятся к этим решениям независимо от начальных условий. Более того, в процессе эволюции функция распределения остается приближенно автомодельной, даже если мас-

штабная инвариантность исходного кинетического уравнения явно нарушена. В этом новом режиме, который мы называем режимом адиабатической автомодельности, функция распределения следует за медленно эволюционирующими автомодельными профилями, масштабная размерность которых медленно изменяется со временем, $D = D(t)$. На основе этого наблюдения был разработан эффективный метод решения существенно неравновесных кинетических задач.

Численное моделирование, проведенное в главе 3, посвящено изучению эволюции ансамбля гравитационно взаимодействующих бозонов, содержащего Бозе-звезду. Анализ данных моделирования позволил заключить, что временная зависимость функции распределения частиц в ансамбле имеет приближенно автомодельный характер. Данный вывод получил независимое подтверждение с помощью прямого сравнения с эволюцией функции распределения в модели, построенной на основе уравнения Больцмана. Обнаруженная согласованность результатов сделала возможным использование разработанного в главе 2 подхода для вывода закона роста Бозе-звезды (3.9).

Результаты применения метода главы 2 к описанию процесса роста Бозе-звезды внутри миникластеров из аксионов КХД [8, 31–34, 132] представлены в главе 3. Согласно полученным результатам, основная масса вещества наиболее плотных миникластеров на текущий момент содержится в их аксионных звездах.

Результаты диссертационного исследования открывают несколько направлений для будущей научной работы. Во-первых, подход адиабатической автомодельности, примененный к обычной негравитационной кинетике, может обобщить существующие «нетепловые аттракторы» [62–71] на системы со слегка нарушенной масштабной симметрией. Этот подход также может объяснить сдвиг параметров масштабирования [123, 124], наблюдаемый в результатах численного моделирования, и другие масштабно-асимметричные явления. Во-вторых, ключевой задачей в свете полученных результатов представляется вывод кинетического уравнения для неоднородного гравитирующего газа, аналогичного уравнению с интегралом столкновений Ландау для однородного случая. Интересным будет исследовать это уравнение на наличие симметрий относительно масштабных преобразований, включающих преобразование пространственных координат \mathbf{x} . Наличие подобной симметрии стало бы основанием для предсказания существования нового класса автомодельных решений и их поиска методами численного моделирования. В-третьих и наконец, примене-

ние нашего адиабатического подхода к росту Бозе-звезд из аксионов темной материи [125] было удивительно успешным: грубое требование автомодельности (приближенной автомодельности) предоставило эвристический закон (3.9), объясняющий результаты численного моделирования. Этот метод может быть подтвержден выводом из первых принципов. Для этого требуется вывести интеграл столкновений для процессов перехода частиц на Бозе-звезду, см. [58], что позволит найти явный вид члена кинетического уравнения, нарушающего масштабную инвариантность, — аналога источника и губки в ур. (2.13). Имея этот результат, адиабатическое разложение в параграфе 2.6.2 дало бы последовательное автомодельное описание конденсации и точное уравнение для $D(t)$.

Стоит отметить, что уточнение закона роста для Бозе-звезд, состоящих из частиц темной материи, полученного в данной работе, позволит точнее определить распространенность этих объектов в современной Вселенной (см. также [59–61]), таким образом открывая новые пути для обнаружения (или ограничений) ультралегкой и аксионоподобной темной материи.

Автор выражает огромную благодарность своему научному руководителю Александру Григорьевичу Панину и своим соавторам Дмитрию Геннадьевичу Левкову и Игорю Ивановичу Ткачеву за совместную плодотворную работу на протяжении многих лет, за наставничество и поддержку.

Автор благодарит научный коллектив отдела теоретической физики Института ядерных исследований РАН и кафедры физики частиц и космологии Физического факультета МГУ за создание замечательной рабочей и творческой атмосферы, за консультации и помощь.

Автор благодарит оппонентов за внимательное чтение диссертации и ценные комментарии. Автор выражает признательность диссертационному совету ИЯИ РАН за рассмотрение данной диссертации.

Литература

- [1] Peccei R. D., Quinn H. R. CP Conservation in the Presence of Pseudoparticles // Phys. Rev. Lett. — 1977. — Jun. — Vol. 38. — P. 1440–1443. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.38.1440>.
- [2] Nambu Y. Axial Vector Current Conservation in Weak Interactions // Phys. Rev. Lett. — 1960. — Apr. — Vol. 4. — P. 380–382. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.4.380>.
- [3] Goldstone J. Field theories with « Superconductor » solutions // Il Nuovo Cimento (1955-1965). — 1961. — Vol. 19. — P. 154–164. — Access mode: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120409034>.
- [4] The QCD axion, precisely / Grilli di Cortona G., Hardy E., Pardo Vega J., and Villadoro G. // JHEP. — 2016. — Vol. 01. — P. 034. — 1511.02867.
- [5] Graham P. W., Scherlis A. Stochastic axion scenario // Phys. Rev. D. — 2018. — Aug. — Vol. 98. — P. 035017. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.035017>.
- [6] Takahashi F., Yin W., Guth A. H. QCD axion window and low-scale inflation // Phys. Rev. D. — 2018. — Jul. — Vol. 98. — P. 015042. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.015042>.
- [7] Rosa J., Ventura L. Spontaneous breaking of the Peccei-Quinn symmetry during warm inflation. — 2021. — 05.
- [8] Kolb E. W., Tkachev I. I. Axion miniclusters and Bose stars // Phys. Rev. Lett. — 1993. — Vol. 71. — P. 3051–3054. — hep-ph/9303313.
- [9] Kibble T. Topology of cosmic domains and strings // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 2001. — 01. — Vol. 9. — P. 1387.
- [10] Gorghetto M., Hardy E., Villadoro G. Axions from strings: the attractive solution // Journal of High Energy Physics. — 2018. — 07. — Vol. 2018. — P. 151.

- [11] Gorghetto M., Hardy E., Villadoro G. More Axion Stars from Strings. — 2024. — 05.
- [12] Marsh D. J., Niemeyer J. C. Strong Constraints on Fuzzy Dark Matter from Ultrafaint Dwarf Galaxy Eridanus II // *Phys. Rev. Lett.* — 2019. — Vol. 123, no. 5. — P. 051103. — 1810.08543.
- [13] Rogers K. K., Peiris H. V. Strong Bound on Canonical Ultralight Axion Dark Matter from the Lyman-Alpha Forest // *Phys. Rev. Lett.* — 2021. — Vol. 126, no. 7. — P. 071302. — 2007.12705.
- [14] Hlozek R., Marsh D. J. E., Grin D. Using the Full Power of the Cosmic Microwave Background to Probe Axion Dark Matter // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2018. — Vol. 476, no. 3. — P. 3063–3085. — 1708.05681.
- [15] Raffelt G. G. Astrophysical axion bounds // *Lect. Notes Phys.* — 2008. — Vol. 741. — P. 51–71. — hep-ph/0611350.
- [16] Klaer V. B., Moore G. D. The dark-matter axion mass // *JCAP.* — 2017. — Vol. 11. — P. 049. — 1708.07521.
- [17] Gorghetto M., Hardy E., Villadoro G. More axions from strings // *SciPost Phys.* — 2021. — Vol. 10, no. 2. — P. 050. — 2007.04990.
- [18] Schive H.-Y., Chiueh T., Broadhurst T. Cosmic Structure as the Quantum Interference of a Coherent Dark Wave // *Nature Phys.* — 2014. — Vol. 10. — P. 496–499. — 1406.6586.
- [19] Schive H.-Y. et al. Understanding the Core-Halo Relation of Quantum Wave Dark Matter from 3D Simulations // *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — Vol. 113, no. 26. — P. 261302. — 1407.7762.
- [20] Deciphering the Soliton-Halo Relation in Fuzzy Dark Matter / Liao P.-Y., Su G.-M., Schive H.-Y., et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2025. — Aug. — Vol. 135. — P. 061002. — 2412.09908.
- [21] Mocz P. et al. Galaxy formation with BECDM – I. Turbulence and relaxation of idealized haloes // *MNRAS.* — 2017. — Vol. 471, no. 4. — P. 4559. — 1705.05845.

- [22] Levkov D. G., Panin A. G., Tkachev I. I. Gravitational Bose-Einstein condensation in the kinetic regime // *Phys. Rev. Lett.* — 2018. — Vol. 121, no. 15. — P. 151301. — 1804.05857.
- [23] Veltmaat J., Niemeyer J. C., Schwabe B. Formation and structure of ultralight bosonic dark matter halos // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Vol. 98, no. 4. — P. 043509. — 1804.09647.
- [24] Schwabe B., Niemeyer J. C. Deep Zoom-In Simulation of a Fuzzy Dark Matter Galactic Halo // *Phys. Rev. Lett.* — 2022. — Vol. 128, no. 18. — P. 181301. — 2110.09145.
- [25] Simulating mixed fuzzy and cold dark matter / Schwabe B., Gosenca M., Behrens C., Niemeyer J. C., and Easter R. // *Phys. Rev. D.* — 2020. — Vol. 102, no. 8. — P. 083518. — 2007.08256.
- [26] Eggemeier B., Niemeyer J. C. Formation and mass growth of axion stars in axion miniclusters // *Phys. Rev. D.* — 2019. — Vol. 100, no. 6. — P. 063528. — 1906.01348.
- [27] Mina M., Mota D. F., Winther H. A. Solitons in the dark: First approach to non-linear structure formation with fuzzy dark matter // *Astron. Astrophys.* — 2022. — Vol. 662. — P. A29. — 2007.04119.
- [28] Amin M. A., May S., Mirbabayi M. Early Growth of Structure in Warm Wave Dark Matter. — 2025. — 2506.12131.
- [29] Ruffini R., Bonazzola S. Systems of selfgravitating particles in general relativity and the concept of an equation of state // *Phys. Rev.* — 1969. — Vol. 187. — P. 1767–1783.
- [30] Tkachev I. Coherent Scalar-Field Oscillations Forming Compact Astrophysical Object // *Soviet Astronomy Letters.* — 1986. — Vol. 12. — P. 305–308. — Access mode: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1986SvAL...12..305T>.
- [31] Kolb E. W., Tkachev I. I. Nonlinear axion dynamics and formation of cosmological pseudosolitons // *Phys. Rev. D.* — 1994. — Vol. 49. — P. 5040–5051. — astro-ph/9311037.

- [32] Vaquero A., Redondo J., Stadler J. Early seeds of axion miniclusters // JCAP. — 2019. — Vol. 04. — P. 012. — 1809.09241.
- [33] Buschmann M., Foster J. W., Safdi B. R. Early-Universe Simulations of the Cosmological Axion // Phys. Rev. Lett. — 2020. — Vol. 124, no. 16. — P. 161103. — 1906.00967.
- [34] Ellis D., Marsh D. J. E., Behrens C. Axion Miniclusters Made Easy // Phys. Rev. D. — 2021. — Vol. 103, no. 8. — P. 083525. — 2006.08637.
- [35] Miniclusters from axion string simulations / Pierobon G., Redondo J., Saikawa K., Vaquero A., and Moore G. D. — 7. — 2307.09941.
- [36] Tkachev I. I. On the possibility of Bose star formation // Phys. Lett. — 1991. — Vol. B261. — P. 289–293.
- [37] Dev P. S. B., Lindner M., Ohmer S. Gravitational waves as a new probe of Bose–Einstein condensate Dark Matter // Phys. Lett. — 2017. — Vol. B773. — P. 219–224. — 1609.03939.
- [38] Levkov D. G., Panin A. G., Tkachev I. I. Relativistic axions from collapsing Bose stars // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Vol. 118, no. 1. — P. 011301. — 1609.03611.
- [39] Tkachev I. I. Fast radio bursts and axion miniclusters // JETP Letters. — 2015. — Vol. 101, no. 1. — P. 1–6.
- [40] Kehayias J., Kephart T. W., Weiler T. J. The excess radio background and fast radio transients // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2015. — oct. — Vol. 2015, no. 10. — P. 053. — Access mode: <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2015/10/053>.
- [41] Seidel E., Suen W.-M. Formation of solitonic stars through gravitational cooling // Phys. Rev. Lett. — 1994. — Vol. 72. — P. 2516–2519. — gr-qc/9309015.
- [42] Chen J. et al. New insights into the formation and growth of boson stars in dark matter halos // Phys. Rev. D. — 2021. — Vol. 104, no. 8. — P. 083022. — 2011.01333.

- [43] Schwabe B., Niemeyer J. C., Engels J. F. Simulations of solitonic core mergers in ultralight axion dark matter cosmologies // *Phys. Rev. D.* — 2016. — Vol. 94, no. 4. — P. 043513. — 1606.05151.
- [44] Amin M. A., Mocz P. Formation, gravitational clustering, and interactions of nonrelativistic solitons in an expanding universe // *Phys. Rev. D.* — 2019. — Vol. 100, no. 6. — P. 063507. — 1902.07261.
- [45] Hertzberg M. P., Li Y., Schiappacasse E. D. Merger of Dark Matter Axion Clumps and Resonant Photon Emission // *JCAP.* — 2020. — Vol. 07. — P. 067. — 2005.02405.
- [46] Ultralight scalars as cosmological dark matter / Hui L., Ostriker J. P., Tremaine S., and Witten E. // *Phys. Rev. D.* — 2017. — Vol. 95, no. 4. — P. 043541. — 1610.08297.
- [47] Tidal disruption of fuzzy dark matter subhalo cores / Du X., Schwabe B., Niemeyer J. C., and Bürger D. // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Vol. 97, no. 6. — P. 063507. — 1801.04864.
- [48] Li X., Hui L., Yavetz T. D. Oscillations and Random Walk of the Soliton Core in a Fuzzy Dark Matter Halo // *Phys. Rev. D.* — 2021. — Vol. 103, no. 2. — P. 023508. — 2011.11416.
- [49] Schive H.-Y., Chiueh T., Broadhurst T. Soliton Random Walk and the Cluster-Stripping Problem in Ultralight Dark Matter // *Phys. Rev. Lett.* — 2020. — Vol. 124, no. 20. — P. 201301. — 1912.09483.
- [50] Zakharov V. E., Kuznetsov E. A. Solitons and collapses: two evolution scenarios of nonlinear wave systems // *Physics-Uspekhi.* — 2012. — jun. — Vol. 55, no. 6. — P. 535–556. — Access mode: <https://doi.org/10.3367/2Fufne.0182.201206a.0569>.
- [51] Chavanis P.-H. Mass-radius relation of Newtonian self-gravitating Bose-Einstein condensates with short-range interactions: I. Analytical results // *Phys. Rev. D.* — 2011. — Vol. 84. — P. 043531. — 1103.2050.
- [52] Hertzberg M. P., Schiappacasse E. D. Dark Matter Axion Clump Resonance of Photons // *JCAP.* — 2018. — Vol. 11. — P. 004. — 1805.00430.

- [53] Levkov D., Panin A., Tkachev I. Radio-emission of axion stars // *Phys. Rev. D.* — 2020. — Vol. 102, no. 2. — P. 023501. — 2004.05179.
- [54] Abbott B. P. et al. GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs // *Phys. Rev. X.* — 2019. — Vol. 9, no. 3. — P. 031040. — 1811.12907.
- [55] Abbott B. P. et al. Binary Black Hole Population Properties Inferred from the First and Second Observing Runs of Advanced LIGO and Advanced Virgo // *Astrophys. J. Lett.* — 2019. — Vol. 882, no. 2. — P. L24. — 1811.12940.
- [56] Abbott R. et al. Tests of General Relativity with Binary Black Holes from the second LIGO-Virgo Gravitational-Wave Transient Catalog. — 2010.14529.
- [57] Kaup D. J. Klein-Gordon Geon // *Phys. Rev.* — 1968. — Vol. 172. — P. 1331–1342.
- [58] Chan J. H.-H., Sibiryakov S., Xue W. Condensation and evaporation of boson stars // *JHEP.* — 2024. — Vol. 2401. — P. 071. — 2207.04057.
- [59] Maseizik D., Sigl G. Distributions and collision rates of ALP stars in the Milky Way // *Phys. Rev. D.* — 2024. — Vol. 110, no. 8. — P. 083015. — 2404.07908.
- [60] Radio lines from accreting axion stars / Maseizik D., Mondal S., Seong H., and Sigl G. // *JCAP.* — 2025. — Vol. 2505. — P. 033. — 2409.13121.
- [61] Gorghetto M., Hardy E., Villadoro G. More axion stars from strings // *JHEP.* — 2024. — Vol. 2408. — P. 126. — 2405.19389.
- [62] Semikoz D. V., Tkachev I. I. Kinetics of Bose condensation // *Phys. Rev. Lett.* — 1995. — Vol. 74. — P. 3093–3097. — hep-ph/9409202.
- [63] Semikoz D. V., Tkachev I. I. Condensation of bosons in kinetic regime // *Phys. Rev.* — 1997. — Vol. D55. — P. 489–502. — hep-ph/9507306.
- [64] Nowak B., Gasenzer T. Universal dynamics on the way to thermalization // *New J. Phys.* — 2014. — Vol. 16, no. 9. — P. 093052. — 1206.3181.

- [65] Turbulent thermalization process in heavy-ion collisions at ultrarelativistic energies / Berges J., Boguslavski K., Schlichting S., and Venugopalan R. // Phys. Rev. D. — 2014. — Vol. 89, no. 7. — P. 074011. — 1303.5650.
- [66] Universal attractor in a highly occupied non-Abelian plasma / Berges J., Boguslavski K., Schlichting S., and Venugopalan R. // Phys. Rev. D. — 2014. — Vol. 89, no. 11. — P. 114007. — 1311.3005.
- [67] Universality far from equilibrium: From superfluid Bose gases to heavy-ion collisions / Berges J., Boguslavski K., Schlichting S., and Venugopalan R. // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Vol. 114, no. 6. — P. 061601. — 1408.1670.
- [68] Piñeiro Orioli A., Boguslavski K., Berges J. Universal self-similar dynamics of relativistic and nonrelativistic field theories near nonthermal fixed points // Phys. Rev. D. — 2015. — Vol. 92, no. 2. — P. 025041. — 1503.02498.
- [69] Chantesana I., Piñeiro Orioli A., Gasenzer T. Kinetic theory of nonthermal fixed points in a Bose gas // Phys. Rev. A. — 2019. — Vol. 99, no. 4. — P. 043620. — 1801.09490.
- [70] Schmied C.-M., Mikheev A. N., Gasenzer T. Non-thermal fixed points: Universal dynamics far from equilibrium // Int. J. Mod. Phys. A. — 2019. — Vol. 34, no. 29. — P. 1941006. — 1810.08143.
- [71] Numerical analysis of a self-similar turbulent flow in Bose-Einstein condensates / Semisalov B. V., Grebenev V. N., Medvedev S. B., and Nazarenko S. V. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations. — 2021. — Nov. — Vol. 102. — P. 105903. — 2104.14591.
- [72] Landau L., Lifshitz E. Course of Theoretical Physics, vol. 9 "Statistical Physics: Theory of the Condensed State" by E.M. Lifshitz and L.P. Pitaevskii. — Butterworth-Heinemann, 1980.
- [73] Silveira V., de Sousa C. M. Boson star rotation: A Newtonian approximation // Phys. Rev. D. — 1995. — Vol. 52. — P. 5724–5728. — astro-ph/9508034.
- [74] Ryan F. D. Spinning boson stars with large selfinteraction // Phys. Rev. D. — 1997. — Vol. 55. — P. 6081–6091.

- [75] Schunck F. E., Mielke E. W. Rotating boson star as an effective mass torus in general relativity // *Phys. Lett. A.* — 1998. — Vol. 249. — P. 389–394.
- [76] Nonlinear Dynamics of Spinning Bosonic Stars: Formation and Stability / Sanchis-Gual N., Di Giovanni F., Zilhão M., Herdeiro C., Cerdá-Durán P., Font J., and Radu E. // *Phys. Rev. Lett.* — 2019. — Vol. 123, no. 22. — P. 221101. — 1907.12565.
- [77] Dynamical bar-mode instability in spinning bosonic stars / Di Giovanni F., Sanchis-Gual N., Cerdá-Durán P., Zilhão M., Herdeiro C., Font J. A., and Radu E. // *Phys. Rev. D.* — 2020. — Vol. 102, no. 12. — P. 124009. — 2010.05845.
- [78] Siemonsen N., East W. E. Stability of rotating scalar boson stars with nonlinear interactions // *Phys. Rev. D.* — 2021. — Vol. 103, no. 4. — P. 044022. — 2011.08247.
- [79] Niemeyer J. C. Small-scale structure of fuzzy and axion-like dark matter // *Prog. Part. Nucl. Phys.* — 2020. — Vol. 113. — P. 103787. — 1912.07064.
- [80] <https://www.youtube.com/playlist?list=PLMxQF3HFStX2o2ocew9aS6GoQtsz> 2021.
- [81] Vakhitov N., Kolokolov A. Stationary solutions of the wave equation in the medium with nonlinearity saturation // *Radiophys. Quantum Electron.* — 1971. — Vol. 16. — P. 783.
- [82] Black hole formation from axion stars / Helfer T., Marsh D. J. E., Clough K., Fairbairn M., Lim E. A., and Becerril R. // *JCAP.* — 2017. — Vol. 03. — P. 055. — 1609.04724.
- [83] Stable vortex in Bose-Einstein condensate dark matter / Nikolaieva Y. O., Olashyn A. O., Kuriatnikov Y. I., Vilchynskii S. I., and Yakimenko A. I. — 2103.07856.
- [84] Rosenberg L. J., Rybka G., Safdi B. Axions and Other Similar Particles // *Phys. Rev. D.* — 2024. — Vol. 110. — P. 030001. — Access mode: <https://pdg.lbl.gov/2025/reviews/rpp2024-rev-axions.pdf>.

- [85] Sikivie P. Axion Cosmology // Lect. Notes Phys. — 2008. — Vol. 741. — P. 19–50. — astro-ph/0610440.
- [86] Chadha-Day F., Ellis J., Marsh D. J. E. Axion dark matter: What is it and why now? // Sci. Adv. — 2022. — Vol. 8, no. 8. — P. abj3618. — 2105.01406.
- [87] Marsh D. J. E. Axion Cosmology // Phys. Rept. — 2016. — Vol. 643. — P. 1–79. — 1510.07633.
- [88] Ferreira E. G. M. Ultra-light dark matter // Astron. Astrophys. Rev. — 2021. — Vol. 29, no. 1. — P. 7. — 2005.03254.
- [89] Eberhardt A., Ferreira E. G. M. Ultralight fuzzy dark matter review. — 7. — 2507.00705.
- [90] Hui L. Wave Dark Matter // Ann. Rev. Astron. Astrophys. — 2021. — Vol. 59. — P. 247–289. — 2101.11735.
- [91] Sikivie P., Yang Q. Bose-Einstein Condensation of Dark Matter Axions // Phys. Rev. Lett. — 2009. — Vol. 103. — P. 111301. — 0901.1106.
- [92] Erken O. et al. Cosmic axion thermalization // Phys. Rev. — 2012. — Vol. D85. — P. 063520. — 1111.1157.
- [93] Preskill J., Wise M. B., Wilczek F. Cosmology of the Invisible Axion // Phys. Lett. B. — 1983. — Vol. 120. — P. 127–132.
- [94] Abbott L. F., Sikivie P. A Cosmological Bound on the Invisible Axion // Phys. Lett. B. — 1983. — Vol. 120. — P. 133–136.
- [95] Relaxation times for Bose-Einstein condensation by self-interaction and gravity / Chen J., Du X., Lentz E. W., and Marsh D. J. E. // Phys. Rev. D. — 2022. — Vol. 106, no. 2. — P. 023009. — 2109.11474.
- [96] Svistunov B. V. Highly nonequilibrium Bose condensation in a weakly interacting gas // J. Moscow Phys. Soc. — 1991. — Vol. 1. — P. 373.
- [97] Svistunov B. Strongly non-equilibrium Bose-Einstein condensation in a trapped gas // Phys. Lett. A. — 2001. — Vol. 287, no. 1. — P. 169. — cond-mat/0009295.

- [98] Falkovich G. E., Shafarenko A. V. Nonstationary wave turbulence // J. Nonlin. Sci. — 1991. — Vol. 1, no. 4. — P. 457. — Access mode: <https://doi.org/10.1007/BF02429849>.
- [99] Berges J., Sexty D. Bose condensation far from equilibrium // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Vol. 108. — P. 161601. — 1201.0687.
- [100] Basin of attraction for turbulent thermalization and the range of validity of classical-statistical simulations / Berges J., Boguslavski K., Schlichting S., and Venugopalan R. // JHEP. — 2014. — Vol. 1405. — P. 054. — 1312.5216.
- [101] Semisalov B. et al. Numerical analysis of a self-similar turbulent flow in Bose–Einstein condensates // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2021. — Vol. 102. — P. 105903. — 2104.14591.
- [102] Kagan Y., Svistunov B. V. Kinetics on the onset of long-range order during Bose condensation in an interacting gas // JETP. — 1994. — Vol. 78. — P. 187. — Access mode: http://jetp.ras.ru/cgi-bin/dn/e_078_02_0187.pdf.
- [103] Berloff N. G., Svistunov B. V. Scenario of strongly nonequilibrated Bose-Einstein condensation // Phys. Rev. A. — 2002. — Jul. — Vol. 66. — P. 013603. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.66.013603>.
- [104] Nonthermal fixed points, vortex statistics, and superfluid turbulence in an ultracold Bose gas / Nowak B., Schole J., Sexty D., and Gasenzer T. // Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 85. — P. 043627. — 1111.6127.
- [105] Mikheev A. N., Schmied C.-M., Gasenzer T. Low-energy effective theory of nonthermal fixed points in a multicomponent Bose gas // Phys. Rev. A. — 2019. — Vol. 99, no. 6. — P. 063622. — 1807.10228.
- [106] Kurkela A., Moore G. D. UV Cascade in Classical Yang-Mills Theory // Phys. Rev. D. — 2012. — Vol. 86. — P. 056008. — 1207.1663.
- [107] UV cascade in classical Yang-Mills theory via kinetic theory / Abraao York M. C., Kurkela A., Lu E., and Moore G. D. // Phys. Rev. D. — 2014. — Vol. 89, no. 7. — P. 074036. — 1401.3751.

- [108] Kurkela A., Zhu Y. Isotropization and hydrodynamization in weakly coupled heavy-ion collisions // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Vol. 115, no. 18. — P. 182301. — 1506.06647.
- [109] Micha R., Tkachev I. I. Relativistic turbulence: A Long way from preheating to equilibrium // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Vol. 90. — P. 121301. — hep-ph/0210202.
- [110] Micha R., Tkachev I. I. Turbulent thermalization // *Phys. Rev. D.* — 2004. — Vol. 70. — P. 043538. — hep-ph/0403101.
- [111] Berges J., Rothkopf A., Schmidt J. Non-thermal fixed points: Effective weak-coupling for strongly correlated systems far from equilibrium // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 101. — P. 041603. — 0803.0131.
- [112] Observation of universal dynamics in a spinor Bose gas far from equilibrium / Prüfer M., Kunkel P., Strobel H., et al. // *Nature.* — 2018. — Vol. 563, no. 7730. — P. 217–220. — 1805.11881.
- [113] Universal dynamics in an isolated one-dimensional Bose gas far from equilibrium / Erne S., Bücker R., Gasenzer T., Berges J., and Schmiedmayer J. // *Nature.* — 2018. — Vol. 563, no. 7730. — P. 225–229. — 1805.12310.
- [114] Bidirectional dynamic scaling in an isolated Bose gas far from equilibrium / Glidden J. A. P., Eigen C., Dogra L. H., et al. // *Nature Phys.* — 2021. — Vol. 17, no. 4. — P. 457–461. — 2006.01118.
- [115] Universal dynamics of a turbulent superfluid Bose gas / García-Orozco A. D., Madeira L., Moreno-Armijos M. A., et al. // *Phys. Rev. A.* — 2022. — Aug. — Vol. 106. — P. 023314. — 2107.07421.
- [116] Madeira L., Bagnato V. S. Non-Thermal Fixed Points in Bose Gas Experiments // *Symmetry.* — 2022. — Vol. 14, no. 4. — P. 678. — 2203.14752.
- [117] Zakharov V. E. Weak-turbulence spectrum in a plasma without a magnetic field // *JETP.* — 1966. — Vol. 24, no. 2. — P. 455. — Access mode: http://jetp.ras.ru/cgi-bin/dn/e_024_02_0455.pdf.
- [118] Nazarenko S. Wave turbulence. — Springer Berlin, Heidelberg, 2011. — Vol. 825 of *Lecture Notes in Physics.* — ISBN: 978-3-642-15942-8.

- [119] Zakharov V., L'vov V., Falkovich G. Kolmogorov Spectra of Turbulence I: Wave Turbulence. — Springer Berlin, Heidelberg, 2012. — ISBN: 978-3-642-50054-1.
- [120] Lifshitz E., Pitaevskii L. Course of Theoretical Physics, Vol. 10: Physical Kinetics. — Elsevier Science, 2012. — ISBN: 978-0-08-026480-6. — Access mode: <https://www.elsevier.com/books/physical-kinetics/pitaevskii/978-0-08-026480-6>.
- [121] Zakharov V. E., Karas' V. I. Nonequilibrium Kolmogorov-type particle distributions and their applications // Physics Uspekhi. — 2013. — Jan. — Vol. 56, no. 1. — P. 49.
- [122] Galtier S., Nazarenko S. V. Direct Evidence of a Dual Cascade in Gravitational Wave Turbulence // Phys. Rev. Lett. — 2021. — Vol. 127, no. 13. — P. 131101. — 2108.09158.
- [123] Schmied C.-M., Mikheev A. N., Gasenzer T. Prescaling in a far-from-equilibrium Bose gas // Phys. Rev. Lett. — 2019. — Vol. 122, no. 17. — P. 170404. — 1807.07514.
- [124] Heller M. P., Mazeliauskas A., Preis T. Prescaling Relaxation to Nonthermal Attractors // Phys. Rev. Lett. — 2024. — Vol. 132, no. 7. — P. 071602. — 2307.07545.
- [125] Self-Similar Growth of Bose Stars / Dmitriev A. S., Levkov D. G., Panin A. G., and Tkachev I. I. // Phys. Rev. Lett. — 2024. — Vol. 132, no. 9. — P. 091001. — 2305.01005.
- [126] Boson Stars from Self-Interacting Dark Matter / Eby J., Kouvaris C., Nielsen N. G., and Wijewardhana L. C. R. // JHEP. — 2016. — Vol. 1602. — P. 028. — 1511.04474.
- [127] Global view of QCD axion stars / Eby J., Leembruggen M., Street L., Suranyi P., and Wijewardhana L. C. R. // Phys. Rev. D. — 2019. — Vol. 100, no. 6. — P. 063002. — 1905.00981.
- [128] Visinelli L. Boson stars and oscillatons: A review // Int. J. Mod. Phys. D. — 2021. — Vol. 30, no. 15. — P. 2130006. — 2109.05481.

- [129] Chan J. H.-H., Sibiryakov S., Xue W. Boson star normal modes // JHEP. — 2023. — Vol. 2308. — P. 045. — 2304.13054.
- [130] Salasnich L., Yakimenko A. Collective excitations of self-gravitating ultralight dark matter cores // Phys. Dark Univ. — 2025. — Vol. 49. — P. 101973. — 2501.06891.
- [131] Rubakov V. A. Classical theory of gauge fields. — Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 2002. — 5. — ISBN: 978-0-691-05927-3, 978-0-691-05927-3.
- [132] First Simulations of Axion Minicluster Halos / Eggemeier B., Redondo J., Dolag K., Niemeyer J. C., and Vaquero A. // Phys. Rev. Lett. — 2020. — Vol. 125, no. 4. — P. 041301. — 1911.09417.
- [133] https://www.youtube.com/playlist?list=PLMxQF3HFStX0_CFowbYStkjRv-xZEG-Vn. — 2023.
- [134] Ringwald A., Rosenberg L. J., Rybka G. Axions and Other Similar Particles // PTEP. — 2022. — Vol. 2022. — P. 083C01. — Access mode: <https://pdg.lbl.gov/2021/reviews/rpp2021-rev-axions.pdf>.
- [135] Dmitriev A. S. et al. Instability of rotating Bose stars // Phys. Rev. D. — 2021. — Vol. 104, no. 2. — P. 023504. — 2104.00962.
- [136] Chavanis P. H., Delfini L. Mass-radius relation of Newtonian self-gravitating Bose-Einstein condensates with short-range interactions: II. Numerical results // Phys. Rev. D. — 2011. — Vol. 84. — P. 043532. — 1103.2054.
- [137] Eby J. et al. Collapse of Axion Stars // JHEP. — 2016. — Vol. 12. — P. 066. — 1608.06911.
- [138] Skipp J., L’vov V., Nazarenko S. Wave turbulence in self-gravitating Bose gases and nonlocal nonlinear optics // Phys. Rev. A. — 2020. — Vol. 102, no. 4. — P. 043318. — 2003.05558.
- [139] Li Z. et al. Testing the Prediction of Fuzzy Dark Matter Theory in the Milky Way Center // ApJ. — Vol. 889, no. 2. — P. 88. — 2001.00318.
- [140] Eggemeier B. et al. Gravitational collapse in the postinflationary Universe // Phys. Rev. D. — 2022. — Vol. 105, no. 2. — P. 023516. — 2110.15109.

- [141] Ellis D. et al. Structure of axion miniclusters // Phys. Rev. D. — 2022. — Vol. 106, no. 10. — P. 103514. — 2204.13187.
- [142] Du X. et al. Soliton Merger Rates and Enhanced Axion Dark Matter Decay. — 2301.09769.
- [143] Kolb E. W., Tkachev I. I. Large amplitude isothermal fluctuations and high density dark matter clumps // Phys. Rev. D. — 1994. — Vol. 50. — P. 769. — astro-ph/9403011.
- [144] Gorghetto M., Hardy E., Villadoro G. Axions from Strings: the Attractive Solution // JHEP. — 2018. — Vol. 07. — P. 151. — 1806.04677.
- [145] Eby J. et al. Probing relativistic axions from transient astrophysical sources // Phys. Lett. B. — 2022. — Vol. 825. — P. 136858. — 2106.14893.
- [146] Escudero M. et al. Axion Star Explosions: A New Source for Axion Indirect Detection. — 2302.10206.
- [147] Yoshida H. Construction of higher order symplectic integrators // Phys. Lett. A. — 1990. — Vol. 150. — P. 262–268.
- [148] Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing / Press W., Teukolsky S., Vetterling W., and Flannery B. — 3 ed. — Cambridge University Press, 2007. — ISBN: 9780521880688.
- [149] Arnold V. I. Mathematical Methods of Classical Mechanics. — New York: Springer-Verlag, 1989.
- [150] Teukolsky S. A. On the stability of the iterated Crank-Nicholson method in numerical relativity // Phys. Rev. D. — 2000. — Vol. 61. — P. 087501. — gr-qc/9909026.

Приложение А

Численные методы и приближения для вращающихся Бозе-звезд

А.1 Трехмерное моделирование

В параграфе 1.4 мы обсуждаем моделирование в трехмерном ящике $-L/2 < x, y, z \leq L/2$ с периодическими ψ и U . Согласованность требует модификации ур. (1.3) до

$$\Delta U = 4\pi G(m|\psi|^2 - M/L^3), \quad (\text{A.1.1})$$

где новый член с полной массой M исчезает как $O(L^{-3})$ в пределе бесконечного объема. Мы дискретизируем x, y и z с равномерными шагами решетки $\delta = L/N$ и помещаем поля $\psi = \psi_{n,m,k}, U_{n,m,k}$ на узлы решетки $\{x_n, y_m, z_k\} \equiv \{n\delta, m\delta, k\delta\}$. Мы выполняем все вычисления в безразмерных единицах параграфа 1.2.

Важно, что наша кубическая решетка инвариантна относительно вращений на $\pi/2$ с помощью оператора $\hat{R}_{\pi/2}$. Поскольку $\hat{R}_{\pi/2}^4 = 1$, оператор имеет четыре собственных значения $\pm i$ и ± 1 , и соответствующие собственные функции ψ_l , которые удовлетворяют ур. (1.20) с $0 \leq l \leq 3$. В ур. (1.22) мы разлагаем $\delta\psi \equiv \psi - \psi_s e^{-i\omega_s t}$ на сумму собственных функций ψ_l используя проекторы $\hat{\Pi}_l$,

$$\psi_{l;n,m,k} = \hat{\Pi}_l \delta\psi_{n,m,k} = \frac{1}{4} \left[\delta\psi_{n,m,k} + e^{i\pi l/2} \delta\psi_{m,-n,k} + e^{i\pi l} \delta\psi_{-n,-m,k} + e^{3i\pi l/2} \delta\psi_{-m,n,k} \right]. \quad (\text{A.1.2})$$

Оператор $\hat{\Pi}_1$ с $l = 1$ используется в численной процедуре ниже.

Мы эволюционируем уравнения Гросса-Питаевского-Пуассона (1.2), (1.3), используя псевдоспектральный метод четвертого порядка [22, 147]. В двух словах, это сводится к выполнению Быстрых Преобразований Фурье на каждом шаге по времени: сначала для продвижения волновой функции $\psi(t + \Delta t) = e^{-i\hat{H}\Delta t} \psi(t)$ с точностью $O(\Delta t^5)$, а затем для решения уравнения Пуассона для гравитационного потенциала; здесь \hat{H} — оператор в правой части

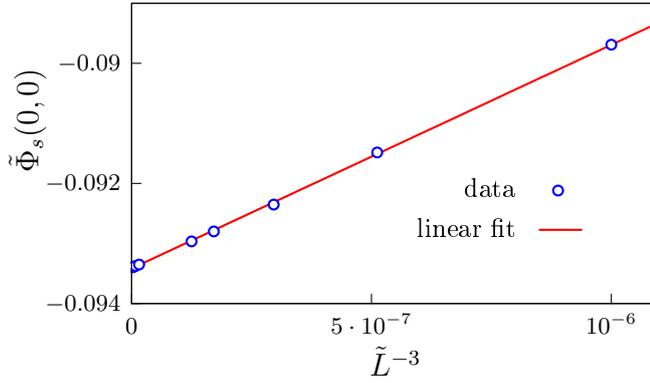


Рис. А.1: Потенциал в центре $\rho = z = 0$ Бозе-звезды с $l = 1$ как функция размера ящика L после сдвига на U_0 ; рассматривается случай без самодействий.

ур. (1.2). Примечательно, что эта численная схема одинаково относится ко всем пространственным координатам и поэтому коммутирует с вращениями на $\pi/2$.

Та же эволюция в евклидовом времени $\tau = it$ умножает ψ на $e^{-\hat{H}\Delta\tau}$ и поэтому минимизирует энергию конфигурации. Конкретно, в параграфе 1.4 мы получаем Бозе-звезду с $l = 1$ путем итераций $\psi \rightarrow \Delta\mathcal{N}e^{-\hat{H}\Delta\tau}\hat{\Pi}_z\hat{\Pi}_1\psi$, решая уравнение Пуассона на каждом шаге. Здесь оператор $\hat{\Pi}_1$ проецирует ψ на собственный сектор вращений на $\pi/2$ с собственным значением $e^{i\pi/2}$, другой проектор $\hat{\Pi}_z\psi_{n,m,k} \equiv \frac{1}{2}(\psi_{n,m,k} + \psi_{n,m,-k})$ стабилизирует конфигурацию в направлении z , накладывая симметрию $z \rightarrow -z$, евклидов пропагатор $e^{-\hat{H}\Delta\tau}$ убивает высокоэнергетические компоненты ψ , в то время как нормировочный множитель $\Delta\mathcal{N}$ фиксирует полную массу $\int d^3\tilde{x} |\tilde{\psi}|^2 = 1$ в приведенных единицах. В конце релаксации значение ψ равно ψ_s , а нормировочный множитель $\Delta\mathcal{N} = \exp(\tilde{\omega}_s\Delta\tilde{\tau})$ дает энергию связи $\tilde{\omega}_s$.

В периодическом ящике удобно фиксировать постоянную часть потенциала Бозе-звезды используя условие $\int d^3\mathbf{x} U_s = 0$. Мы восстанавливаем стандартные члены, сдвигая $U_s \rightarrow U_s + U_0$ и $\omega_s \rightarrow \omega_s + U_0$, где константа U_0 обеспечивает вириальное соотношение, например, $E_s = \omega_s N_s/3$ при $\lambda = 0$. После сдвига конечномерные эффекты в энергетических величинах уменьшаются до $O(L^{-3})$, см. рис. А.1. Мы не выполняем этот сдвиг при $\lambda \neq 0$, потому что он не влияет на данные на рис. 1.12.

На практике мы используем решетку 128^3 в ящике $\tilde{L} = 200$ и используем шаги по времени $\Delta\tilde{t} = \Delta\tilde{\tau} = 0.5$. После 10^4 евклидовых итераций конфигурация с $l = 1$ стабилизируется на относительном уровне $\delta\psi_s/\psi_s \sim 10^{-15}$, что сравнимо с ошибками округления. Относительные эффекты конечного шага решетки δ и

дискретного шага по времени имеют порядок $2 \cdot 10^{-14}$ и $2 \cdot 10^{-12}$ соответственно; они оценены с использованием решетки 256^3 и шага $\Delta\tilde{\tau} = 0.25$. Наибольшие численные артефакты происходят от конечномерного обрезания: увеличивая \tilde{L} в два раза, мы получаем ψ_s с относительными поправками порядка 10^{-4} .

Далее мы добавляем возмущение (1.21) к Бозе-звезде и эволюционируем результирующую конфигурацию в реальном времени до $\tilde{t} = 10^4$. Полная энергия и масса решения стабильны в течение всей эволюции вплоть до относительных поправок порядка $2 \cdot 10^{-9}$ и $5 \cdot 10^{-11}$ соответственно. В то же время, численные ошибки в ψ растут экспоненциально, потому что эволюция неустойчива. Тем не менее, ошибки дискретизации δ и Δt всегда остаются ниже $\delta\psi/\psi < 10^{-7}$ и 10^{-5} , пока относительные ошибки конечного объема остаются меньше 10^{-2} при $\tilde{t} \lesssim 9500$, достигая уровня 10% только в самом конце моделирования.

А.2 Осесимметричный код

Чтобы вычислить звезды с $l \geq 2$ численно, мы вводим решетку $N_\rho \times N_z$ с равномерными шагами δ_ρ, δ_z в цилиндрических координатах ρ, z . Узлы этой решетки $(\rho_j, z_k) \equiv (j\delta_\rho, k\delta_z)$ заполняют большую цилиндрическую область $0 \leq \rho_j \leq L_\rho$ и $0 \leq z_k \leq L_z$ в верхней половине трехмерного пространства. Мы храним значения полей $\psi_{j,k} \equiv \psi(\rho_j, z_k)$ и $U_{j,k}$ на узлах решетки и восстанавливаем их при $z < 0$, используя симметрию $\psi(\rho, -z) = \psi(\rho, z)$, $U(\rho, -z) = U(\rho, z)$. Мы используем безразмерные единицы с $\tilde{m} = \tilde{G} = \tilde{M}_s = 1$, введенные в параграфе 1.2.

Лапласианы в ур. (1.2), (1.3) дискретизируются стандартным методом второго порядка:

$$\begin{aligned} \Delta\psi_{j,k} = & (\psi_{j,k+1} + \psi_{j,k-1} - 2\psi_{j,k})/\delta_z^2 \\ & + (\psi_{j+1,k} + \psi_{j-1,k} - 2\psi_{j,k})/\delta_\rho^2 \\ & + (\psi_{j+1,k} - \psi_{j-1,k})/(2\delta_\rho\rho_j) - l^2\psi_{j,k}/\rho_j^2, \end{aligned} \quad (\text{A.2.1})$$

где похожее выражение для $\Delta U_{j,k}$ не имеет последнего члена. Мы снабжаем решеточные уравнения условиями регулярности на оси симметрии²⁵ $\rho = 0$: $\psi = \partial_\rho U = 0$ или

$$\psi_{0,k} = 0, \quad U_{-1,k} = U_{1,k}. \quad (\text{A.2.2})$$

²⁵При $l = 0$ мы используем $\psi_{-1,k} = \psi_{1,k}$.

Граничные условия при $z = z_0 = 0$ следуют из симметрии отражения $z \rightarrow -z$:

$$\psi_{j,-1} = \psi_{j,1}, \quad U_{j,-1} = U_{j,1}. \quad (\text{A.2.3})$$

Наконец, мы накладываем подходящие условия спада на «бесконечных» границах решетки $\rho = L_\rho$ и $z = L_z$. Там волновая функция исчезает,

$$\psi_{j,k} = 0 \quad \text{при} \quad j = N_\rho - 1 \text{ или } k = N_z - 1, \quad (\text{A.2.4})$$

и потенциал близок к асимптотике $U \approx -GM/(\rho^2 + z^2)^{1/2}$. Последнее условие может быть записано в независимой от массы форме:

$$U_{N_\rho-1,k} = U_{N_\rho-2,k} \left(\frac{\rho_{N_\rho-2}^2 + z_k^2}{\rho_{N_\rho-1}^2 + z_k^2} \right)^{1/2}, \quad (\text{A.2.5})$$

и аналогично при $z = L_z$ и произвольным ρ_j . Подводя итог, вышеупомянутая дискретизация дает набор уравнений эволюции и Пуассона на внутренних узлах решетки с граничными значениями полей, фиксированными ур. (A.2.2) — (A.2.5).

Мы решаем ур. (1.3) для $U_{j,k}$ с помощью стандартного метода SOR [148]. После каждого прохода релаксации мы эволюционируем²⁶ волновую функцию в евклидовом времени на $\Delta\tau = i\Delta t$,

$$\psi_{j,k}^{(n+1)} = \psi_{j,k}^{(n)} - \Delta\tau \hat{H} \psi_{j,k}^{(n)}, \quad (\text{A.2.6})$$

где n индексирует проходы, и \hat{H} обозначает дискретизированный оператор в правой части ур. (1.2). Как и прежде, эволюция (A.2.6) убивает все возбужденные энергетические уровни в ψ при заданном l . Наконец, мы перемасштабируем $\psi_{j,k} \rightarrow \Delta\mathcal{N} \psi_{j,k}$, чтобы сохранить полную массу $\tilde{M}_s = 1$ фиксированной, и затем переходим к следующему проходу релаксации. Мы уменьшаем шаги по времени от $\Delta\tau \propto \delta_{\rho,z}$ в начале релаксации до $\propto \delta_{\rho,z}^2$ в конце ее.

Итерации сходятся, получая Бозе-звезды с точностью до поправок $O(\delta_{\rho,z}^2)$ в шагах решетки и²⁷ $O(L_{\rho,z}^{-3})$ в размере ящика. Изменяя параметры, мы численно

²⁶Поскольку формула Эйлера (A.2.6) неустойчива, мы улучшаем ее до полу-явного метода: заменяем $\psi_{j,k}^{(n)} \rightarrow \psi_{j,k}^{(n+1)}$ во всех диагональных членах оператора \hat{H} и выражаем $\psi_{j,k}^{(n+1)}$ из итогового уравнения.

²⁷Потому что ур. (A.2.5) игнорирует дипольную часть в гравитационном потенциале Бозе-звезды.

подтвердили масштабирование численных ошибок с $\delta_{\rho,z}$ и $L_{\rho,z}$. Энергия Бозе-звезды дается дискретизированным интегралом (1.6), в то время как $\tilde{\omega}_s = 3\tilde{E}_s$ при $\lambda = 0$, см. ур. (1.12).

В практических вычислениях мы используем решетки в диапазоне от $N_\rho \times N_z = 101 \times 101$ до 1501×1501 . Мы увеличиваем их в два раза, чтобы контролировать ошибки дискретизации, которые никогда не превышают $\delta\psi_s/\psi_s < 10^{-2}$. Наши размеры ящиков $L_{\rho,z} \propto l^2$ сильно варьируются с l , чтобы охватить Бозе-звезды : от $\tilde{L}_\rho = \tilde{L}_z = 100$ при $l = 1$ до 22500 при $l = 15$. Это сохраняет относительные конечномерные неточности ниже 10^{-6} . Наконец, мы убеждаемся, что осесимметричные профили Бозе-звезд с $l = 0, 1$ совпадают с таковыми из трехмерного кода в пределах ожидаемой точности 1%.

Как только Бозе-звезда получена, мы эволюционируем ур. (1.26) в реальном времени, таким образом извлекая самую быстрорастущую линейную моду неустойчивости. Мы используем ту же дискретизацию второго порядка, что и раньше, и такие же граничные условия к ур. (A.2.1) – (A.2.4). Поскольку эволюция в реальном времени более требовательна к вычислительным ресурсам, мы используем меньшие решетки в меньших ящиках ценой понижения точности. Теперь диапазон $N_\rho \times N_z$ между 101×101 и 1001×1001 , в то время как размеры ящиков варьируются в интервале $10^2 \leq \tilde{L}_r, \tilde{L}_z \leq 10^3$. Наша временная эволюция использует шаги Кранка–Николсона [148] с $\Delta\tilde{t} = 0.2\tilde{\delta}_{\rho,z}^2/l^2$. После каждого шага мы выполняем один SOR проход для уравнения на δU . Затем мы умножаем²⁸ $\delta\psi$, $\delta\bar{\psi}$ и δU на константу $\Delta\mathcal{N}$ и переходим к следующему шагу по времени. Мы останавливаем процедуру, когда перенормированные возмущения стабилизируются на относительном уровне 10^{-13} . На последнем шаге мы вычисляем комплексный показатель возмущения: $\tilde{\mu} = \Delta\tilde{t}^{-1} \ln \Delta\mathcal{N}$. Изменяя l' , мы выбираем доминирующую моду с максимальным $\text{Re } \tilde{\mu}$.

Как и прежде, мы оцениваем численную точность, варьируя $N_{\rho,z}$, $L_{\rho,z}$ и Δt . Все относительные неточности остаются ниже 1%, хотя на этот раз наибольшие ошибки связаны с сопоставимыми конечномерными эффектами и эффектами дискретизации.

²⁸Эта перенормировка выключается на рис. 1.9.

А.3 Двумерные Бозе-звезды

В этом Приложении мы численно решаем уравнения (1.35), (1.36) для профиля двумерной Бозе-звезды. Для этого мы вычитаем ω_2 из потенциала,

$$\bar{U}_2(\mathbf{x}_2) \equiv U_2(\mathbf{x}_2) - \omega_2/m , \quad (\text{A.3.1})$$

вводим радиальную координату $r_2 = |\mathbf{x}_2|$ и выполняем преобразования координат и полей с параметром $(v'_0)^2 = (G/m)^{1/2} \psi_2(0)$, как описано в параграфе 1.6.1. Наш выбор v'_0 фиксирует центральное значение безразмерного поля: $\psi'_2(0) = 1$.

Предполагая сферическую симметрию, мы получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для $\psi'_2(r'_2)$ и $\bar{U}'_2(r'_2)$,

$$\partial_{r'_2}(r'_2 \partial_{r'_2} \psi'_2) = 2r'_2 \bar{U}'_2 \psi'_2 , \quad (\text{A.3.2a})$$

$$\partial_{r'_2}(r'_2 \partial_{r'_2} \bar{U}'_2) = 4\pi r'_2 |\psi'_2|^2 . \quad (\text{A.3.2b})$$

Мы дополняем их условиями регулярности в начале координат,

$$\partial_{r'_2} \bar{U}'_2(0) = \partial_{r'_2} \psi'_2(0) = 0 , \quad \psi'_2(0) = 1 , \quad \bar{U}'_2(0) = \bar{U}'_0 ,$$

где $\psi'_2(0) = 1$ следует из преобразования поля, и мы вводим новый параметр \bar{U}'_0 .

Мы численно решаем уравнения (A.3.2) с указанными начальными данными до больших r'_2 , а затем подбираем \bar{U}'_0 , чтобы обеспечить спадание волновой функции на бесконечности: $\psi'_2 \rightarrow 0$ при $r'_2 \rightarrow +\infty$. Это дает $\bar{U}'_0 \approx -2.07$ и конфигурацию на рис. 1.14 (сплошная линия). После этого мы вычисляем безразмерный интеграл

$$M'_2 \equiv \int d^2 \mathbf{x}'_2 |\psi'_2| \approx 1.7 \quad (\text{A.3.3})$$

в выражении (1.37) для массы Бозе-звезды.

Давайте теперь применим этот объект, чтобы найти профиль быстровращающейся трехмерной Бозе-звезды. В двух измерениях гравитационный потенциал логарифмически растет на бесконечности,

$$\bar{U}'_2 \rightarrow M'_2 \ln(r'^2_2 M'_2 / 64\beta) , \quad \text{при } r'_2 \rightarrow +\infty , \quad (\text{A.3.4})$$

где численная константа $\beta \approx 2.86 \cdot 10^{-2}$ параметризует его постоянную часть. Как следствие, мы не можем разделить \bar{U}'_2 на U_2 и ω_2 , используя только двумерную логику.

Чтобы сделать это, мы вычисляем исходный трехмерный потенциал в пространственной точке $z = 0$ и $\rho = R_{bs} + lr_2$, расположенной параметрически далеко от кольцевого ядра, $r_2 \gg O(1)$, и все же принадлежащей области применимости $r_2 \ll R_{bs}/l$ уравнений (A.3.2). В этом случае детали профиля кольца неразличимы, и мы записываем

$$\begin{aligned} U_{bs} &\approx -\frac{GM_{bs}}{2\pi} \oint \frac{d\varphi}{\sqrt{4(R_{bs}^2 + lr_2 R_{bs}) \sin^2(\varphi/2) + l^2 r_2^2}} \\ &\approx \frac{GM_{bs}}{\pi R_{bs}} \ln(lr_2/8R_{bs}), \end{aligned} \quad (\text{A.3.5})$$

где интеграл в первой строке суммирует потенциалы кусочков кольца под разными углами φ . Переводя асимптотику (A.3.4) для \bar{U}'_2 в физические единицы и подставляя ее в уравнения (A.3.1), (1.34), мы получаем другое выражение для U_{bs} , которое должно совпадать с уравнением (A.3.5). Это дает,

$$\omega_{bs} = \frac{l^2}{2mR_{bs}^2} + \frac{mGM_{bs}}{2\pi R_{bs}} \ln(\beta\alpha_l/l^2), \quad (\text{A.3.6})$$

где мы заменили R_{bs} на α_l , используя уравнение (1.32).

Наконец, давайте вычислим энергию E_{bs} трехмерной Бозе-звезды при больших l . Ее аналог в двух измерениях имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &= \int d^2\mathbf{x}_2 \left(\frac{|\nabla_2\psi_2|^2}{2m} + \frac{m}{2} \bar{U}_2 |\psi_2|^2 \right) \\ &= K_2 + P_2. \end{aligned} \quad (\text{A.3.7})$$

где K_2 и P_2 — кинетический и потенциальный члены соответственно. Двумерная Бозе-звезда $\psi_2 = \psi_{2,bs}(\mathbf{x}_2)$ экстремизирует этот функционал в классе конфигураций с заданной массой $M_2 \equiv \int d^2\mathbf{x}_2 m|\psi_2|^2$, см. параграф 1.2. В частности, преобразование подобия

$$\psi_2'' = \gamma\psi_{2,bs}(\gamma\mathbf{x}_2), \quad \bar{U}_2'' = \bar{U}_{2,bs}(\gamma\mathbf{x}_2) - 2GM_{2,bs} \ln \gamma, \quad (\text{A.3.8})$$

не меняет массу и асимптотику потенциала \bar{U}_2 на больших r_2 . Таким образом, энергия (A.3.7) преобразованной конфигурации

$$\mathcal{E}_2'' = \gamma^2 K_{2,bs} + P_{2,bs} - GM_{2,bs}^2 \ln \gamma, \quad (\text{A.3.9})$$

экстремальна при $\gamma = 1$; в дальнейшем мы помечаем величины, вычисленные для $\psi_2 = \psi_{2,bs}$, подстрочным индексом bs . Взяв производную по γ , мы находим

$2K_{2,bs} = GM_{2,bs}^2$ и, следовательно, двумерную теорему вириала

$$\mathcal{E}_{2,bs} = K_{2,bs}/2 = GM_{2,bs}^2/4, \quad (\text{A.3.10})$$

где первое равенство получается интегрированием уравнения (A.3.7) по частям и использованием уравнения (1.35).

При больших l и $\lambda = 0$ энергия (1.6) трехмерной Бозе-звезды принимает вид:

$$E_{bs} = \frac{2\pi R_{bs}}{l^4} \mathcal{E}_{2,bs} + \frac{\pi R_{bs}}{ml^2} \left(\omega_{bs} + \frac{l^2}{2mR_{bs}^2} \right) M_{2,bs}, \quad (\text{A.3.11})$$

где использовались уравнения (A.3.1), (A.3.7). Мы выражаем $\mathcal{E}_{2,bs}$ и ω_{bs} из уравнений (A.3.10) и (A.3.6), записываем двумерную массу как $M_{2,bs} = l^2 M_{bs}/(2\pi R_{bs})$, и используем представление (1.32) для R_{bs} . Это дает выражение для энергии (1.38) из основного текста.

После этого уравнение (1.45) для α_l получается путем экстремизации энергии по этому свободному параметру. Формула (A.3.6) для ω_{bs} тогда сводится к выражению

$$\omega_{bs} = -\frac{3m^3 G^2 M_{bs}^2}{8\pi^2 l^2} \alpha_l(\alpha_l + 1),$$

которое использовалось в оценке (1.46). Примечательно, что значение ω_{bs}/m совпадает с производной dE_{bs}/dM_{bs} , как и должно быть.

A.4 Моды неустойчивости при $l \gg 1$

Теперь рассмотрим экспоненциально растущие моды на фоне трехмерной, быстровращающейся Бозе-звезды. В основном тексте мы утверждали, что их профили $\chi(\mathbf{x}_2)$, $\eta(\mathbf{x}_2)$, $\delta U(\mathbf{x}_2)$ удовлетворяют двумерной задаче на собственные значения (1.39). Она аналогична задаче, описывающей колебания двумерной звезды, но включает дополнительный параметр: импульс в дополнительном измерении p_φ .

Для начала докажем свойства уравнений (1.39), анонсированные в основном тексте. Эти уравнения составляют гамильтонову систему для поля $\chi(\mathbf{x}_2)$ и его канонического импульса $\eta(\mathbf{x}_2)$. Действительно, в терминах координаты фазового пространства $\xi(\mathbf{x}_2) = (\chi, \eta)^T$ уравнения имеют вид:

$$\mu_2 \Omega \xi = \begin{pmatrix} \hat{H}_\chi & 0 \\ 0 & \hat{H}_\eta \end{pmatrix} \xi, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4.1})$$

где μ_2 заменяет производную по времени, Ω — каноническая форма, а вещественные симметричные операторы \hat{H}_χ и \hat{H}_η представляют вариации квадратичного гамильтониана. Хорошо известно [149], что решения стационарных гамильтоновых систем, подобных уравнению (A.4.1), имеют только чисто мнимые или вещественные собственные значения μ_2 .

Продemonстрируем это явно. Операторы в уравнениях (1.39) имеют вид:

$$\hat{H}_\eta = \frac{p_\varphi^2 - \Delta_2}{2m} + m\bar{U}_2, \quad \hat{H}_\chi = \hat{H}_\eta + \psi_2 \frac{8\pi Gm^2}{\Delta_2 - p_\varphi^2} \psi_2,$$

где \bar{U}_2 — сдвинутый фоновый потенциал из уравнения (A.3.1). Можно явно проверить, что эти операторы вещественные и симметричные, т.е. удовлетворяют соотношениям

$$\int d^2\mathbf{x}_2 f_1 \hat{H}_{\chi,\eta} f_2 = \int d^2\mathbf{x}_2 f_2 \hat{H}_{\chi,\eta} f_1 \quad (\text{A.4.2})$$

для любых хорошо локализованных функций $f_1(\mathbf{x}_2)$ и $f_2(\mathbf{x}_2)$. Кроме того, \hat{H}_η положительно определен, потому что его собственные значения измеряют (неотрицательную) разность между уровнями энергии в потенциале $U_2(\mathbf{x}_2)$ и его энергией основного состояния ω_2 , плюс положительная константа $p_\varphi^2/2m$. Как следствие, \hat{H}_η и \hat{H}_χ могут быть одновременно диагонализированы вещественным оператором \hat{A} ,

$$\hat{A}\hat{H}_\eta\hat{A}^T = \hat{I}, \quad \hat{A}^{-1T}\hat{H}_\chi\hat{A}^{-1} = \text{diag}(-\mu_j^2), \quad (\text{A.4.3})$$

где \hat{I} — единичный оператор, и все μ_j^2 вещественны. Учитывая уравнение (A.4.3), мы строим симплектический оператор

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \hat{A}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{A}^T \end{pmatrix}, \quad \hat{S}^T \Omega \hat{S} = \Omega,$$

диагонализующий всю краевую задачу (A.4.1). Действительно, преобразованное возмущение $\xi' = \hat{S}^{-1}\xi$ удовлетворяет диагональным гамильтоновым уравнениям (A.4.1), с операторами \hat{I} и $\text{diag}(-\mu_j^2)$ заменяющими \hat{H}_η и \hat{H}_χ . Решая диагональные уравнения, мы обнаруживаем, что каждая пара элементов в ξ' представляет «координату» и «импульс» собственной моды с вещественным $\mu_2^2 = \mu_j^2$. Наконец, преобразуя обратно к исходным терминам, мы получаем полный набор собственных мод, удовлетворяющих уравнениям (1.39). Эти моды являются вещественными по построению, и их собственные значения μ_2 либо вещественные, либо мнимые.

Ясно, что все моды, расположенные далеко от двумерной Бозе-звезды, имеют мнимые μ_2 . В этой области $\psi_2 \approx 0$, и поэтому

$$-\mu_2^2 \eta \approx [(p_\varphi^2 - \Delta_2)/2m + m\bar{U}_2]^2 \eta ,$$

см. уравнения (1.39). Следовательно, $\mu_2^2 < 0$. Напротив, все моды с вещественными μ_2 локализованы внутри области ненулевого ψ_2 .

Подводя итог, мы доказали, что все моды неустойчивости имеют вещественные профили, удовлетворяющие условиям спадания (1.41) на бесконечности. Они могут быть вычислены численно с использованием стандартного метода стрельбы. Выполняя преобразование подобия с параметром v'_0 , мы избавляемся от m и G , см. параграф 1.6.1 для подробностей. Поскольку двумерный фон зависит только от радиуса $r'_2 = |\mathbf{x}'_2|$, мы предполагаем общую разделяемую зависимость возмущений от угловой координаты $\varphi_2 \equiv \arctan(y'_2/x'_2)$,

$$\chi', \eta', \delta U' \propto \cos(l_2 \varphi_2 + \text{const}) .$$

Это превращает уравнения (1.39) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \partial_{r'_2}(r'_2 \partial_{r'_2} \chi') &= 2\mu'_2 r'_2 \eta' + \chi' [r'_2 (p'_\varphi)^2 + l_2^2/r'_2 + 2\bar{U}'_2 r'_2] \\ &\quad + 2r'_2 \psi'_2 \delta U' , \\ \partial_{r'_2}(r'_2 \partial_{r'_2} \eta') &= -2\mu'_2 r'_2 \chi' + \eta' [r'_2 (p'_\varphi)^2 + l_2^2/r'_2 + 2\bar{U}'_2 r'_2], \\ \partial_{r'_2}(r'_2 \partial_{r'_2} \delta U') &= \delta U' [r'_2 (p'_\varphi)^2 + l_2^2/r'_2] + 8\pi r'_2 \psi'_2 \chi' \end{aligned}$$

для радиальных профилей мод $\Xi(r'_2) = (\chi', \eta', \delta U')$ в безразмерных единицах (со штрихами).

Далее мы решаем уравнения с условиями регулярности в начале координат,

$$\partial_{r'_2} \Xi = 0 \quad \text{при} \quad r'_2 = 0 \quad (\text{A.4.4})$$

и условиями спадания (1.41) на бесконечности. Для этого мы строим полный набор начальных данных, добавляя к уравнению (A.4.4) условие $\Xi = (1, 0, 0)$ при $r'_2 = 0$, а затем делаем то же самое для $\Xi = (0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$. Начиная с этих трех наборов данных, мы численно получаем три линейно независимых решения $\Xi^{(1)}(r'_2)$, $\Xi^{(2)}(r'_2)$ и $\Xi^{(3)}(r'_2)$ дифференциальных уравнений. Общее решение — их линейная комбинация:

$$\Xi(r'_2) = d_1 \Xi^{(1)}(r'_2) + d_2 \Xi^{(2)}(r'_2) + d_3 \Xi^{(3)}(r'_2) . \quad (\text{A.4.5})$$

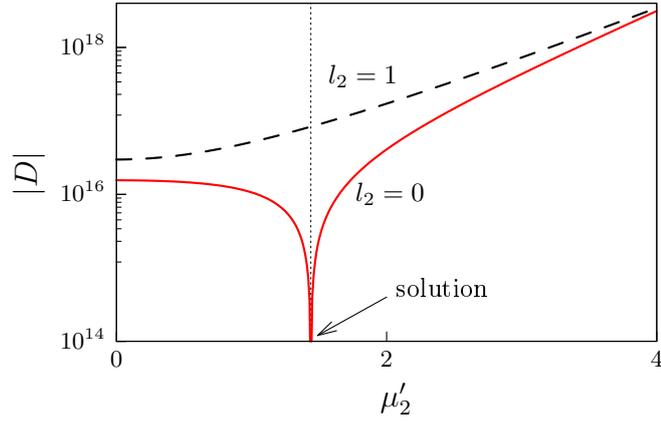


Рис. А.2: Абсолютное значение определителя (А.4.6) (логарифмическая шкала) как функция собственного значения μ'_2 при $p'_\varphi = 1$, $r'_{\max} = 7$ и $l_2 = 0, 1$. Решение для определителя $D = 0$ (вертикальная пунктирная линия) соответствует острому клювообразному провалу графика для $l_2 = 0$.

Неизвестная мода неустойчивости задается комбинацией, удовлетворяющей, дополнительно, условиям спадания (1.41) на бесконечности — или, в численном приближении, равенствам $\Xi(r'_{\max}) = 0$ при достаточно большом радиусе $r'_2 = r'_{\max}$. Вместе с уравнением (А.4.5) это дает систему линейных алгебраических уравнений для d_i с нулевой правой частью. Решение существует только если матрица коэффициентов имеет нулевой определитель,

$$D = \det \left[\Xi^{(1)} \Xi^{(2)} \Xi^{(3)} \right] = 0 \quad \text{при } r'_2 = r'_{\max}, \quad (\text{А.4.6})$$

где матрица 3×3 под определителем включает столбцы $\Xi^{(i)}(r'_{\max})$. Уравнение (А.4.6) выбирает значения μ'_2 , представляющие моды неустойчивости.

На рис. А.2 мы показываем абсолютное значение определителя D как функцию μ'_2 при $r'_{\max} = 7 \gg 1$ и $p'_\varphi = 1$. Мы рассматриваем случаи $l_2 = 0$ и 1 (сплошная и пунктирная линии соответственно). Острый провал графика для $l_2 = 0$ при $\mu'_2 \approx 1.44$ указывает на точку $D = 0$ и, следовательно, на моду неустойчивости. В то же время графики для $l_2 \geq 1$ не имеют нулей D вообще, см. пунктирную линию. Это означает, что неустойчивая мода является осесимметричной в двух измерениях, как мы утверждали в основном тексте.

Решая уравнение (А.4.6) при всех возможных значениях p'_φ и $l_2 = 0$, мы получаем собственное значение $\mu'_2(p'_\varphi)$ моды неустойчивости, показанное на рис. 1.15. Максимум этого графика представляет наиболее быстро растущую моду, рассмотренную в основном тексте.

Приложение Б

Кинетическое уравнение

Б.1 Кинетическое уравнение для однородного и изотропного гравитирующего газа

При сферической симметрии однородное кинетическое уравнение (2.6), (2.7) в дальнейшем упрощается, потому что функция распределения $f_{\mathbf{p}}$ зависит только от $p = |\mathbf{p}|$ и поток Ландау коллинеарен импульсу: $s_i = s(p) p_i/p$. Мы получаем

$$\partial_t f_p = -\partial_{p_j} s_j = -p^{-2} \partial_p (p^2 s) \quad (\text{Б.1.1})$$

и

$$s(p) = \frac{G^2 m^4 \Lambda}{4\pi^2 p} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{u} p_i \mathcal{P}_{ij} \left[f_p^2 \partial_q f_q \frac{q_j}{q} - f_q^2 \partial_p f_p \frac{p_j}{p} \right].$$

Свертки $\mathcal{P}_{ij} \equiv \delta_{ij} - u_i u_j / u^2$ с \mathbf{p} и \mathbf{q} зависят от угла θ между этими двумя векторами:

$$p_i p_j \mathcal{P}_{ij} = p_i q_j \mathcal{P}_{ij} = \frac{p^2 q^2 \sin^2 \theta}{m^2 u^2},$$

где $\mathbf{u} \equiv (\mathbf{p} - \mathbf{q})/m$ и $m^2 u^2 = p^2 - 2pq \cos \theta + q^2$. Явно интегрируя по направлениям \mathbf{q} ,

$$\int d\Omega_{\mathbf{q}} \frac{\sin^2 \theta}{m^3 u^3} = \frac{8\pi}{3p^3 q^3} \min(p^3, q^3),$$

мы переписываем поток Ландау в форме одномерного интеграла

$$s = \frac{2G^2 m^5 \Lambda}{3\pi p^3} \int_0^\infty dq \min(p^3, q^3) (p f_p^2 \partial_q f_q - q f_q^2 \partial_p f_p),$$

где $d\Omega_{\mathbf{q}} \equiv 2\pi d(\cos \theta)$. Далее, мы раскрываем скобки и интегрируем первый член по частям,

$$s = -\frac{2G^2 m^5 \Lambda}{\pi p^2} (B_p f_p^2 + A_p \partial_p f_p) = p^{-3} \partial_p W_p, \quad (\text{Б.1.2})$$

где

$$A_p \equiv \int_0^\infty \frac{q dq}{3p} \min(p^3, q^3) f_q^2, \quad B_p \equiv \int_0^p q^2 dq f_q \quad (\text{Б.1.3})$$

и мы заметили, что правая часть ур. (Б.1.2) пропорциональна полной производной предпотока

$$W_p = \frac{2G^2 m^5 \Lambda}{\pi} (B_p C_p - p A_p f_p), \quad C_p = \int_p^\infty q dq f_q^2, \quad (\text{Б.1.4})$$

см. ур. (Б.1.3) подразумевающие, в частности, $\partial_p A_p \equiv p C_p - A_p/p$.

Последний шаг — изменить обозначения в ур. (Б.1.1), (Б.1.2), (Б.1.3) и (Б.1.4): ввести распределение $F(t, \omega)$ частиц по энергиям $\omega \equiv p^2/2m$ в ур. (2.9), полный поток частиц

$$\mathcal{J}_N \equiv 4\pi p^2 s V_R / (2\pi)^3,$$

перемасштабированный предпоток $W \equiv W_p V_R / 2m\pi^2$ и интегралы $A \equiv A_p m V_R^2 / 4\pi^4$, $B \equiv B_p V_R / 2\pi^2$, $C \equiv C_p m^2 V_R^2 / (4\pi^4)$. Мы приходим к кинетическому уравнению (2.10) из основного текста; заметим, что поток энергии \mathcal{J}_E определен в ур. (2.10a), (2.10b).

Б.2 Численные методы для нестационарной кинетики

Давайте численно решим зависящее от времени кинетическое уравнение (2.13). В Прил. Б.2 и Б.3 мы работаем в безразмерных единицах $N_0 = 2\omega_0 = t_{\text{rel}} = 1$, ур. (2.17), но опускаем тильды над величинами.

Мы вводим равномерную сетку $\omega_j = j\Delta\omega$ в энергетической области, где $0 \leq j \leq N - 1$ индексирует узлы и $\Delta\omega = \omega_{\text{max}} / (N - 1)$ есть шаг решетки. Обрезание $\omega_{\text{max}} = 30$ выбрано достаточно большим, чтобы сделать $F(\omega_{\text{max}}) \lesssim 10^{-50}$ пренебрежимо малым на протяжении всех симуляций. Соответственно, мы налагаем условия Дирихле

$$F_0 = F_{N-1} = 0 \quad (\text{Б.2.1})$$

на границах решетки. Размер нашей решетки принадлежит интервалу $2 \cdot 10^4 \leq N \leq 6 \cdot 10^4$, что дает $\Delta\omega \sim 10^{-3}$ и ошибки дискретизации на уровне процента в численной схеме ниже.

Мы дискретизируем интеграл столкновений (2.10), используя центральную разность

$$\text{St } F_j = -(W_{j+1} + W_{j-1} - 2W_j) / \Delta\omega^2 \quad (\text{Б.2.2})$$

и правило трапеций для основных интегралов A , B и C , напр., $B_j = \Delta\omega \sum_{j'=1}^{j-1} F_{j'}' + \Delta\omega F_j/2$. Временные шаги Δt^n предоставляются методом чехарды (leap-frog),

$$\frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t^n} = \text{St} F_j^{n+1/2} - \mu_j F_j^{n+1/2} + J_{\text{ext},j}^{n+1/2}, \quad (\text{Б.2.3})$$

где n индексирует временные узлы, $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$, мы ввели краткие обозначения $F_j^n = F(t^n, \omega_j)$, $\mu_j = \mu(\omega_j)$, $J_{\text{ext},j}^{n+1/2} = J_{\text{ext}}(t^{n+1/2}, \omega_j)$ и правая часть вычисляется в значениях средней точки $F_j^{n+1/2} \equiv (F_j^n + F_j^{n+1})/2$ и $t^{n+1/2} \equiv (t^n + t^{n+1})/2$. Это дает схему дискретизации второго порядка с ошибками порядка $O(\Delta t^2, \Delta\omega^2)$.

Мы используем губку (2.16) с толщиной $\omega_{\text{IR}} \sim \Delta\omega$ равной одному шагу сетки — чтобы минимизировать ее вклад при конечных ω . С другой стороны, амплитуда нашей губки относительно велика, $\mu_0 = 2 \cdot 10^6$, так она эффективно поглощает частицы с $\omega \approx 0$.

На каждом временном шаге мы решаем конечно-разностное уравнение (Б.2.3) с граничными условиями (Б.2.1) — нелинейную алгебраическую систему для $N - 2$ неизвестных F_j^{n+1} . Для этого мы используем итеративный метод Кранка-Николсона [150]. На нулевой итерации мы подставляем предполагаемый $F_i^{n+1} = F_i^n$ в правую часть ур. (Б.2.3), таким образом превращая ее в явную формулу для неизвестных первой итерации $(F_j^{n+1})_1$. Находя последние и подставляя их в правую часть снова, мы получаем неизвестные второй итерации $(F_j^{n+1})_2$, и т.д. Мы проверили, что малого шага $\Delta t \lesssim \Delta\omega^2$ и ровно трех итерации достаточно для обеспечения точности второго порядка и численной стабильности, см. [150].

Чтобы обрабатывать быстро эволюционирующие распределения, мы реализуем адаптивные шаги по времени. Перед каждой итерацией, мы оцениваем линейной экстраполяцией шаг Δt_{dyn}^n , необходимой для относительного изменения в 1% между F_j^n и F_j^{n+1} . Далее фактический шаг выбран как $\Delta t^n = \min(\Delta t_{\text{dyn}}^n, \Delta\omega^2/4)$ чтобы обеспечить и точность, и стабильность. Эта адаптивная техника позволяет нам использовать сильные губки с большими μ_0 : в любом случае решение не может быть изменено сразу более чем на 1%.

Мы оцениваем ошибки дискретизации, варьируя Δt и $\Delta\omega$. Это показывает, что наши решения стабильны на уровне точности 0.5% во всей области $\tau \lesssim 150$ времен релаксации. Узкая и сильная губка (2.16) гарантирует, что энергии решений сдвигаются не более чем на 1%, в то время как число частиц

изменяется существенно: $N(150) \sim (0.1 \div 1) N(0)$. Это оправдывает использование сохранения энергии в параграфе 2.6.

Б.3 Численные методы для автомодельных профилей

Мы решаем интегро-дифференциальное уравнение для профиля (2.28), (2.10), переформулировав его как систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта система дополняется граничными условиями: одним из уравнений (2.15), (2.31) или (2.43) при малых ω_s и требованием быстрого спада на бесконечности,

$$F_s(\omega_{UV,s}) = C_s(\omega_{UV,s}) = 0, \quad \omega_{UV,s} \rightarrow +\infty, \quad (\text{Б.3.1})$$

где второе равенство следует из определения C_s в уравнениях (2.10d). В этом Приложении мы используем безразмерные единицы (2.17), но снова не пишем тильды.

Нетрудно видеть, что неопределенные интегралы $A_s(\omega_s)$, $B_s(\omega_s)$ и $C_s(\omega_s)$ в уравнениях (2.10d) удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \partial_{\omega_s} A_s &= -A_s/(2\omega_s) + C_s, & \partial_{\omega_s} B_s &= F_s, \\ \partial_{\omega_s} C_s &= -F_s^2/(2\omega_s). \end{aligned} \quad (\text{Б.3.2})$$

Далее, подставляя $\text{St } F_s$ из уравнения (2.10a) в уравнение (2.28) и переставляя производные, находим,

$$\partial_{\omega_s} \mathcal{J}'_{N,s} = -k_N F_s + J_{\text{ext},s}, \quad (\text{Б.3.3})$$

где $k_N = 1 - 3/D$ и

$$\mathcal{J}'_{N,s}(\omega_s) \equiv \mathcal{J}_{N,s} + k_\beta \omega_s F_s, \quad k_\beta \equiv 2/D - 1. \quad (\text{Б.3.4})$$

Наконец, мы явно вычисляем производные от потокового потенциала (2.10c) в уравнении (2.10b) и получаем

$$\partial_{\omega_s} F_s = \frac{1}{A_s} \left[\frac{F_s}{2\omega_s} (A_s - B_s F_s) - \mathcal{J}'_{N,s} + k_\beta \omega_s F_s \right], \quad (\text{Б.3.5})$$

где правая часть выражена через $\mathcal{J}'_{N,s}$.

Соотношения (Б.3.2), (Б.3.3) и (Б.3.5) образуют систему пяти дифференциальных уравнений первого порядка для неизвестных $F_s(\omega_s)$, $\mathcal{J}'_{N,s}(\omega_s)$, $A_s(\omega_s)$,

$B_s(\omega_s)$ и $C(\omega_s)$. Наиболее простой вариант — наложить граничное условие (2.31) при малых ω_s : $F_s(\omega_s) = 0$ при $\omega_s \leq \omega_{\text{IR},s}$, см. также уравнение (2.50). Это дает

$$F_s = B_s = 0 \text{ и } A_s = \frac{2}{3}\omega_{\text{IR},s}C_s \text{ при } \omega_s = \omega_{\text{IR},s}. \quad (\text{Б.3.6})$$

Таким образом, мы вывели пять граничных условий (Б.3.1), (Б.3.6) для того же числа уравнений.

Мы решаем уравнения методом стрельбы. Для начала, используя $\mathcal{J}'_{N,s}(\omega_{\text{IR},s})$, $C_s(\omega_{\text{IR},s})$ и уравнения (Б.3.6) в качестве начальных данных, мы численно интегрируем уравнения (Б.3.2), (Б.3.3) и (Б.3.5) от $\omega_s = \omega_{\text{IR},s}$ до $\omega_s = \omega_{\text{UV},s}$. После этого мы подбираем значения $\mathcal{J}'_{N,s}(\omega_{\text{IR},s})$ и $C_s(\omega_{\text{IR},s})$ так, чтобы сделать $|C_s(\omega_{\text{UV},s})|$ и $|F_s(\omega_{\text{UV},s})|$ меньше чем 10^{-12} в соответствии с условиями спадания (Б.3.1). Это дает профиль $F_s(\omega_s)$, интегралы A_s , B_s , C_s и поток частиц $\mathcal{J}_{N,s}(\omega_s)$ в уравнении (Б.3.4) для данных D и $J_{\text{ext},s}(\omega_s)$.

Последний шаг — вычисление сохраняющихся зарядов. частиц N_s задается законом сохранения (2.35), где поток конденсации равен $\mathcal{J}_{N,s}(0) = \mathcal{J}'_{N,s}(\omega_{\text{IR},s})$ и интеграл²⁹ от $J_{\text{ext},s}$ теперь берется от $\omega_{\text{IR},s}$ до $\omega_{\text{UV},s}$. При конечном $\omega_{\text{IR},s}$ закон сохранения энергии включает граничный член,

$$k_E E_s = \mathcal{J}_{E,s}(\omega_{\text{IR},s}) + \int_{\omega_{\text{IR},s}}^{\omega_{\text{UV},s}} \omega_s J_{\text{ext},s} d\omega_s, \quad (\text{Б.3.7})$$

ср. с уравнением (2.36). Извлекая $\mathcal{J}_{E,s}(\omega_{\text{IR},s}) = \omega_{\text{IR},s} \mathcal{J}'_{N,s}(\omega_{\text{IR},s})$ из уравнений (2.10b) и численного решения, получаем E_s .

На практике мы полагаем $\omega_{\text{UV},s} = 20$ и меняем $\omega_{\text{IR},s}$ в интервале $10^{-8} \leq \omega_{\text{IR},s} \leq 10^{-2}$. Мы интегрируем уравнения, используя метод Рунге-Кутты четвертого порядка с шагом $\Delta\omega_s = \omega_{\text{IR},s}/10$ или адаптивный алгоритм Булирша-Стоера [148] с целевой точностью $\Delta F_s = 10^{-11}$. Численные ошибки контролируются путем изменения параметров сетки и сравнения законов сохранения (2.35) и (Б.3.7) с определениями зарядов (2.34). Таким образом оцененная точность наших профилей всегда лучше чем $\Delta \ln F_s < 5 \cdot 10^{-7}$. Наконец, мы убеждаемся, что все решения имеют правильное ультрафиолетовое поведение (2.39) и удовлетворяют уравнению (2.15) в пределе $\omega_{\text{IR},s} \rightarrow 0$.

Другой вариант — наложить асимптотические ($\omega_s = 0$) условия (2.15) или (2.43) с самого начала. Для этого мы переформулируем их как требова-

²⁹Мы вычисляем его, добавляя $\partial_{\omega_s} I(\omega_s) = J_{\text{ext},s}$ к системе дифференциальных уравнений, где $I(\omega_{\text{IR},s}) = 0$.

ния при малых, но конечных $\omega_s = \omega_{\text{IR},s} \sim 10^{-8}$. А именно, при $\omega_s \leq \omega_{\text{IR},s}$ мы фиксируем одну из двух асимптотических форм (2.45) или (2.42) решений,

$$F_s = F_0 \omega_s^{-1/2} + F_1 - \frac{F_1^2}{2F_0} \omega_s^{1/2} \quad \text{или} \quad F_s = F_0 \omega_s^{-1/3}, \quad (\text{Б.3.8})$$

где константы F_0 и F_1 в первом случае управляют потоками частиц и энергии при $\omega_s = 0$, в частности, $\mathcal{J}_{E,s}(0) = -3F_0^2 F_1/2$. Во втором случае $\mathcal{J}_{E,s}(0)$ не является свободной, см. обсуждение в Приложении Б.4.1. Далее мы определяем четыре начальных данных $F_s(\omega_{\text{IR},s})$, $A_s(\omega_{\text{IR},s})$, $B_s(\omega_{\text{IR},s})$, и $C_s(\omega_{\text{IR},s})$ из уравнений (Б.3.8) и (2.10d). В частности,

$$C_s(\omega_{\text{IR},s}) = \frac{F_0^2}{2\omega_{\text{IR},s}} + \frac{2F_0 F_1}{\omega_{\text{IR},s}^{1/2}} + C_0 \quad \text{или} \quad \frac{3F_0^2}{4\omega_{\text{IR},s}^{2/3}} + C_0,$$

и

$$A(\omega_{\text{IR},s}) = \frac{2}{3} [F_0^2 + F_0 F_1 \omega_{\text{IR},s}^{1/2} + \omega_{\text{IR},s} C_s(\omega_{\text{IR},s})]$$

или $\frac{2}{5} F_0^2 \omega_{\text{IR},s}^{1/3} + \frac{2}{3} \omega_{\text{IR},s} C_s(\omega_{\text{IR},s})$.

У нас остаются три неопределенных³⁰ параметра F_0 , C_0 и $\mathcal{J}'_{N,s}(\omega_{\text{IR},s})$: напомним, что дополнительный коэффициент F_1 в уравнении (Б.3.8) связан с $\mathcal{J}_{E,s}(0)$ и фиксирован граничными условиями (2.15) или (2.43).

Но это еще не конец истории, потому что параметр C_0 также не является свободным. В Приложении Б.4.1 мы связываем его с $\mathcal{J}'_{N,s}(\omega_{\text{IR},s})$ через уравнения (Б.3.4), (Б.4.7) или уравнения (Б.3.4), (Б.4.12) в двух приведенных выше случаях. Как только C_0 фиксирован, реальными параметрами стрельбы являются F_0 и $\mathcal{J}'_{N,s}(\omega_{\text{IR},s})$. Подбирая их для удовлетворения условий спада (Б.3.1), мы получаем одно численное решение для каждого $\mathcal{J}_{E,s}(0)$, D и $\mathcal{J}_{\text{ext},s}(\omega_s)$.

Проверяя чувствительность результатов к $\omega_{\text{IR},s}$, мы измеряем численную точность наложения асимптотических условий (2.15) или (2.43), которая никогда не превышает $\Delta \ln F_s < 10^{-6}$.

Мы завершим этот параграф комментариями о численных решениях при $\mathcal{J}_{\text{ext},s} = 0$ и $D = 5/2$. Соответствующее уравнение для профиля (2.28) обла-

³⁰Можно параметризовать решения перемасштабированным числом частиц N_s или амплитудой источника J_0 вместо $\mathcal{J}'_{N,s}(\omega_{\text{IR},s})$, находя последнее из закона сохранения (2.35) и уравнения (Б.3.4).

дает остаточной масштабной симметрией (2.30), если наложено условие нулевого потока (2.15). Мы численно наблюдали, что подстройки одного параметра стрельбы F_0 в этом случае достаточно для одновременного удовлетворения обоих условий спадаания (Б.3.1). Второй свободный параметр затем нормирует решения, например, как $\mathcal{J}_{N,s}(0) = -1/2$.

Несколько иной случай — это $J_{\text{ext},s} = 0$ в сочетании с условием (2.31) при конечном $\omega_{\text{IR},s}$. Последнее слегка нарушает остаточную симметрию (2.30), подтверждая, что оба параметра F_0 и $\mathcal{J}'_{N,s}(\omega_{\text{IR},s})$ должны быть подобраны для удовлетворения условий спадаания. Кроме того, конечное $\omega_{\text{IR},s}$ приводит к малому отклонению D от $5/2$. Действительно, закон сохранения энергии (Б.3.7) гласит:

$$(2 - 5/D) E_s = \mathcal{J}_{E,s}(\omega_{\text{IR},s}) = \omega_{\text{IR},s} \mathcal{J}'_{N,s}(\omega_{\text{IR},s}), \quad (\text{Б.3.9})$$

где последнее равенство следует из уравнения (2.10b) и граничных условий (Б.3.6). Поэтому можно использовать $\mathcal{J}'_{N,s}(\omega_{\text{IR},s})$ как параметр стрельбы и находить D из уравнения (Б.3.9), или, лучше, фиксировать поток частиц и удовлетворять условия спадаания, подстраивая малую разницу $D - 5/2$.

Б.4 Асимптотики автомоделльных профилей

Б.4.1 Асимптотики при $\omega_s \rightarrow 0$

В параграфе 2.4 мы идентифицировали два³¹ нетривиальных поведения при малых энергиях: $F_s \propto \omega_s^{-1/2}$ и $\omega_s^{-1/3}$, которые делают интеграл столкновений явно инфракрасно сходящимся и поддерживают конечные потоки при $\omega_s \rightarrow 0$. Ниже мы строим степенные разложения профилей на основе этих поведений. Мы рассмотрим их отдельно.

Поведение $F_s \propto \omega_s^{-1/2}$ при малых ω_s

Естественно предположить разложение по полуцелым степеням для таких профилей,

$$F_s = F_0 \omega_s^{-1/2} + F_1 + F_2 \omega_s^{1/2} + F_3 \omega_s + O(\omega_s^{3/2}), \quad (\text{Б.4.1})$$

³¹Поведения $F_s \propto \omega_s^{-3/4}$ и ω_s^0 являются особыми: они порождают логарифмические расходимости и члены $\ln \omega_s$ в интеграле столкновений, см. уравнения (2.10d). Эти несоответствия не исчезают даже после умножения асимптотики на $(\ln \omega_s)^\zeta$. Мы поэтому исключаем особые поведения из рассмотрения.

где F_i — константы. Но это представление сразу же дает $\ln \omega_s$ в интеграле

$$C_s(\omega_s) = C_0 + \frac{F_0^2}{2\omega_s} + \frac{2F_0F_1}{\omega_s^{1/2}} - \left(\frac{F_1^2}{2} + F_0F_2 \right) \ln \omega_s + O(\omega_s^{1/2}), \quad (\text{Б.4.2})$$

где C_0 — постоянная интегрирования, см. уравнение (2.10d). Такие логарифмические члены множатся в полном интеграле рассеяния, препятствуя тому, чтобы анзац (Б.4.1) удовлетворял уравнению для профиля, и — что важно — приводя к расходимости потока частиц (2.10b), (2.10c) в инфракрасной области: $\mathcal{J}_{N,s} = -\frac{1}{3}W_0F_0(F_1^2 + 2F_0F_2)\omega_s^{-1/2} \ln \omega_s + \dots$. Это оставляет только один способ удовлетворить условию конечности потока: устранить логарифмы с самого начала, положив

$$F_2 = -\frac{F_1^2}{2F_0}. \quad (\text{Б.4.3})$$

Соотношение (Б.4.3) учтено в уравнениях (2.41) и (2.45) основного текста.

Подставляя разложение (Б.4.1), (Б.4.3) в другие интегралы³² (2.10c), (2.10d), мы приходим к потоковому потенциалу

$$\begin{aligned} \frac{W_s}{W_0} = & \frac{3}{2}F_0^2F_1 + \frac{\omega_s^{1/2}}{3}(4F_0C_0 + F_0F_1^2) \\ & + \frac{\omega_s}{12}(4F_1C_0 + 22F_1^3 - 45F_0^2F_3) + O(\omega_s^{3/2}) \end{aligned} \quad (\text{Б.4.4})$$

и, следовательно, к интегралу столкновений (2.10a),

$$\text{St}F_s = \frac{W_0}{12}(4F_0C_0 + F_0F_1^2)\omega_s^{-3/2} + O(\omega_s^{-1/2}). \quad (\text{Б.4.5})$$

Примечательно, что главный член $\text{St}F_s$ уже исчез, см. уравнение (2.23). Но оставшиеся члены все еще доминируют над членом порядка $O(\omega_s^{-1/2})$ в левой части уравнения для профиля (2.28). Чтобы удовлетворить ему, мы налагаем условие

$$C_0 \equiv \left[C_s(\omega_{\text{IR},s}) - \frac{F_0^2}{2\omega_{\text{IR},s}} - \frac{2F_0F_1}{\omega_{\text{IR},s}^{1/2}} \right]_{\omega_{\text{IR},s} \rightarrow 0} = -\frac{F_1^2}{4}, \quad (\text{Б.4.6})$$

где первое равенство — это определение C_0 , следующее из уравнения (Б.4.2), а второе — необходимо для устранения члена порядка $\omega_s^{-3/2}$ в уравнении (Б.4.5).

³²Заметим, что $A_s \equiv \frac{2}{3}\omega_s C_s(\omega_s) + \frac{1}{3} \int_0^{\omega_s} d\omega'_s (\omega'_s/\omega_s)^{1/2} F_s^2(\omega'_s)$ включает ту же постоянную интегрирования C_0 .

Вычисляя производные от потокового потенциала (Б.4.4), мы получаем конечные потоки при $\omega_s = 0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{N,s}(0) &\equiv \partial_{\omega_s} W_s(0) = \frac{7}{4} W_0 F_1^3 - \frac{15}{4} W_0 F_0^2 F_3, \\ \mathcal{J}_{E,s}(0) &\equiv -W_s(0) = -\frac{3}{2} W_0 F_0^2 F_1,\end{aligned}$$

где использовано уравнение (Б.4.6). Эти выражения полезны в параграфе 2.5, см. уравнения (2.41) и (2.45).

Как только уравнения (Б.4.3) и (Б.4.6) выполнены, левая и правая части уравнения для профиля (2.28) становятся сравнимыми по степеням ω_s . Решая его почленно, можно определить F_4 , F_5 , F_6 и т.д. Константы асимптотики F_0 , F_1 и F_3 являются свободными, где F_1 управляет потоком энергии при $\omega_s = 0$, а F_0 и F_3 должны быть подобраны для удовлетворения условий спадания (Б.3.1). Таким образом, мы имеем одно решение для каждого D , $J_{\text{ext},s}(\omega_s)$ и $\mathcal{J}_{E,s}(0)$.

Мы завершаем этот подраздел замечанием. В численном методе Приложения Б.3 мы определяли C_0 из главной асимптотики потока частиц,

$$\mathcal{J}_{N,s}(\omega_s) = \frac{\omega_s^{-1/2}}{6} W_0 F_0 (4C_0 + F_1^2) + O(\omega_s^0), \quad (\text{Б.4.7})$$

где использованы уравнения (2.10b), (Б.4.3), (Б.4.4), а уравнение (Б.4.6) — нет. Для конечного $\mathcal{J}_{N,s}$ при $\omega_s \rightarrow 0$ это определение C_0 эквивалентно уравнению (Б.4.6).

Поведение $F_s \propto \omega_s^{-1/3}$ при малых ω_s

На этот раз мы начнем со степенного подсчета. Предположим, что низкоэнергетическая асимптотика профиля имеет вид

$$F_s(\omega_s) = F_0 \omega_s^{-1/3} + F_1 \omega_s^\zeta + o(\omega_s^\zeta), \quad \zeta > -1/3.$$

Тогда потоковый потенциал (2.10c), (2.10d) включает степени

$$W_s = d_0 + d_{1/3} \omega_s^{2/3} + d_\zeta \omega_s^{\zeta+1/3} + o(\omega_s^{\zeta+1/3}) \quad (\text{Б.4.8})$$

с коэффициентами d_0 , $d_{1/3}$ и d_ζ . Соответствующий интеграл столкновений $\text{St } F_s = -\partial_{\omega_s}^2 W_s = \frac{2}{9} d_{1/3} \omega_s^{-4/3} + \dots$ не получает вклада от главного члена d_0 , но все еще не может быть скомпенсирован членом порядка $O(\omega_s^{-1/3})$ в левой части уравнения для профиля (2.28). Следовательно, мы требуем $d_{1/3} = 0$ и

ограничиваем подчиненные члены условиями $\zeta = 2/3$ и $\zeta \geq 4/3$. Действительно, $\zeta = 2/3$ дает $W_s = d_\zeta \omega_s$, что не влияет на интеграл столкновений (2.10а), (2.10b). При $\zeta \geq 4/3$ интеграл $\text{St } F_s \lesssim \omega_s^{-1/3}$ может быть сбалансирован в уравнении для профиля.

Мы пришли к асимптотике вида

$$F_s(\omega_s) = F_0 \omega_s^{-1/3} + F_1 \omega_s^{2/3} + O(\omega_s^{4/3}), \quad (\text{Б.4.9})$$

см. уравнение (2.42) из основного текста. В отличие от предыдущего подраздела, интегралы (2.10d) не содержат логарифмов, например,

$$C_s = \frac{3}{4} F_0^2 \omega_s^{-2/3} + C_0 - 3F_0 F_1 \omega_s^{1/3} + O(\omega_s^{4/3}) \quad (\text{Б.4.10})$$

с постоянной интегрирования C_0 . Мы получаем потоковый потенциал (2.10с),

$$\frac{W_s}{W_0} = \frac{9}{40} F_0^3 + \frac{5}{6} F_0 C_0 \omega_s^{2/3} - \frac{729}{220} F_0^2 F_1 \omega_s + O(\omega_s^{5/3}),$$

где второй член порождает главную степенную асимптотику в $\text{St } F_s = -\partial_{\omega_s}^2 W_s \propto C_0 F_0 \omega_s^{-4/3}$. Как обсуждалось, мы устраняем ее, полагая

$$C_0 \equiv \left[C_s(\omega_{\text{IR},s}) - \frac{3F_0^2}{4\omega_{\text{IR},s}^{2/3}} \right]_{\omega_{\text{IR},s} \rightarrow 0} = 0, \quad (\text{Б.4.11})$$

где первое равенство — это определение C_0 в уравнении (Б.4.10).

Мы снова вычисляем потоки конденсации — производные (2.10b) от $W_s(\omega_s)$ при $C_0 = \omega_s = 0$,

$$\mathcal{J}_{N,s}(0) = -\frac{729}{220} W_0 F_0^2 F_1, \quad \mathcal{J}_{E,s}(0) = -\frac{9}{40} W_0 F_0^3.$$

Эти выражения обсуждаются в параграфе 2.5.2 ниже уравнения (2.42). Запишем также главный член потока частиц при $C_0 \neq 0$,

$$\mathcal{J}_{N,s}(\omega_s) = \frac{5}{9} W_0 F_0 C_0 \omega_s^{-1/3} + O(\omega_s^0), \quad (\text{Б.4.12})$$

что полезно в Приложении Б.3.

Полагая $C_0 = 0$ и решая уравнение для профиля почленно по ω_s , можно найти все коэффициенты разложения в уравнении (Б.4.9), кроме F_0 и F_1 , которые фиксируются условиями спадания (Б.3.1). Это дает одно решение для каждого D и $J_{\text{ext},s}(\omega_s)$.

Примечательно, что наши решения с $\omega^{-1/3}$ лишены одного свободного параметра по сравнению с профилями $\omega^{-1/2}$ и поэтому могут рассматриваться как тонко настроенные.

Б.4.2 Асимптотики при $\omega_s \rightarrow \infty$

Теперь мы выведем поведение при высоких энергиях для локализованных автомодельных профилей. Мы предположим, что они убывают экспоненциально с ω_s , таким образом пренебрегая $F_s^2(\omega_s)$ и $C_s(\omega_s)$ по сравнению с самой F_s . С другой стороны, $B_s \rightarrow N_s$ и $A_s \rightarrow G_0/(3\sqrt{\omega_s})$ при $\omega_s \rightarrow \infty$, где N_s и

$$G_0 \equiv \int_0^\infty d\omega'_s F_s^2(\omega'_s) \sqrt{\omega'_s}$$

являются константами, см. уравнения (2.10d).

Интегрируя левую и правую части уравнения для профиля (2.28), (2.10a) от ω_s до бесконечности, мы находим

$$k_N N_s - k_N B_s(\omega_s) = t_{\text{rel}} \mathcal{J}'_{N,s}(\omega_s) \quad (\text{Б.4.13})$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'_{N,s}(\omega_s) &\equiv \mathcal{J}_{N,s}(\omega_s) + \frac{k_\beta}{t_{\text{rel}}} \omega_s F_s \\ &= \frac{W_0 G_0}{6\omega_s^{3/2}} (F_s - 2\omega_s \partial_{\omega_s} F_s) + \frac{k_\beta}{t_{\text{rel}}} \omega_s F_s, \end{aligned} \quad (\text{Б.4.14})$$

где $k_\beta = 2/D - 1$, $k_N = 1 - 3/D$ и мы применили уравнения (2.10) в последнем равенстве.

Поскольку $F_s = \partial_{\omega_s} B_s$, соотношения (Б.4.13), (Б.4.14) дают линейное дифференциальное уравнение второго порядка для $B_s(\omega_s)$. Мы решаем его при больших ω_s , используя ВКБ-анзац

$$B_s(\omega_s) = N_s - B_1(\omega_s) e^{-S_s(\omega_s)}, \quad (\text{Б.4.15})$$

где показатель $S_s \gg 1$ и префактор B_1 являются степенями ω_s . В главном порядке по ω_s уравнения (Б.4.13), (Б.4.14) сводятся к

$$\frac{t_{\text{rel}} W_0 G_0}{3\sqrt{\omega_s}} \partial_{\omega_s} S_s(\omega_s) + k_\beta \omega_s = 0$$

и дают решение $S_s = -6k_\beta \omega_s^{5/2}/(5t_{\text{rel}} W_0 G_0)$, где мы пренебрегли аддитивной постоянной интегрирования. В следующем порядке мы находим уравнение для $B_1(\omega_s)$,

$$(2D - 5)B_1(\omega_s) = -\omega_s(D - 2)\partial_{\omega_s} B_1(\omega_s),$$

с решением $B_1 = B_0 \omega_s^{(5-2D)/(D-2)}$.

Наконец, мы подставляем $S_s(\omega_s)$, $B_1(\omega_s)$ в уравнение (Б.4.15), извлекаем W_0 из уравнения (2.10с), и берем производную $F_s = \partial_{\omega_s} B_s$. Мы приходим к асимптотике при больших ω_s (2.39) для профиля, где k_β и k_N выражены через D и мы переопределили константу нормировки как $F_\infty \equiv -3k_\beta B_0 / (t_{\text{rel}} W_0 G_0)$.